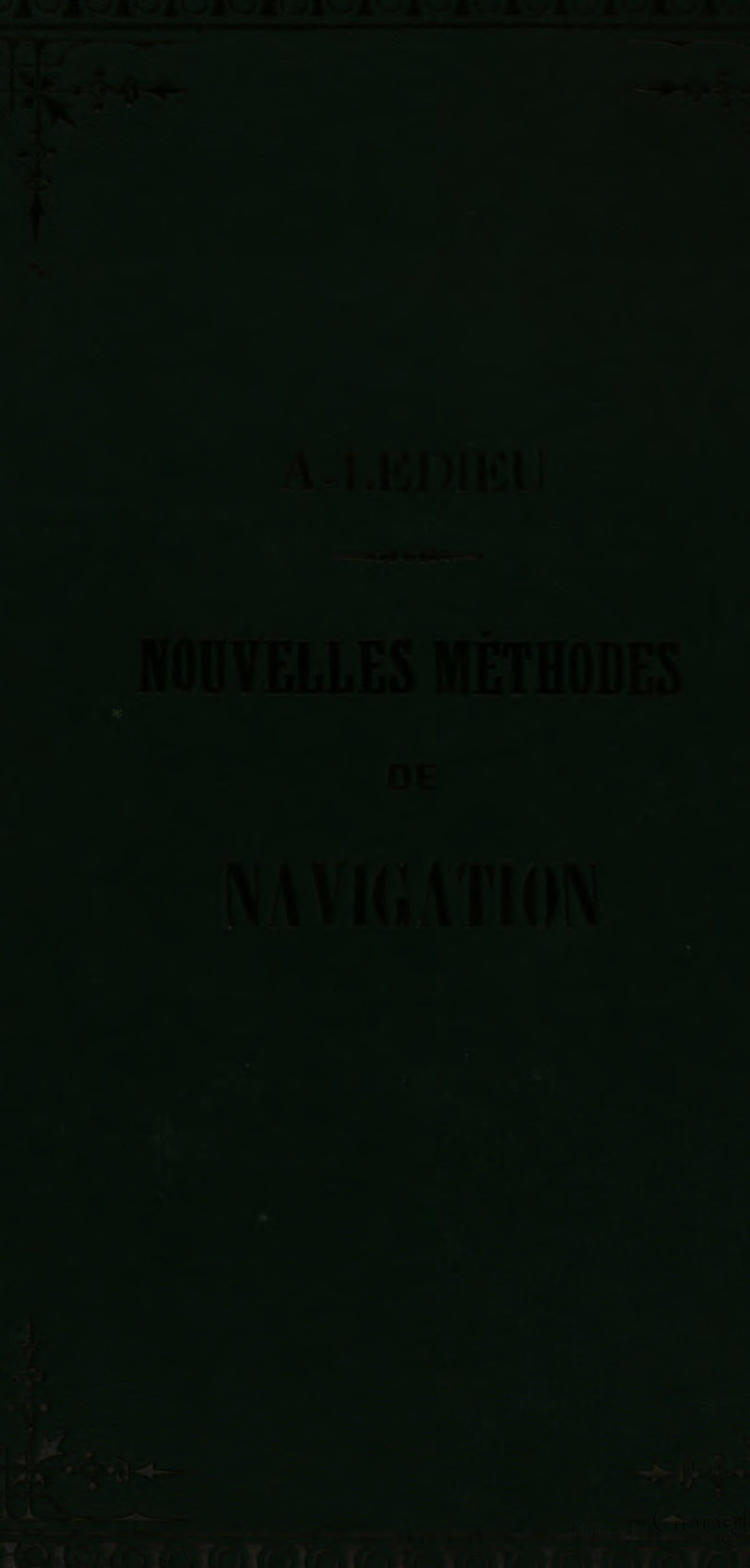

A. LEDIEU
NOUVELLES MÉTHODES
DE
NAVIGATION



a

PARIS. — IMPRIMERIE ARNOUS DE RIVIÈRE, RUE RACINE, 26.

LES

NOUVELLES MÉTHODES DE NAVIGATION

ÉTUDE CRITIQUE

PAR

A. LEDIEU, ✻, O ✪, ✻,
ANCIEN OFFICIER DE VAISSEAU, EXAMINATEUR DE LA MARINE,
PRIX EXTRAORDINAIRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES POUR L'APPLICATION
DE LA VAPEUR A LA FLOTTE,
CORRESPONDANT DE L'INSTITUT.

OUVRAGE RÉDIGÉ
POUR LA PARTIE APPLICATION
AVEC LE CONCOURS DE PLUSIEURS OFFICIERS DE LA MARINE MILITAIRE, ET NOTAMMENT
DE MM. **PERRIN**, AUTEUR DE TABLES NAUTIQUES,
ET **ROUYAUX**, AUTEUR DE TRAVAUX CHRONOMÉTRIQUES;

Enrichi de nombreuses gravures intercalées dans le texte;

RENFERMANT

TOUS LES NOUVEAUX TYPES DE CALCUL
pour la détermination des droites de hauteur et du point complet à la mer
(méthodes *Marcq Saint-Hilaire* et *Pagel améliorée*, procédé *semi-logarithmique et semi-arithmétique*),
ainsi que pour la réduction des distances lunaires et l'usage perfectionné des chronomètres,
avec application élémentaire de la théorie des erreurs d'observation.

PARIS
DUNOD, ÉDITEUR
LIBRAIRE DES CORPS NATIONAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES, DES MINES
ET DES TÉLÉGRAPHES
49, QUAI DES AUGUSTINS, 49

1877

TABLE DES MATIÈRES.

Nota important. — Tous les numéros marqués d'un astérique peuvent être laissés de côté pour les besoins de la navigation.

PREMIÈRE PARTIE.

PROBLÈME GÉNÉRAL DES DROITES ET DES COURBES DE HAUTEUR ET DU POINT COMPLET A LA MER.

1re PARTIE. — § II. Cas d'une seule observation : diverses manières de mener la droite de hauteur par le point choisi. Existence analytique de cinq droites de hauteur simultanées du navire.

1re PARTIE. — § III. Cas d'une seule observation : remplacement de la droite de hauteur par un autre lieu géométrique du navire, rectiligne sur la carte.

1re PARTIE. — § IV. Cas d'une seule observation : remplacement de la droite de hauteur par un autre lieu géométrique du navire, curviligne sur la carte.

1re PARTIE. — § X. Du rôle actuel des distances lunaires.

DEUXIÈME PARTIE.

DESCRIPTION, THÉORIE ET USAGE PERFECTIONNÉ DES CHRONOMÈTRES.

2e PARTIE. — § I. Étude du mécanisme des chronomètres.

2e PARTIE. — § II. Variations normales des marches des chronomètres, et variations anormales ou perturbations.

2e PARTIE. — § III. Formules de marche des chronomètres.

2e PARTIE. — § IV. NOTIONS SUR LA THÉORIE DES ERREURS D'OBSERVATION; ET MÉTHODES POUR CALCULER LES CONSTANTES DE TOUTE FORMULE REPRÉSENTANT UN PHÉNOMÈNE PHYSIQUE QUELCONQUE.

2e PARTIE. — § V. Régulation des chronomètres; graphiques de marche; installation et service des chronomètres.

2e PARTIE. — § VI. Emploi des chronomètres a la mer.

TROISIÈME PARTIE.

PRÉCEPTES DIVERS POUR LA CORROBORATION PRATIQUE DES NOUVELLES MÉTHODES DE NAVIGATION.

3e PARTIE. — § I. CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LA PRÉSENTE PARTIE.

3e PARTIE. — § II. CONSIDÉRATIONS SUR LE CHOIX ET L'USAGE DES INSTRUMENTS DE ROUTE. DÉVIATION DES COMPAS.

QUATRIÈME PARTIE.

RÉSOLUTION DE DIVERS PROBLÈMES DE NAVIGATION PAR LA SÉRIE DE TAYLOR CONDENSÉE.

4me PARTIE. — § I. Diverses formes condensées de la série de Taylor a une ou plusieurs variables.

4me PARTIE. — § II. Applications nautiques de la série de Taylor condensée.

INDEX DES TYPES DE CALCULS.

INDEX DES TABLES DIVERSES

POUR L'USAGE DES NOUVELLES MÉTHODES DE NAVIGATION.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

PRÉFACE.

Depuis quelque temps, l'attention des navigateurs a été appelée sur les avantages que peuvent présenter, d'une part, l'application des recherches de MM. Yvon Villarceau, de Magnac et Rouyaux pour l'*usage perfectionné* des chronomètres, et, d'autre part, l'emploi du procédé récent de M. Marcq Saint-Hilaire, pour une détermination particulière soit de la *droite de hauteur* correspondant à une seule observation, soit du *point complet* déduit de plusieurs hauteurs.

Les partisans éclairés des modes courants protestent énergiquement contre l'abandon de ces modes, en même temps que les promoteurs des nouveaux procédés ne parlent de rien moins que d'une refonte radicale de la théorie et de la pratique de la Navigation. Le sujet offre en lui-même un intérêt capital pour la Marine. Appelé par mes fonctions à approfondir l'état des choses, et ayant été en mesure d'entendre à souhait les arguments des deux partis, je crois utile, à l'aide d'un *examen critique et consciencieux,* de rétablir, dans ses véritables termes, une discussion où les malentendus semblent avoir joué jusqu'ici le principal rôle. Je me suis d'ailleurs proposé de mettre en relief quelques développements originaux propres à élucider le problème général de la Navigation, et de com-

pléter ainsi ce problème par divers sujets peu ou point connus de la généralité des marins.

Notre ouvrage nous conduira à signaler, à côté des personnes que noux venons de citer, un grand nombre d'officiers et de professeurs distingués, tels que MM. Fleuriais, Hilleret, Labrosse, Boitard, Mas Saint-Guiral, Crévost, Fasci, Perrin, etc., qui, chacun dans des voies différentes, et à la suite du commandant Mouchez, ont apporté leur contingent aux perfectionnements des solutions rapides du problème général de la Navigation, substituées depuis déjà longtemps aux solutions théoriquement rigoureuses, mais longues, des anciens navigateurs. — Il ressortira de là incidemment que nos Écoles Navales et d'Hydrographie ont été tenues à la hauteur des innovations utiles, au fur et à mesure qu'elles se sont produites, et que leur enseignement ne saurait démériter des éloges que lui ont prodigués, en maintes circonstances, les journaux scientifiques étrangers.

Nous avons divisé notre travail en quatre parties :

La première partie est consacrée au « *Problème général des droites et des courbes de hauteur et du point complet à la mer.* »

La deuxième partie a pour titre « *Description, théorie et usage perfectionné des chronomètres.* »

La troisième partie renferme des « *Préceptes divers pour la corroboration pratique des Nouvelles méthodes de navigation,* » entendues, non pas avec une signification restrictive, mais dans le sens large expliqué plus loin.

La quatrième partie est réservée à la « *Résolution de*

divers problèmes de navigation par la série de Taylor condensée. »

— Dans la PREMIÈRE PARTIE, nous débutons par reprendre, suivant un ordre d'idées tout à fait général et *discussif*, la théorie des droites de hauteur, qui n'a jusqu'ici été envisagée que d'une façon essentiellement bornée; et nous montrons le meilleur usage à faire d'*une seule observation* pour en déduire un lieu géométrique du navire. Nous avons ainsi été amené incidemment à reprendre la détermination de la latitude et par suite du parallèle de l'observateur par les culminations d'astre et les hauteurs circumméridiennes, question dont plusieurs détails nous ont semblé de nature à être signalés avec des considérations particulières. — La recherche d'un lieu géométrique du navire plus rigoureux qu'une droite de hauteur, nous a conduit ensuite à une étude succincte des *courbes de hauteur*. A ce problème lui-même s'est rattaché d'une manière immédiate un exposé sommaire des fonctions hyperboliques, dont l'usage permet de simplifier certains détails de ladite étude. Du reste, ces fonctions, presque inconnues jusqu'ici en France, sont depuis longtemps répandues à l'étranger; et il a semblé opportun d'en vulgariser la notion. — Pour parfaire ce qui concerne la détermination d'un lieu géométrique du navire déduit d'une seule hauteur, nous avons examiné les circonstances favorables à cette détermination; puis indiqué le moyen de tenir compte des erreurs d'observation à l'aide des *bandes* et des *polygones de certitude*.

Après avoir ainsi achevé ce qui concerne l'emploi le plus intelligent et le plus rationnel d'*une seule observation*, nous avons abordé le problème général de la détermination

du *point complet* à la mer par plusieurs hauteurs, en donnant un exposé *comparatif* non-seulement des méthodes plus ou moins récentes qui dérivent naturellement de la considération des droites de hauteur, mais encore de tous les procédés par calcul de fausse position inhérents à l'espèce du problème. Il y a été joint une méthode allemande de fraîche date, semi-logarithmique et semi-arithmétique. — La question a été ensuite complétée par la discussion des circonstances favorables qui la concernent, et qui ont été envisagées tant au point de vue des erreurs d'observation, que sous le rapport de l'essence du procédé employé à la résolution du problème. Cette discussion a permis, entre autres, de préciser dans quelles conditions il y a moyen d'obtenir des résultats acceptables avec les méthodes, comme celle de Littrow, imaginées pour déterminer le point complet à l'aide de deux observations prises aux environs du méridien. — De son côté, la considération du cas où on dispose de plus de deux observations, nous a conduit à traiter, d'après les communications de M. Villarceau à l'Académie des sciences, de la recherche du *point le plus probable* relatif à trois lieux géométriques au moins du navire, se coupant en des endroits différents. Nous avons eu soin de faire suivre cette recherche des motifs nombreux qui doivent la faire considérer par les navigateurs comme à peu près *spéculative*, et d'indiquer le procédé graphico-pratique auquel il convient de se borner. — Enfin, un paragraphe spécial, achevant la première partie dont il s'agit, a été consacré au rôle qu'il importe de conserver aux distances lunaires, à l'encontre de la tendance fâcheuse qui porte à les faire complétement abandonner aujourd'hui.

— La SECONDE PARTIE du livre, consacrée exclusivement aux chronomètres, débute par des explications sommaires, mais précises, sur la description et la théorie de leur mécanisme, principalement au point de vue de l'isochronisme. Ces explications nous paraissent tout à fait propres à compléter l'instruction des marins sur les précieux instruments qui sont aujourd'hui l'âme de la navigation rapide. Elles forment le résumé des beaux travaux de l'espèce de MM. Philipps, Villarceau et Résal, ainsi que des excellentes publications de M. Caspari. Elles renferment, en outre, des indications techniques puisées aux meilleurs traités d'horlogerie, et auprès de M. A. H. Rodanet, un de nos plus habiles chronométriers, qui a bien voulu aussi nous fournir les dessins de l'espèce qu'on voit figurer dans le texte.

Le lecteur pourra apprécier combien il était utile de grouper ainsi en un seul faisceau toute une série d'idées, dont la dissémination ne permettait pas jusqu'ici de suivre avec fruit le lien qui les unissait, et dont la coordination jette un jour complet sur l'existence et la nature de la variation *normale* des marches sous l'action des changements de température et de l'âge des huiles, variation propre du reste à chaque chronomètre. — Il était rationnel de compléter cette question par l'exposé des perturbations chronométriques dues à l'influence même de la présence des montres à bord des navires, et dont l'étude, déjà faite en son temps par d'éminents navigateurs, a été reprise avec soin, dans ces dernières années, par divers officiers, notamment par MM. Fleuriais, Martin, de Magnac, Rouyaux, etc. Les explications sus-mentionnées que nous donnons du mécanisme des montres aident encore à expliquer la plupart de ces perturbations. Elles éviteront souvent ainsi

aux officiers la peine d'aller chercher bien loin la raison de dérangements en apparence mystérieux, et auxquels l'imagination est portée à attribuer des origines de fantaisie.

Ces préliminaires posés, nous avons indiqué, après un *examen contradictoire*, la façon la plus logique de tenir compte des changements de température et de l'âge des huiles, soit pour les campagnes scientifiques à l'aide de *formules complètes*, soit pour la navigation courante à l'aide de *formules réduites*, ou mieux par des *procédés graphiques*, procédés que M. Mouchez a le premier systématisés avec cet instinct supérieur qui caractérise toutes les œuvres de l'éminent académicien. — Désireux d'apporter un soin exprès dans l'exposé de cette question, il nous a fallu commencer par donner des notions élémentaires, et néanmoins bien nettes, sur la *Théorie des erreurs d'observation*, théorie qu'il est utile de connaître, du moment qu'on en arrive à considérer l'usage des chronomètres comme une science de précision. Nous nous sommes ensuite efforcé de mettre en relief les nuances particulières propres aux formules et aux procédés précités pour tenir compte des erreurs en question. L'ignorance de ces nuances a fait échapper jusqu'ici aux yeux des navigateurs la raison d'être des améliorations proposées, et ne leur a pas permis d'en saisir le but, ni la nécessité.

En ce qui concerne la manière de tenir compte des perturbations chronométriques dues à la présence même des montres à bord, nous avons abordé le problème dans toute sa généralité, et indiqué la voie soit analytique, soit graphique, qu'il importe de suivre pour le meilleur parti à tirer de l'emploi concomitant de plusieurs chronomètres.

— Dans notre TROISIÈME PARTIE, nous avons groupé en *préceptes divers pour la corroboration pratique des Nouvelles méthodes de navigation,* toutes les recommandations de nature à rendre le plus exact possible aujourd'hui la détermination du point à la mer. Nous avons indiqué, en particulier, la perfection qu'on est actuellement en droit d'exiger des différents instruments (instruments de route, instruments à réflexion, chronomètres, etc.), qui concourent à la détermination dont il s'agit.

Nous avons montré ensuite : 1° dans quelle mesure on peut reconnaître et par suite éliminer les erreurs *systématiques* de ces instruments ; 2° la manière de se perfectionner dans leur usage, de façon à restreindre le plus possible les erreurs *accidentelles* y relatives ; 3° comment il y a moyen d'apprécier rationnellement celles de ces dernières erreurs qui proviennent des *observations* elles-mêmes, quelle que soit l'espèce de celles-ci, et qui servent, en définitive, de base au calcul des erreurs sur les résultats. Nous avons insisté sur ce dernier détail ; car l'application de la « *Théorie des erreurs d'observation* » peut se trouver taxée d'être purement *conventionnelle,* dès lors que les valeurs des *erreurs de début* ne sont pas *rationnellement* justifiées.

— Notre QUATRIÈME PARTIE, relative à la *résolution de divers problèmes de navigation par la série de Taylor condensée,* contient des applications, dues à M. Rouyaux, qui méritent au plus haut point de fixer l'attention des navigateurs instruits. On verra là un ordre d'idées aussi original qu'usuel pour éviter de recommencer en entier des calculs de même espèce, dépendant d'éléments observés à des intervalles de temps susceptibles d'être assez no-

tables. On y trouvera également un procédé non moins élégant que rigoureux pour une rapide réduction des distances lunaires.

— De nombreux TYPES de calculs conformes à tous les procédés de navigation les plus actuellement recommandables, et dont le sommaire est relaté sur la couverture de l'ouvrage, ont été insérés à la suite du texte, et donnent ainsi au livre un caractère *pratique* tout d'actualité.

— Le lecteur achèvera de saisir l'importance et l'objet de notre publication, ainsi que l'enchaînement des questions, en parcourant la table des matières, ce qui lui permettra du même coup de constater les lacunes nombreuses et regrettables des Traités de navigation en usage. Il est à peine besoin de prévenir que, suivant notre habitude, nous avons compulsé tout ce qui a été écrit, tant en France qu'à l'étranger, sur les divers sujets que nous nous étions proposé de traiter. C'est là un labeur souvent ingrat, mais auquel les auteurs consciencieux n'ont pas le droit de se soustraire, sous peine de laisser échapper des points intéressants, de présenter comme originales des questions déjà résolues, et d'omettre de rendre justice à des devanciers souvent trop ignorés. — Nous avons eu aussi la bonne fortune d'associer à notre œuvre, pour la *partie application*, M. Beuf, lieutenant de vaisseau, l'habile directeur de l'Observatoire de Toulon, ainsi que MM. les officiers de marine Hilleret, Rouyaux et Perrin, qui se sont fait une réputation dans la flotte par les travaux qu'ils ont publiés, suivant des voies différentes, sur la navigation appliquée. Enfin, nous avons rédigé le livre avec la plus complète indépendance d'opinions; puisque n'étant l'auteur d'aucun

des procédés en discussion, nous avons pu envisager la question avec un complet éclectisme, et puiser partout où se trouvait une bonne idée.

Nous inclinons donc à espérer que notre publication fera accueillir favorablement des marins les *Nouvelles méthodes de navigation*, en entendant par là, non pas exclusivement les procédés mentionnés au commencement de cette préface, mais bien, à un point de vue large et élevé, tout l'ensemble des éclaircissements et des perfectionnements apportés, depuis tantôt vingt ans jusqu'à ce jour, aux solutions des problèmes généraux de la science nautique. — De nombreux inventeurs ont fourni chacun leur part à cet ensemble ; mais il importait d'en faire un *corps de doctrine*, afin de mettre de la coordination dans une foule de questions la plupart publiées isolément, ou même simplement connues par tradition, et qui, s'enchevêtrant plus ou moins les unes dans les autres, laissaient l'esprit fort perplexe sur la meilleure manière de sortir d'un pareil dédale.

On a bien atterri, il est vrai, jusqu'à présent avec le bagage actuel de navigation. Mais il y a « *atterrir* et *atterrir* ». Il n'est plus permis, surtout aux bâtiments à grande vitesse, de mettre en travers la nuit, pour attendre le jour à l'effet de rectifier le point. Ce serait s'exposer à perdre tout le bénéfice d'une traversée rapide, que de gaspiller ainsi dix à douze heures en atermoiements; et, principalement en temps de guerre, un pareil retard pourrait avoir les plus graves conséquences. Par ailleurs, les bâtiments qui franchissent plus de cent lieues par jour, exigent en principe la rectification du point matin et soir; car il suffit de deux jours sombres consécutifs pour obliger à atterrir avec le point observé obtenu à deux ou trois cents lieues des

côtes. — Enfin, on ne saurait invoquer contre les Nouvelles méthodes quelques longueurs de calcul. Ces inconvénients disparaîtront avec une pratique assidue; et au surplus, *que vaut un pareil argument vis-à-vis d'une amélioration notable dans les éléments concernant la position du navire?*

Il ne faut pas se dissimuler, toutefois, que les officiers des montres devront devenir de plus en plus instruits pour manier avec tact, surtout en ce qui concerne les chronomètres, les nouveaux procédés, et ne pas retourner contre eux une arme de précision dont l'usage est certes très-délicat. Mais qui veut la fin, veut les moyens : c'est aux commandants qu'il appartient de faire de bons choix, et de tenir compte plus que jamais d'une spécialité que les autres spécialités, si nombreuses aujourd'hui dans la marine, ne doivent pas faire reléguer au second plan.

Go AHEAD, telle est la devise de l'époque. On ne saurait se soustraire aux conséquences qu'elle entraîne, et qui découlent de l'amélioration incessante des moyens de propulsion. De pair avec cette amélioration doivent marcher les perfectionnements précités dans l'art de naviguer. Ces perfectionnements ne constituent à la vérité que des simplifications plus ou moins complètes de questions fondamentales déjà connues, améliorées d'ailleurs par la prise en considération, maniée avec réserve, des erreurs d'observation. Mais ce ne sont pas des doctrines radicalement nouvelles; du reste il en est ainsi d'ordinaire de tous les perfectionnements. — Au surplus, afin de donner leur entière efficacité aux méthodes que nous préconisons, il convient d'embarquer trois chronomètres au moins. Ce n'est pas quand il s'agit d'assurer la

sûreté de navires dont le prix peut s'élever à plusieurs millions, qu'on doit hésiter sur une dépense de quelques milliers de francs.

Il nous reste à dire que, pour approfondir les questions que nous avions en vue, il nous a fallu avoir recours assez fréquemment à l'analyse. Notre travail s'adresse donc plus particulièrement aux officiers instruits et aux professeurs. En un mot, c'est *un livre d'enseignement supérieur*. La substance peut néanmoins en être lue avec fruit par tous les marins, à la seule condition qu'ils aient présents à l'esprit les principes théoriques de la navigation enseignés jusqu'à présent, et qu'ils laissent de côté divers passages de notre texte. Dans ce dernier but, NOUS AVONS MARQUÉ D'UN ASTÉRISQUE TOUS LES NUMÉROS DONT LA CONNAISSANCE N'EST PAS INDISPENSABLE POUR L'APPLICATION DES NOUVELLES MÉTHODES.

— Après avoir exposé au public le plan de l'ouvrage, il nous reste à exprimer, devant lui, notre gratitude à deux aides dévoués, qui ont concouru au labeur si ingrat de la correction des épreuves : nous voulons parler de MM. Hubac et Perrin.

M. Hubac, officier mécanicien, professeur de machines à vapeur sur le vaisseau École, déjà associé depuis quelques années à nos travaux de mécanique, s'est acquitté d'une tâche qui n'était pas dans sa ligne, avec un succès dénotant une intelligence générale des choses tout à l'honneur de sa sagacité.

M. Perrin, déjà cité plus haut pour sa collaboration à nos types de calcul, et dont le nom reviendra plusieurs fois dans le texte à l'occasion de documents qui lui sont propres, a montré, dans la révision du livre, l'esprit de méthode qui

distingue ses travaux. Nous avons pu ainsi achever d'apprécier les dispositions véritablement supérieures de cet officier pour la *Navigation appliquée;* et nous inclinons à penser qu'il ne tardera pas à se faire un nom dans la science hydrographique.

Adressons enfin nos vifs remercîments à MM. Mas Saint-Guiral, Crevost et Rouyaux, qui ont eu l'obligeance de relire nos épreuves au point de vue de la vérification des formules, et à MM. Darras et Gilbert, qui se sont donné la peine de reviser avec le plus grand soin nos nombreux calculs.

LÉGENDE

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE

DES LETTRES EMPLOYÉES AVEC UNE SIGNIFICATION PERMANENTE DANS LE COURS DE L'OUVRAGE.

(*Nota.* Le lecteur devra avoir sans cesse cette légende présente à l'esprit. On s'y est en général conformé aux notations qui viennent d'être adoptées par la Marine pour les principales expressions nautiques. On y a, d'ailleurs, laissé de côté les lettres ne se rapportant pas à ces expressions, et auxquelles il n'est besoin d'avoir recours qu'exceptionnellement dans le développement des questions ; ces lettres ont été spécifiées aux endroits mêmes où l'on en a fait usage.)

A — angle à l'astre dans le triangle de position.

A,B,C... — désignation des différents chronomètres et de leurs heures.

Æ — ascension droite en général.

$Æ_m$ — ascension droite du soleil moyen.

$Æ_a$ — ascension droite d'un astre quelconque.

a — hauteur apparente du centre de la Lune dans le calcul des distances lunaires.

a' — hauteur vraie. . . . . . . d° . . . . d° . . . .

α — coefficient des circumméridiennes, lequel est égal à la variation de la hauteur de l'astre pendant la minute qui précède, ou qui suit le passage au méridien.

b — hauteur apparente du centre du Soleil ou du second astre dans le calcul des distances lunaires.

b' — hauteur vraie . . . . d° . . . . d° . . . .

D — déclinaison d'un astre, considérée comme POSITIVE ou *négative* suivant qu'elle est de MÊME NOM que la latitude ou de *nom contraire.*

d — demi-diamètre horizontal d'un astre.

d' — demi-diamètre en hauteur.

Δ — distance polaire d'un astre.

Δ_a — distance apparente des centres de la Lune et d'un autre astre.

Δ_v — distance vraie. . . . . d° . . . . d° . . . .

δ — vitesse d'un astre en déclinaison par minute, POSITIVE si elle est dirigée vers le PÔLE ÉLEVÉ, *négative* dans le *cas contraire.*

E — équation du temps.

e — erreur instrumentale.

G — longitude du navire en général, considérée comme POSITIVE si elle est OUEST, et comme *négative* si elle est *Est.*

ΔG — expression générale d'une variation ou d'une erreur sur la longitude.

g — changement en longitude en général, POSITIF s'il est OUEST, *négatif* s'il est *Est.*

g_1 — variation en longitude correspondant à + 1' de variation en latitude dans le mode de calcul Pagel, et dans les calculs de fausse position en général.

γ — vitesse du navire en longitude par minute, POSITIVE si elle est OUEST, *négative* si elle est *Est.*

G_e — longitude estimée du navire.

G_a — longitude géographique d'un astre, se comptant comme G et G_e.

H — hauteur vraie d'un astre en général.

H_i — hauteur instrumentale.

H_o — hauteur observée.

ΔH — expression générale d'une variation ou d'une erreur sur la hauteur.

I — intervalle en temps d'un astre quelconque ; — ou valeur de cet intervalle en degrés.

i — dépression apparente.

L — latitude du navire en général, toujours regardée comme positive.

L_c — latitude croissante.

ΔL, ΔL_e expression générale d'une variation ou d'une erreur sur les latitudes L et L_e.

l changement en latitude, POSITIF s'il est dirigé vers le PÔLE ÉLEVÉ, *négatif* dans le *cas contraire*.

l_1 variation en latitude correspondant à $+1'$ de variation en longitude dans les calculs de fausse position.

λ vitesse du navire en latitude par minute, POSITIVE quand elle est dirigée vers le PÔLE ÉLEVÉ, *négative* dans le *cas contraire*.

L_e latitude estimée du navire.

M désignation du compteur et de ses heures.

$\mathfrak{M}$ nombre de milles courus.

m marche diurne d'un chronomètre en général.

m_A, m_B, m_C,... marche intégrale des chronomètres A, B, C...

N distance zénithale d'un astre en général.

P angle au pôle dans le triangle de position, se comptant de 0^h à 180°, POSITIVEMENT quand il est OUEST, *négativement* quand il est *Est*.

ΔP expression générale d'une variation ou d'une erreur sur l'angle P.

p temps d'un astre en *minutes*, qui s'écoule entre le moment d'une observation circumméridienne et le passage de cet astre au méridien ; — ou parallaxe en hauteur d'un astre.

Π parallaxe horizontale de la Lune pour le lieu de l'observateur.

Π_o parallaxe horizontale équatoriale de la Lune.

$\varpi_1 = -\frac{g_1}{15}$ coefficient Pagel, c'est-à-dire variation en *secondes de temps* de l'heure du bord pour une variation de $+1'$ en latitude, obtenue par le mode de calcul Pagel ; la loi de son signe est donnée au n° 12.

R état absolu d'un chronomètre en général, ramené toujours à être un *Retard ;* — ou réfraction.

R_A, R_B, R_C,... états absolus (*Retards*) des chronomètres A, B, C,...

S demi-somme $\frac{H+L+\Delta}{2}$ des éléments du calcul d'angle horaire.

T heure du lieu en général.

T_m heure temps moyen du lieu.

T_v heure temps vrai du lieu.

T_s heure temps sidéral du lieu.

T_a heure ou angle horaire d'un astre quelconque, compté de 0^h à 24^h sur le méridien du lieu. — On a la relation évidente : $T_a = G_a - G$. D'ailleurs, on devra se rappeler la formule fondamentale bien connue : $T_a + \text{Æ}_a = T_s = T_m + \text{Æ}_m \pm 24^h$, *s'il est nécessaire.*

$T_{p,m}$ heure temps moyen du premier méridien.

$T_{p,v}$ heure temps vrai du premier méridien.

$T_{p,a}$ heure d'un astre quelconque sur le méridien de Paris.

t le temps considéré d'une manière générale.

θ la température considérée d'une manière générale.

V relèvement vrai d'un astre, à partir d'un quelconque des deux pôles.

v angle de route corrigé.

Z azimut d'un astre, se comptant, à partir du pôle élevé, de la même manière que P.

Z_e azimut *estimé* d'un astre, c'est-à-dire azimut du triangle de position correspondant au *zénith estimé*.

NOTA RELATIF AU NUMÉROTAGE DES FORMULES. — Les chiffres *arabes* ont été consacrés aux formules de navigation proprement dite, ainsi qu'à quelques équations de mécanique chronométrique et à la théorie des erreurs d'observation. — Les chiffres *romains* ont été attribués exclusivement à toutes les formules ayant trait à la *régulation* et à l'*usage* des chronomètres. — Par ailleurs, *en règle générale :*

1° Tout chiffre arabe ou romain suivi du mot *bis* indique une formule qui se déduit, par simple modification, de la relation qui porte le chiffre tout seul.

2° Tout chiffre arabe ou romain accompagné d'un ou de plusieurs *primes* indique une formule ou une série de formules, de même nature que la relation qui porte le chiffre sans aucun appendice.

3° Enfin, pour représenter toutes les formules donnant l'expression de la marche des chronomètres, nous avons adopté le chiffre romain I accompagné des divers indices depuis $_0$ jusqu'à $_7$.

LES

NOUVELLES MÉTHODES
DE NAVIGATION

PREMIÈRE PARTIE

PROBLÈME GÉNÉRAL DES DROITES ET DES COURBES DE HAUTEUR ET DU POINT COMPLET A LA MER.

1re PARTIE. — § I. CAS D'UNE SEULE OBSERVATION : POINT DÉTERMINATIF DE LA DROITE DE HAUTEUR.

N° 1. Définition des cercles, droites et courbes de hauteur. Rappel de la relation fondamentale du triangle de position. — Depuis que, grâce aux progrès de la vapeur, la rapidité et la fréquence des atterrissages ont augmenté dans d'importantes proportions, la nécessité s'est fait sentir de se procurer à un moment quelconque des données plus ou moins complètes sur la position astronomique du bâtiment. On s'est dès lors préoccupé d'approfondir tout le parti qu'on peut tirer d'une seule hauteur prise telle quelle au moment considéré, sans s'astreindre à attendre l'instant où, quelques heures plus tard, une seconde observation, méridienne ou non, permet de déterminer, par sa combinaison avec la première, les deux coordonnées géographiques du bâtiment.

Nous sommes donc conduit à étudier, en premier lieu, les indications qu'on peut tirer d'une *seule hauteur*. Nous supposerons jusqu'à nouvel ordre qu'il n'y a pas d'erreur sur les observations. Nous ne nous préoccuperons pas non plus, pour le moment, de l'exactitude de l'heure de Paris fournie par les chronomètres. Cette heure est ce qu'elle est à la mer : il n'y a rien à faire à cela. Il suffira de se rappeler que toute erreur sur sa valeur ne fait que reporter en

longitude, à l'Est ou à l'Ouest, le point considéré de la surface de la Terre. Ce report est égal à l'erreur elle-même. Il se transmet d'ailleurs à toute ligne, courbe ou droite, invariablement reliée au point. Enfin, sur une carte de Mercator, il correspond à une translation perpendiculaire aux méridiens. Nous tiendrons compte de cette remarque au n° 37.

Quand on a pris la hauteur d'un astre, il existe évidemment sur la sphère céleste un petit cercle ayant pour centre la projection du centre de l'astre sur cette sphère, et pour rayon la distance zénithale de cette projection. Ce petit cercle forme un lieu géométrique, sur lequel se trouve rigoureusement le zénith du navire; et il s'appelle ***cercle de hauteur***. Le centre en est parfaitement déterminé; car : 1° sa distance au pôle est égale à la distance polaire de l'astre, laquelle prend, dans les idées du jour, le nom de ***colatitude géographique*** de l'astre; 2° son écart en longitude par rapport au PREMIER MÉRIDIEN, ou ce qu'on est convenu d'appeler la ***longitude géographique*** de l'astre, n'est autre, ***en temps***, que l'heure de l'astre par rapport audit méridien, ou sa différence avec 24^h si elle est $> 12^h$. Cette heure vaut d'ailleurs la somme de l'heure moyenne du premier méridien d'après le chronomètre au moment de l'observation, et de l'***avance*** en ascension droite du Soleil moyen par rapport à l'astre. L'avance en question est, en particulier, égale et de signe contraire à l'équation du temps, quand l'astre observé est le Soleil. En un mot, la longitude géographique du ***Soleil*** est égale à l'heure ***vraie*** sur le premier méridien, ou à sa différence avec 24^h. En se reportant à la légende de la page 1, les relations précédentes donnent lieu aux formules suivantes, qui sont absolument générales, eu égard aux conventions de signes adoptées dans la légende en question pour les valeurs numériques des éléments :

$$G_a \text{ en temps (astre quelconque)} \begin{cases} = (T_{p,m} + Æ_m - Æ_a) < 12^h; \\ \text{ou sinon :} \\ = (T_{p,m} + Æ_m - Æ_a) - 24^h. \end{cases}$$

$$G_a \text{ en temps (Soleil)}\ldots\ldots \begin{cases} = (T_{p,m} - E) = T_{p,v} < 12^h; \\ \text{ou sinon :} \\ = (T_{p,m} - E - 24^h.) = T_{p,v} - 24^h. \end{cases}$$

Sur les cartes marines, le cercle de hauteur se transforme en une courbe transcendante, qui prend le nom de ***courbe de hauteur***.

Toute tangente, ou toute corde sensiblement tangente, menée au cercle de hauteur, sinon par la position même du bâtiment, du moins

par un point qui s'en écarte peu, s'appelle ***droite de hauteur.*** Cette droite est une sorte de relèvement, qui contient plus ou moins exactement ladite position.

— Cela compris, tout le parti qu'on peut tirer d'une ***seule observation*** consiste à en déduire une droite de hauteur, ce qui conduit d'abord à déterminer, à l'aide de données antérieures, sur le cercle de hauteur le point par lequel il convient de mener cette droite ; et que nous appellerons pour ce motif ***point déterminatif*** de la droite de hauteur.

Nous aurons, à chaque instant, dans le cours de la première partie de notre étude, à invoquer la relation fondamentale du triangle de position. Cette relation peut s'écrire sous les deux formes suivantes, où les diverses lettres ont les significations indiquées dans la légende de la page 1 :

(1) $$\sin H = \sin L \sin D + \cos L \cos D \cos P$$

(1 *bis*) $$\sin H = \sin L \sin D + \cos L \cos D \cos (G_a - G).$$

Les formules précédentes sont absolument générales, à la condition expresse que l'on attribue aux valeurs arithmétiques des divers éléments, les signes spécifiés dans la légende.

Par ailleurs, pour ce qui va suivre, le lecteur pourra se reporter indifféremment à l'un ou l'autre des quatre groupes de points représentés sur les parties supérieures et inférieures des *fig.* 1 et 1 *bis*, pages 12 et 14, et qui correspondent aux quatre combinaisons principales susceptibles de se présenter en pratique.

N° 2. Point déterminatif de la droite de hauteur déduit de la latitude estimée. — Dans l'usage courant actuel, on obtient le point déterminatif de la droite de hauteur à l'aide de la latitude estimée. A cet effet, on cherche l'intersection du parallèle $Z_e L$, *fig.* 1 ou 1 *bis*, correspondant à cette latitude avec le cercle de hauteur décrit, sur la sphère céleste, du centre projeté A de l'astre considéré. Cette opération, traduite analytiquement, consiste à faire le calcul bien connu d'angle horaire avec la latitude estimée, et à en déduire la longitude du navire. En d'autres termes, on tire des formules (1) ou (1 *bis*) du numéro précédent, après y avoir remplacé D par $(90° - \Delta)$:

$$\sin \tfrac{1}{2} P = \sin \tfrac{1}{2} (G_a - G) = \pm \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(H + L_e + \Delta) \sin \left[\frac{1}{2}(H + L_e + \Delta) - H\right]}{\cos L_e \sin \Delta}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{\cos S \sin (S - H)}{\cos L_e \sin \Delta}}.$$

On obtient ainsi un point L, qui sera le ***point déterminatif*** de la

droite de hauteur, et par lequel on mènera cette droite de la manière qu'il est expliqué au n° 10 ou au n° 11. Nous remarquerons, en passant, que la présente recherche conduit à deux solutions L et L'. Mais le doute est toujours levé, puisqu'on sait, par le sens dans lequel varie la hauteur, si l'on a observé dans l'Est ou dans l'Ouest, et que d'ailleurs l'estime fournit une valeur approchée de l'élément calculé. — Les TYPES DE CALCUL N°s 4 et 4 *bis* de la fin du texte, renferment implicitement la recherche de *points déterminatifs* déduits de la latitude estimée.

N° 3. Point déterminatif de la droite de hauteur déduit de la longitude estimée. — Au lieu d'avoir recours à la latitude estimée, rien n'empêche d'employer la longitude estimée, et de chercher l'intersection G, *fig.* 1 ou 1 *bis*, du cercle de hauteur avec le méridien Z_eG correspondant. Cette opération, traduite analytiquement, consiste à calculer, au moyen de la longitude estimée, la latitude du navire, connaissant la distance zénithale de l'astre, sa distance polaire et l'angle au pôle, ce dernier angle se déduisant du reste de la combinaison de la longitude estimée du lieu et de la longitude géographique de l'astre. En un mot, le problème revient au calcul de la latitude, connaissant l'heure du bord. Le problème se résout à l'aide de la relation (1) ou (1 *bis*) du n° 1. Cette relation rendue logarithmique donne très-aisément, en y introduisant la longitude estimée :

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{\cos P}{\text{tg}\,D} = \frac{\cos(G_a - G_e)}{\text{tg}\,D}. \tag{2}$$

$$\sin(L + \varphi) = \frac{\sin H \cos\varphi}{\sin D}. \tag{3}$$

En tout état de cause, on obtient ainsi un nouveau point G, qu'on pourra prendre pour *point déterminatif* de la *droite de hauteur*. — Ce procédé, déjà proposé par divers navigateurs, n'a guère été employé jusqu'ici; mais nous verrons dans la suite de la discussion qu'il peut avoir son utilité spéciale. Nous remarquerons, au surplus, que la recherche du point G donne lieu, comme celle du point L, à deux solutions qui correspondent aux deux intersections du cercle de hauteur par le méridien estimé Z_eG. Mais d'ordinaire le doute est levé, parce que, ce genre de calcul devant être réservé pour les observations faites près du méridien, on est en général à même de savoir si l'on a observé l'astre du côté du pôle élevé ou du côté du pôle abaissé, et que, en outre, l'estime fournit une valeur approchée de l'élément calculé.

N° 4. Point déterminatif de la droite de hauteur dé-

duit du procédé Marcq Saint-Hilaire, et dit *point rapproché*. — A côté des deux combinaisons précédentes, il s'en offre tout naturellement une troisième, qui consiste à obtenir le *point déterminatif* de la droite de hauteur, en se servant simultanément de la latitude et de la longitude estimées. C'est ce procédé qui a été proposé par M. Marcq Saint-Hilaire. La question se réduit alors à trouver l'intersection R, *fig*. 1 ou 1 *bis*, du cercle de hauteur avec le *vertical* Z_eA mené par le point estimé Z_e du navire. Cette intersection se nomme *point rapproché*, pour les motifs expliqués au n° 6.

Le procédé Marcq Saint-Hilaire, traduit analytiquement, consiste à calculer d'abord la distance zénithale fictive Z_eA, ou mieux son complément, qu'on appelle *hauteur estimée* H_e, au moyen d'un triangle de position déterminé par la distance polaire de l'astre, la colatitude estimée du navire et l'angle au pôle *estimé*, angle qui résulte lui-même de la combinaison de la longitude géographique de l'astre et de la longitude estimée du navire. Ce calcul n'est autre que celui de la hauteur d'un astre à une heure connue, employé dans la réduction des distances lunaires, quand on a observé ces distances sans prendre de hauteur. On détermine ensuite l'azimut PZ_eA, qui correspond au zénith estimé Z_e; ce qui, soit dit en passant, mène à deux solutions Z_eA et Z_eA', dont la bonne est fixée par la connaissance de la direction dans laquelle on a observé l'astre. Enfin, on cherche les coordonnées géographiques de l'intersection R, en portant à partir de Z_e, dans la direction azimutale de l'astre, une longueur égale à la différence entre la hauteur vraie *réelle* et la hauteur *estimée*.

Première solution. Les formules à employer pour le calcul de H_e et de Z_e se déduisent aisément de la formule fondamentale (1) ou (1 *bis*) du n° 1, en prenant pour inconnue la hauteur estimée H_e, et en se servant de la latitude et de la longitude estimées L_e et G_e. Ceci mène du reste aux mêmes équations que (2) et (3) du numéro précédent, en prenant cette fois pour inconnue $\sin H_e$; et on trouve aisément :

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos P}{\operatorname{tg} D} \quad \text{ou} \quad \frac{\cos(G_a - G_e)}{\operatorname{tg} D};$$

$$\text{(5)} \qquad \sin H_e = \frac{\sin D \sin(L_e + \varphi)}{\cos\varphi}.$$

Puis, en éliminant $\frac{\sin H_e}{\sin D}$ entre (5) et l'équation connue $\sin D = \sin L_e \sin H_e + \cos L_e \cos H_e \cos Z_e$, il vient la relation très-simple :

$$\text{(6)} \qquad \cos Z_e = \operatorname{tg} H_e \operatorname{cotg}(L_e + \varphi).$$

On peut aussi, d'après les valeurs connues de $P = (G_a - G_e)$, de L_e et de D, calculer Z_e avec les tables azimutales de M. Labrosse. Mais ces tables offrent l'inconvénient de faire dépendre l'inconnue de *trois* arguments *simultanés*, ce qui complique les interpolations. Selon nous, le procédé le plus recommandable pour avoir Z_e, est de recourir aux tables de M. Perrin, dont le principe et l'usage sont donnés au n° 13, et où l'on entre successivement avec P et D, puis avec P et L.

Deuxième solution. M. Rouyaux s'est jusqu'ici servi, pour la méthode Marcq, de la résolution immédiate de la formule (1 *bis*) à l'aide d'un *sinus naturel* ou d'un *su-cosinus verse.*

Cette formule, appliquée au triangle de position *estimé*, donne en effet :

$$\sin H_e = \text{nombre corresp}^t \text{ à } [\log \sin L_e + \log \sin D] + \text{nombre corresp}^t \text{ à } [\log \cos L_e + \log \cos D + \log \cos(G_a - G_e)].$$

Si on possède une table de *lignes naturelles*, on obtiendra tout de suite H_e, en entrant dans les tables avec la valeur susindiquée de sin H_e. Mais si on ne dispose que d'une table de *lignes verses*, il faudra se rappeler que l'on a par définition :

$$\sin H_e = \text{su-cos v.}\, H_e - 1.$$

On devra dès lors entrer dans la table avec la valeur précédente augmentée de l'unité (*). — Après avoir calculé H_e comme nous venons de l'expliquer, M. Rouyaux détermine Z_e par les tables de M. Perrin, suivant la manière signalée pour la première solution.

L'emploi précédent d'une solution immédiate fait aussi penser à la possibilité de se servir des TABLES de *logarithmes d'addition et de soustraction* de Gauss. On sait que ces tables donnent toutes calculées des expressions de la forme $\left(1 \pm \frac{A}{B}\right)$. Or, la formule générale (1 *bis*) peut s'écrire :

$$\sin H_e = \sin L_e \sin D \left(1 - \frac{\cos L_e \cos D \cos(G_a - G_e)}{\sin L_e \sin D}\right);$$

(*) Remarquons, en passant, que l'usage des lignes *naturelles* est en général plus simple et plus logique que celui des lignes *verses*. On peut être étonné que la plupart des auteurs de tables aient *exclusivement* donné ces dernières lignes ; car, en examinant attentivement les formules de navigation qui les renferment, et dont lesdits auteurs ont eu en vue le calcul, on reconnaît que le plus souvent ces formules seraient au moins aussi simples en étant tout bonnement exprimées en lignes *naturelles*. Aussi, dans ces derniers temps, y a-t-il eu une réaction contre cette manière de faire, surtout à l'étranger, où plusieurs tables de navigation renferment aujourd'hui les lignes *naturelles*. Il importe toutefois d'ajouter que ce qui a inspiré l'usage des *lignes verses*, c'est que ces lignes sont toujours *positives*, ce qui évite les erreurs de signe dans les calculs.

soit :

$$\sin H_e = \pm B \left(1 \pm \frac{A}{B}\right),$$

les doubles signes $\pm$ étant destinés à tenir compte des valeurs algébriques des deux groupes de facteurs du second membre de la formule ci-dessus.

Mais les tables en question étant à double entrée, leur usage n'est pas en somme assez commode pour être recommandé.

Troisième solution. Pour les grandes hauteurs, il vaut mieux substituer une tangente au sinus pour calculer H_e. Sans cela, surtout en se bornant à un petit nombre de décimales pour les logarithmes, on est exposé, eu égard aux très-faibles variations du sinus aux environs de 90°, à avoir une valeur assez erronée de la hauteur estimée pour de faibles erreurs sur D et P. De son côté, l'azimut se calcule très-mal par un cosinus, dès qu'il approche de 0° ou de 180°. Pour ce double motif, il semble préférable de substituer, en principe, aux formules précédentes des relations en tg H_e et tg Z_e, qui sont alors propres à tous les cas. — Pour obtenir ces relations, on part de l'équation connue :

$$\operatorname{tg} D \cos L_e = \operatorname{cotg} Z_e \sin (G_a - G_e) + \sin L_e \cos (G_a - G_e).$$

D'où l'on tire aisément :

(4, déjà donnée) $$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos (G_a - G_e)}{\operatorname{tg} D},$$

(7) $$\operatorname{tg} Z_e = \frac{\operatorname{tg} (G_a - G_e) \sin \varphi}{\cos (L_e + \varphi)}.$$

Puis, en éliminant cotg $(G_a - G_e)$ tg Z_e entre (7) et l'équation également connue :

$$\operatorname{tg} H_e \cos L_e = \operatorname{cotg} (G_e - G_a) \sin Z_e + \sin L_e \cos Z_e = [\operatorname{cotg} (G_e - G_a) \operatorname{tg} Z_e + \sin L_e] \cos Z_e,$$

il vient :

(8) $$\operatorname{tg} H_e = \operatorname{tg} (L_e + \varphi) \cos Z_e.$$

Cette dernière équation se confond avec la formule (6) obtenue plus haut par une autre série de transformations.

Toutefois, ce nouveau groupe de formules n'est pas sans avoir ses inconvénients spéciaux. Ainsi l'élément le plus important H_e dépend ici de Z_e, qui se déterminant présentement en premier, est susceptible d'être entaché des erreurs provenant du premier calcul. D'ailleurs l'emploi de la tangente ne devient indispensable que pour les hauteurs supérieures à 78° ou 80°, alors qu'une variation de 2 ou

3 unités du cinquième ordre sur $\log \sin H_e$ produit une erreur de 1′ sur la hauteur ainsi calculée.

Dans tous les cas, les diverses relations précédentes sont absolument générales, pourvu qu'on attribue aux valeurs numériques des divers éléments, des signes conformes aux conventions de la légende page 1.

Cas particulier. Aux environs du méridien, le calcul de H_e se simplifie singulièrement. Il suffit, en effet, de déduire de la combinaison de L_e et de D, une hauteur méridienne *estimée*, et d'appliquer à cette hauteur la correction bien connue αp^2 (n° 20) des circumméridiennes, mais en sens contraire du sens habituel, p étant d'ailleurs ici égal à $(G_a - G_e)$ converti en minutes de temps. On obtient de la sorte une hauteur circumméridienne *estimée*, qui n'est autre que H_e. De son côté, le calcul de Z_e se simplifie aussi; car on a $\frac{\sin Z_e}{\sin(G_a - G_e)} = \frac{\cos D}{\cos H}$; ce qui donne, eu égard à la petitesse de Z_e et de $(G_a - G_e)$:

$$Z_e = (G_a - G_e)\frac{\cos D}{\cos H},$$

expression qui se calcule par la *table de point*.

Fin du calcul. Une fois H_e et Z_e connus par l'une ou l'autre des solutions précédentes, on prend la différence Z_eR, regardée sensiblement comme un arc de loxodromie, entre la hauteur *estimée* $H_e = (90° - Z_eA)$ et la hauteur vraie *réelle* $H = (90° - RA)$. Avec cette différence et l'azimut estimé, on détermine aisément, par un simple calcul d'estime, le point R du cercle de hauteur qui doit servir, dans le procédé qui nous occupe, de *point déterminatif* de la *droite de hauteur*.

Dans le calcul d'estime dont il s'agit, on prend, pour simplifier, la latitude L_e comme latitude moyenne. Il en résulte une erreur d'un très-petit du deuxième ordre (n° 7), qui s'ajoute algébriquement avec celle du même ordre résultant du remplacement de l'arc de grand cercle Z_eR par un arc de loxodromie. L'erreur totale qui affecte ainsi la position du point R est donc en principe négligeable. D'autant que, d'après le n° 8, on peut même en général, pour mener une droite de hauteur, substituer au point déterminatif choisi un autre point du cercle de hauteur distant du premier d'un très-petit du premier ordre.

Il reste à noter qu'avec le procédé qui nous occupe, l'heure du bord qu'on peut avoir besoin de connaître pour le service courant,

s'obtient en combinant l'heure du premier méridien donnée par le chronomètre avec la longitude de l'intersection R.

Types de calcul. — On trouvera à la fin du texte un exemple de la recherche du *point déterminatif* d'une droite de hauteur d'après le procédé Marcq, traité par les trois solutions générales ci-dessus, sous la rubrique TYPE DE CALCUL N° 1, N° 1 *bis*, N° 1 *ter*.

— A propos de ces types, on est conduit à se demander s'il n'y aurait pas moyen d'adapter le calcul d'angle horaire au procédé Marcq, ce qui ferait tomber les seules préventions sérieuses (n° 9) qui existent à son sujet. Il semble, en effet, qu'on pourrait déduire la hauteur estimée de la hauteur réelle, en faisant un calcul d'angle horaire avec la dernière de ces hauteurs. En comparant alors l'angle P ainsi obtenu avec l'angle au pôle *estimé* $(G_a - G_e)$, on obtiendrait une variation ΔP qui correspondrait à la différence inconnue ΔH entre la hauteur réelle et la hauteur estimée. On calculerait ensuite la variation Π_1 dudit angle P, pour un *accroissement* de 1′ sur la hauteur vraie. On procéderait d'ailleurs d'une manière analogue au mode Pagel (n° 13) pour la détermination de Π_1. On poserait alors :

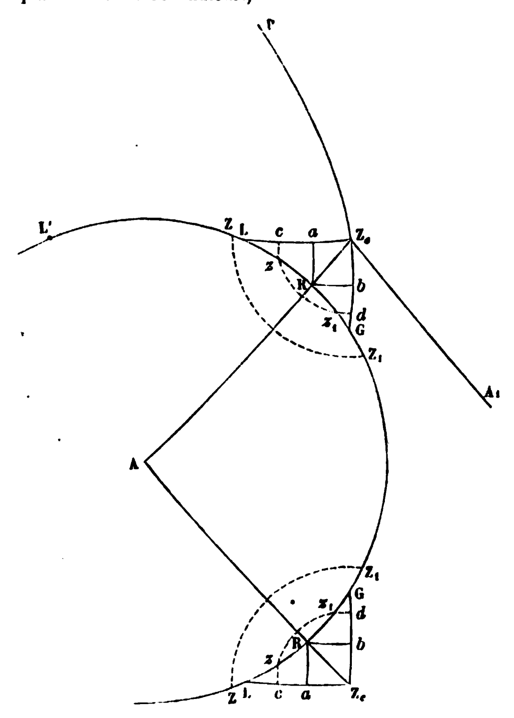
$$\frac{\Delta H}{1'} = \frac{\Delta P}{\Pi_1}.$$

Malheureusement cette proportion, qui rentre en définitive dans la détermination par *voie indirecte* de certains coefficients (n° 15), n'est qu'approchée. En suivant une marche semblable à celle du n° 44, dans la discussion de la validité de la proportion fondamentale de la méthode Lalande-Pagel, on trouve : 1° que l'erreur relative est ici bien plus forte, et atteint environ 1/10 pour $H < 60°$, $L < 60°$ N^d ou S^d, $Z > 30°$, $\Delta H = 10'$; 2° qu'elle est au surplus à peu près proportionnelle à ΔH. — L'approximation ne serait donc pas généralement suffisante. En outre, la proportionnalité cesse complétement d'exister aux environs du méridien.

N° 5. Discussion de la valeur respective des trois points déterminatifs de la droite de hauteur; point avantageux. — En résumant ce qui précède, on se trouve définitivement en présence de trois points L, G et R, *fig.* 1 ou 1 *bis*, *déterminatifs* de la droite de hauteur. Et même en considérant les choses analytiquement, on trouve (n° 16) qu'il existe rationnellement un quatrième point déterminatif. Mais comme la recherche y relative ne se présente pas sous une forme simple, nous nous bornerons à mentionner l'existence de ce point, sans nous occuper d'en faire

usage. Au surplus, en regardant les choses de haut, on peut, d'après le n° 8, établir en principe qu'il y a une infinité de points déterminatifs, eu égard à ce que chacun des quatre points *rationnels* dont nous venons de parler, est en général susceptible d'être remplacé par un autre point du cercle de hauteur, qui en soit distant d'un très-petit du premier ordre.

Fig. 1, relative à la comparaison des divers points déterminatifs d'une droite de hauteur. (Toute la partie considérée de la sphère est ici projetée orthogonalement sur le plan du cercle de hauteur.)



Mais pour fixer les idées d'une manière pratique, il faut se borner à considérer les trois points L, G et R. Nous distinguerons ces trois points par les désignations de *point déterminatif par latitude* L, *point déterminatif par longitude* G, *point déterminatif par procédé Marcq* ou *point rapproché* R.

Maintenant, quel est celui de ces points auquel il faut donner la préférence; en d'autres termes, quel est celui qu'il convient de prendre pour ce que nous appellerons le *point déterminatif avantageux?* C'est là que gît en particulier la discussion que nous nous sommes proposé d'éclaircir.

Il importe dès l'abord d'aller au-devant d'une objection qui a été souvent soulevée, à savoir : que les observations du ou des jours précédents ne donnent, eu égard aux erreurs possibles d'observation, qu'un polygone de certitude (n° 41) au lieu d'un point unique. On aurait dès lors à se servir pour le moment de l'observation considérée, d'un polygone de certitude *estimé*, et non d'un point unique *estimé*. Mais il suffit de répondre à cette objection que le polygone de la veille renferme un point *le plus probable* (voir, pour la définition ma-

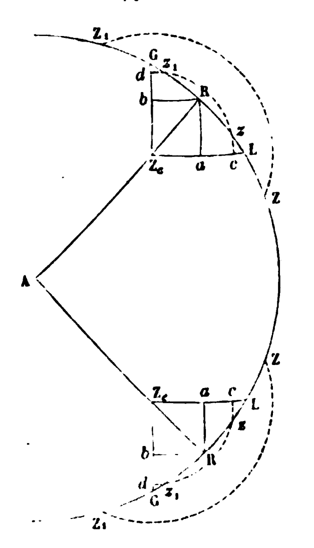
thématique de ce mot, le n° 122), et que c'est avec ce point qu'on fait le calcul d'estime. On obtient de la sorte la position estimée Z_e la plus probable; et par suite l'intersection L, G ou R obtenue avec cette position sera la plus probable par rapport aux intersections de même espèce correspondant aux divers points du polygone *estimé*.

Des trois procédés dont nous venons de parler, celui qui emploie l'angle horaire est le plus court, surtout lorsqu'on se sert des tables auxiliaires dressées exprès pour faciliter son effectuation. Mais au fond les différences de longueur d'opération sont peu de chose; et d'ailleurs on doit surtout se préoccuper de l'*exactitude* du lieu géométrique à se procurer. Il faut dès lors choisir pour *point avantageux* l'intersection qui se trouve la plus voisine de la position réelle du navire, ou, en cas de renseignements insuffisants à ce sujet, celle qui n'expose pas à la possibilité d'un écart considérable par rapport à ladite position. Or cette position se trouve manifestement à la rencontre du cercle de hauteur par un deuxième cercle décrit du point Z_e, *fig.* 1 ou 1 *bis*, comme centre avec un rayon égal à l'erreur totale de l'estime. Ce rayon est, il est vrai, complétement inconnu. Mais, pour la discussion qui nous occupe, cela importe peu; car il suffit, sans se préoccuper aucunement des distances, de savoir que le cercle d'erreur est susceptible de couper le cercle de hauteur soit en Z et Z_1, avec les deux points de sécance en dehors du point L (ou G), par rapport au point R, soit en z et z_1 avec l'un des points de sécance compris entre L (ou G) et R.

Cela entendu, admettons premièrement qu'on n'ait aucune donnée sur les courants ni sur les erreurs de la dérive et du loch depuis les observations du ou des jours précédents, autrement dit qu'on ne possède aucune indication sur les erreurs probables de l'estime. Le problème est trop indéterminé pour qu'il y ait moyen de fixer par la théorie des probabilités, le nombre de chances qu'a le point R pour être plus voisin ou également voisin de la position réelle du navire que le point L (ou G). Au surplus, la considération de ces *chances* ne serait que secondaire. Il faut surtout remarquer qu'avec le point R, on n'est jamais exposé à avoir, par rapport à la position réelle du navire, un écart plus grand que la moitié de la distance ZZ_1, ou zz_1, entre les deux places possibles de cette position sur le cercle de hauteur. Avec chacun des points L et G, au contraire, il peut arriver que l'écart atteigne cette distance. Bien plus, lorsque les deux sécances, telles que z et z_1 du cercle d'erreur tombent d'un même côté par rapport au point L (ou G), d'abord l'écart surpasse la distance en question,

si c'est la plus éloignée des sécances qui représente la position réelle du navire. Mais en outre, dans un cas comme dans l'autre, l'écart est susceptible de prendre une valeur relativement considérable, dès qu'on a observé loin des circonstances favorables (nos 34 et 35) concernant le procédé générateur de l'intersection considérée L ou G.— Cette dernière considération est capitale pour poser en principe qu'en l'absence de tout renseignement sur les erreurs probables de l'estime, l'intersection R est seule acceptable comme *point déterminatif avantageux*, surtout lorsque la hauteur a été prise à un moment quelconque. — Si l'on avait été à même d'observer dans le premier vertical, ou tout à fait aux environs, il vaudrait mieux (n° 17), eu égard aux circonstances particulières où l'on se trouverait alors, prendre l'intersection L, et adopter pour alignement du navire le méridien passant par ce point. Toutefois, en y réfléchissant, on voit que le point R se confondrait très-sensiblement ici avec l'intersection L, et la droite de hauteur avec ledit alignement. La généralité de l'emploi du point R ne se trouve donc pas altérée de ce chef; seulement, avec cet emploi dans le présent cas, le calcul serait un peu plus long. — Une remarque analogue est applicable au cas où, ayant observé aux environs du méridien, on serait conduit, eu égard à cette circonstance particulière, à se servir de l'intersection G.

Fig. 1 bis.—Même rubrique que pour la *fig.* 1. Mais le zénith estimé Z_e est ici en dedans du cercle de hauteur, au lieu d'être en dehors, comme en *fig.* 1.



— Supposons, en second lieu, qu'on possède quelques renseignements sur les erreurs probables de l'estime. En cette conjoncture, on parvient encore avec une extrême simplicité aux conclusions que voici:

1° Si, grâce surtout aux moyens dont on dispose aujourd'hui pour avoir de bonnes observations méridiennes de nuit, et dont M. Fleuriais a été un des plus intelligents propagateurs, on est sûr d'avoir à sa disposition, pour l'introduire dans le calcul du *point déterminatif*, une latitude à peu près exacte, l'intersection L, *fig.* 1 ou 1 *bis*, sera manifestement le point le plus voisin.

2° Remarquons que si on connaissait la direction des erreurs combinées de l'estime et des courants, et qu'on menât par le point

Z_e un arc de loxodromie suivant cette direction, la rencontre de cet arc avec le cercle de hauteur donnerait la position *exacte* du navire. Cela dit, si les courants combinés avec les erreurs de la dérive et du loch ont porté à la fois en latitude et *surtout* en longitude dans le sens de R vers L, l'intersection L sera le point le plus voisin. (Il importe, pour bien comprendre ce détail, de faire mouvoir, sur la figure, le point Z_e, successivement en latitude, puis en longitude, suivant l'indication donnée.) — Si les mêmes causes ont porté en latitude dans le sens de L vers R, en même temps qu'elles portaient *surtout* en longitude en sens opposé, l'intersection L demeurera encore le point le plus *voisin*, tant que l'erreur en latitude zc sera plus petite qu'environ la moitié de la quantité Ra, qui représente l'écart en latitude des deux points R et L.

3° Si on a été porté à la fois en longitude et *surtout* en latitude dans le sens de R vers G, l'intersection G sera le point le plus voisin. — Si on a été porté en longitude dans le sens de G vers R, en même temps qu'on était *surtout* porté en latitude en sens opposé, l'intersection G demeurera encore le point le plus voisin, tant que l'erreur en longitude $z_1\,d$, exprimée en milles majeurs, sera moindre qu'environ la moitié de la quantité Rb, qui représente l'écart en longitude des deux points R et G.

4° Dans tout autre cas, l'intersection R obtenue par le procédé Marcq, soit le POINT RAPPROCHÉ, sera l'intersection la plus voisine, et devra, dès lors, être choisie comme *point déterminatif avantageux*. — Il conviendra encore de faire le même choix toutes les fois que, avec les renseignements qu'on est à même de posséder sur les courants et sur les erreurs de la dérive et du loch, on commencera, à l'instar de beaucoup de capitaines, par corriger, tant bien que mal, l'estime de ces perturbations, et qu'on basera la recherche du *point avantageux* sur le point estimé *combiné* qui résulte de ce mode d'opérer.

N° 6. Propriétés spéciales au point déterminatif de la droite de hauteur déduit du procédé Marcq. — Aux considérations précédentes, il vient s'en ajouter d'autres non moins importantes en faveur de l'*intersection Marcq* R : nous voulons parler d'une série de propriétés propres à cette intersection, et dont voici l'exposé.

1. L'intersection R, *fig.* 1 ou 1 *bis*, fournit une position, en principe, *plus près du point réel que l'estime*, puisque les quantités de l'espèce RZ sont évidemment plus petites que les quantités de l'espèce Z_eZ. Il ne peut se présenter d'exception à cette règle que, quand le rayon du

cercle de hauteur est très-petit, ou que, quand le zénith ***estimé*** se trouvant ***en dedans***, ***fig.* 1 *bis***, du cercle de hauteur, la position réelle du navire sur ce même cercle tombe ***en dehors*** des intersections de celui-ci avec le grand cercle élevé perpendiculairement au milieu de $Z_e R$. — Par ailleurs, lorsque, ayant à sa disposition un deuxième cercle de hauteur, on part (n° 42) du point R pour trouver le point de même espèce propre à ce deuxième cercle, la nouvelle intersection est encore plus ***rapprochée*** du point réel, et ainsi de suite. C'est à cette propriété qu'est dû le nom spécial de POINT RAPPROCHÉ, que nous avons adopté dans les numéros précédents.

II. Avec le procédé Marcq, il n'y a pas à se préoccuper des circonstances favorables au tracé de la droite de hauteur, relatives à l'hypothèse d'une erreur sur la hauteur; car tous les moments s'équivalent alors pour observer (n° 34).

III. L'erreur qui résulte pour l'intersection cherchée d'une erreur sur la hauteur, est toujours moindre pour l'intersection R que pour l'intersection L ou G; autrement dit RR_1, *fig.* 7, est moindre que LL_1 et GG_1 (n° 34). Sans compter que chacune des erreurs LL_1 et GG_1 peut devenir considérable au moment des circonstances défavorables au procédé générateur du point L ou G.

IV. Le procédé Marcq fournit toujours une intersection, tandis que dans les deux autres méthodes, aux environs des circonstances défavorables, le point d'intersection L ou G peut ne pas exister, ce qui se traduit par un calcul où le résultat est une imaginaire trigonométrique (n° 35). En outre, avec l'usage de sécantes (n° 11) pour droites de hauteur, lesdites intersections L et G exposent (n° 36) à une nouvelle défaillance due à cet usage même.

N° 7. Conventions sur les divers ordres de petitesse des distances à considérer. Remarque sur la validité des développements employés. — Nous n'avons fait jusqu'à présent aucune hypothèse sur les ordres de grandeur respectifs des distances de l'espèce $Z_e Z$, $Z_e R$, $Z_e L$, RZ, LZ,..., ***fig.* 1** ou **1 *bis***, que nous avons considérées. On se trouve ici en présence d'une situation analogue à celles qui se rencontrent à chaque pas en astronomie, où il s'agit de quantités très-petites, qu'on évalue les unes en fonction des autres, en s'arrêtant, dans les développements en série, aux termes soit du premier ordre, soit du second ordre, etc. Mais là on n'établit aucun rapport précis de grandeur entre les termes d'ordres consécutifs; car la nécessité ne s'en fait pas sentir.

Dans le problème actuel, au contraire, il est indispensable de

sortir de cette réserve, pour ne laisser dans l'ombre aucun point de la discussion. Suivant cet ordre d'idées, il faut convenir d'appeler quantité *très-petite* du premier ordre (*) toute longueur qui, exprimée en fonction du rayon de la sphère, est MOINDRE qu'une fraction limite déterminée $\frac{1}{n}$. Dès lors, le *carré d'un très-petit* du premier ordre deviendra *un très-petit* du second ordre. Il en sera de même du produit de deux très petits du premier ordre, etc.

Naturellement une série de *quantités très-petites* seront du même ordre, de l'ordre p, par exemple, lorsqu'elles se trouveront comprises entre $\frac{1}{n^p}$ exclusivement et $\frac{1}{n^{p+1}}$ inclusivement. Enfin, les quantités supérieures à la limite maximum des très-petits du premier ordre formeront la catégorie des *quantités finies*.

Ceci posé, dans la question que nous avons à étudier nous fixerons le degré d'approximation en prévenant que l'on négligera ou non les très-petits du second ordre, après avoir bien spécifié d'ailleurs, dans chaque cas à traiter, la limite $\frac{1}{n^2}$, et par suite celle $\frac{1}{n}$, caractéristiques des très-petits du second et du premier ordre.

Dès lors, si l'on néglige, par exemple, les très-petits du second ordre, les arcs de cercle faisant partie des distances à comparer se réduiront à leurs cordes, lorsque ces distances seront des très-petits du premier ordre, et autant toutefois que le rayon du cercle considéré ne se réduira pas à un très-petit du premier ordre, ce qui est exceptionnel. — Par ailleurs, dans les développements en série, en fonction les unes des autres, des variations que ces distances représentent par rapport aux *éléments*, hauteur, latitude, etc., les termes du second ordre ne seront négligeables qu'autant qu'ils formeront des très-petits du deuxième ordre. Cette dernière remarque provient de ce que, dans notre ordre d'idées, un terme du n^e ordre dans un développement n'est pas toujours nécessairement égal à un *très-petit* du même ordre, bien qu'il le soit en général.

Pour ne laisser dans l'esprit du lecteur aucun doute sur les conventions précédentes, nous allons les préciser par un exemple nu-

(*) Il ne faut pas confondre ces *très-petits* avec les *infiniment petits* de l'analyse infinitésimale. Ceux-ci, en effet, doivent avoir le double caractère d'être variables et de tendre vers zéro; tandis que les très-petits que nous considérons sont respectivement fixes de grandeur, et doivent être inférieurs à des quantités données $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, etc.

mérique. Admettons qu'on regarde 1/2 *mille* comme la limite supérieure des très-petits *du second ordre.* La valeur de cette limite en fonction du rayon sera évidemment : $\frac{2\pi \times 1/2}{360 \times 60}$. Dès lors, la limite supérieure des très-petits du premier ordre en fonction du rayon sera $\sqrt{\frac{2\pi \times 1/2}{360 \times 60}}$, et en *milles :*

$$\sqrt{\frac{2\pi \times 1/2}{360 \times 60}} \times \frac{360 \times 60}{2\pi} = \sqrt{\frac{360 \times 60 \times 1/2}{2\pi}} = 41 \textit{ milles} \text{ en nombre rond.}$$

Toute longueur *au-dessus* de ce dernier chiffre sera une *quantité finie.*

—A propos de l'ordre d'idées que nous venons de développer, nous ferons une remarque importante sur la validité des développements que nous aurons fréquemment à employer dans la suite. Ces développements dérivent tous du théorème de Taylor, et se rapportent à des équations de la forme $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$, de telle sorte que leur type général peut s'écrire :

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{\Delta x^2}{1.2} + \dots$$
$$= f'(x)\Delta x + f''(x)\frac{\Delta x^2}{1.2} + \dots$$

Or, quel que soit le nombre n de termes que l'on prenne, et qui ne va guère en navigation au delà de deux qu'exceptionnellement, on sait que, pour avoir la valeur exacte de Δy, il faut ajouter après le n^e terme, un *reste complémentaire* qui peut s'exprimer de différentes façons, mais dont la forme la plus pratique est la suivante, due à M. Liouville :

$$\frac{(\Delta x)^n}{1.2.3\dots n}\,[f^n(x + \theta \times \Delta x) - f^n x],$$

θ étant un nombre positif moindre que l'unité, mais par ailleurs de valeur inconnue.

De leur côté, les coefficients des termes employés doivent être des fonctions continues de x pour les valeurs de cette variable comprises entre la valeur particulière considérée, et cette valeur augmentée de Δx.

Cela dit, on devrait, en principe, avant de se permettre de regarder comme valeur suffisamment exacte de Δy un nombre déterminé des termes du développement général, s'assurer : 1° si les coefficients de ces termes satisfont à la dernière condition ci-dessus; 2° si le reste qu'il convient de considérer, eu égard au dernier terme

conservé, est bien de l'ordre de petitesse représentant l'approximation adoptée, et, par suite, d'un ordre de petitesse inférieur à celui de ce dernier terme. Mais *en fait* on ne se livre jamais à cette investigation; car on suppose toujours que Δx est un très-petit du premier ordre; et alors, du moment que la valeur considérée de la variable indépendante x ne se trouve pas aux environs des valeurs exceptionnelles susceptibles de rendre infinis les coefficients des termes employés, les conditions voulues sont satisfaites.

D'ordinaire, on envisage les choses un peu différemment; on se contente de savoir que, pour Δx très-petit, le développement ci-dessus forme toujours une série convergente, tant que la valeur considérée de la variable x se trouve différente des limites que nous venons de mentionner. Dès lors, en s'arrêtant au terme du second ordre, par exemple, il est aisé de voir, en remplaçant la suite des termes négligés par une progression géométrique moins convergente, qu'en principe la somme desdits termes est moindre qu'un terme de cet ordre. Mais notre explication est plus correcte et plus en harmonie avec nos définitions de très-petits de divers ordres. D'ailleurs, pour que le développement général ci-dessus en Δx représente Δy, il ne suffit pas d'établir sa convergence; il faut en outre démontrer que l'expression générale du *reste complémentaire* précité tend vers zéro, à mesure que le nombre des termes de la série tend vers l'infini.

Il nous reste encore à faire observer que les divers coefficients différentiels, tels que $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, renferment souvent, outre la variable indépendante x, des quantités qui sont fonction implicite de celle-ci; et alors on doit bien comprendre que toute valeur de ces quantités correspond en définitive à une valeur spéciale de x. Considérons, par exemple, le premier élément du développement (16 *bis*) du n° 25 de ΔP en fonction de ΔL. Ce terme est $\frac{\cot g Z}{\cos L}\Delta L$. Or il faut bien s'imaginer que Z est une fonction de la latitude L, qui, pour une même valeur de la hauteur et de la déclinaison, regardées ici comme variables indépendantes de la latitude, relève entièrement de celle-ci. Entre autres, si $Z = 0°$ ou $180°$, cela prouve que pour la hauteur et la déclinaison considérées, l'astre ne peut se trouver que dans le méridien, eu égard à la valeur déterminée de la latitude.

Il nous a paru indispensable d'insister sur les divers éclaircissements qui précèdent; car on ne les trouve exprimés dans aucun ouvrage. Or cette lacune contribue à laisser dans l'esprit de bien des

gens, une obscurité plus ou moins complète sur le véritable sens des développements si fréquemment employés dans les sciences appliquées, particulièrement en navigation, et dont on se sert machinalement sans en apprécier la portée. Cependant rien n'est tel dans toute question que d'être nettement édifié sur l'esprit et la signification des choses, ainsi que sur les limites du parti qu'il est véritablement licite d'en tirer.

N° 8. Sur l'ordre de petitesse des distances entre les trois points déterminatifs de la droite de hauteur. — Revenons maintenant à la discussion concernant la valeur relative des *trois points déterminatifs* de la droite de hauteur.

Pour que cette droite puisse être acceptée, à un très-petit près du deuxième ordre (n° 7), comme convenant au relèvement du navire, il faut et il suffit évidemment que la position réelle de celui-ci ne soit éloignée du point déterminatif de ladite droite que d'un très-petit du premier ordre, sauf toutefois le cas où le rayon du cercle de hauteur est réduit à un très-petit de cet ordre, ainsi que cela a lieu avec de faibles distances zénithales.

Si, *à priori*, et sans bien peser la chose, on regarde ces diverses quantités comme valant simultanément chacune un très-petit du premier ordre, on est porté à admettre que les droites de hauteur menées par les trois intersections R, L et G, *fig.* 1 ou 1 *bis*, font entre elles des angles de *contingence*, c'est-à-dire des angles qui, évalués en arcs de la circonférence de rayon 1, sont des quantités *très-petites du premier ordre*, abstraction faite du cas susmentionné où le rayon du cercle de hauteur est réduit lui-même à une pareille quantité. Dans l'hypothèse en question, les trois droites de hauteur qui nous occupent se fusionneraient en une même direction, aux très-petits près du second ordre pour les écarts entre des points situés sur lesdites droites à des distances du premier ordre des intersections susmentionnées. Dès lors, les trois intersections R, L et G, s'équivaudraient comme point déterminatif de la droite de hauteur; et la préférence demeurerait acquise à celle de ces intersections qui dépend du calcul le plus usuel, c'est-à-dire à l'intersection L, qui repose sur le calcul d'angle horaire.

Cette objection spécieuse n'a pas manqué d'être soulevée par les adversaires du procédé Marcq. Mais rien ne dit que les distances des points R et L (ou G) à la véritable position du navire puissent être toujours *simultanément* des très-petits du même ordre. Et effectivement, chacune des intersections L ou G peut (n° 35), aux environs

des circonstances défavorables concernant son procédé générateur, être écartée de la position réelle du navire d'une quantité très-grande comparée à l'écart propre du point R. Par suite, il faut conclure que les trois droites de hauteur relatives aux trois intersections R, L et G, doivent, en principe, être regardées comme ayant trois directions distinctes; et le choix du *point déterminatif avantageux* conserve toute son importance.—On peut dire seulement que l'intersection L (ou G) donnera sensiblement la même droite de hauteur que le point R, chaque fois qu'on se trouvera suffisamment éloigné des circonstances défavorables concernant le procédé générateur de ladite intersection L (ou G). Cela rentre au fond dans la recherche (n° 44) de l'ensemble des cas où il y a possibilité, aux très-petits près du second ordre, de regarder la variation en longitude comme proportionnelle à la variation en latitude (ou *vice versâ*), la hauteur de l'astre demeurant constante.

N° 9. Conclusion en faveur du procédé Marcq pour la recherche usuelle du point déterminatif de la droite de hauteur. — En mûrissant la longue discussion que nous venons de développer, tout esprit non prévenu ne saurait s'empêcher de conclure qu'en règle générale c'est avec le procédé Marcq, générateur de l'intersection R, qu'il faudra obtenir le *point déterminatif* de la droite de hauteur. Ce n'est qu'exceptionnellement que les intersections L et G seront plus avantageuses, et d'ailleurs dans le seul cas où l'on aura des données sur les erreurs probables de l'estime, et où l'on préférera, en outre, ne pas faire entrer en ligne de compte, dès le début du calcul, ces données pour en déduire un point estimé *combiné* (n° 5). Encore, en pareil cas, serait-on obligé, pour fixer son choix, de calculer les trois intersections R, L et G, lorsque lesdites données indiqueront que la position réelle du navire tombe entre R et L (ou G). Maintenant ira-t-on à la mer se livrer à un tel labeur? Il y a des circonstances graves où, eu égard à la nécessité de s'éclairer le plus possible sur la position du navire, on ne reculera pas devant ce travail; mais ce sera certainement l'exception.

En résumé, le procédé Marcq semble appelé à prendre le pas sur toute autre méthode, comme *calcul usuel*, pour la détermination d'une droite de hauteur.

Mais il ne faut pas se faire illusion sur les difficultés de la lutte contre l'emploi aujourd'hui exclusif de l'intersection L déterminée avec la latitude estimée; car cette détermination est basée sur l'antique calcul

d'angle horaire, qui a pour lui les traditions et l'existence de tables spéciales destinées à faciliter son opération. Cette prévision se trouve encore confirmée si on considère la possibilité que l'on a actuellement de prendre dans de bonnes conditions, pendant la nuit, ou mieux à l'un des deux crépuscules, plusieurs hauteurs méridiennes d'étoiles, auquel cas l'intersection L se trouve non-seulement le point déterminatif *avantageux*, mais même sensiblement le point *réel* lui-même. Cette dernière considération prouve que l'usage de l'intersection L devra être conservé précieusement à côté du procédé Marcq, dans le cas où ce procédé deviendrait la méthode courante pour la détermination de la droite de hauteur. Il demeure bien entendu aussi qu'à la mer, loin des côtes, alors qu'on pourra attendre midi pour fixer sa position, la hauteur prise le matin dans d'aussi bonnes conditions que possible, continuera à être réservée jusqu'à cette heure, pour être introduite dans le calcul habituel de longitude fait avec la latitude méridienne. —Mais si, pour une raison ou pour une autre, on veut utiliser incontinent la hauteur observée, il faut en principe revenir au procédé Marcq, eu égard, nous ne saurions trop le répéter, à la nécessité de se mettre toujours à l'abri de l'erreur considérable sur le *point déterminatif* de la droite de hauteur, qu'est susceptible de donner, dans certains cas, le procédé par la latitude estimée. Il ne conviendrait pas d'invoquer, comme circonstance atténuante, en faveur de ce dernier procédé, son extrême rapidité d'effectuation; car cet avantage, si grand qu'il soit à la mer, ne saurait primer l'énorme danger d'une erreur grave sur une droite de hauteur, surtout quand elle représente le lieu géométrique unique dont on puisse disposer. Au surplus, si le procédé Marcq se généralise, il ne manquera pas de se publier des tables pour abréger son opération.

On ne saurait non plus exciper, contre ce procédé, des erreurs de calcul auxquelles il peut exposer, eu égard au peu d'habitude des navigateurs de son effectuation. D'abord s'il se répand, cette habitude se prendra. En second lieu, on ne doit pas hésiter dans les atterrissages à faire exécuter les mêmes calculs, même pour les opérations les plus usuelles, par plusieurs personnes à la fois, de façon à prévenir toute erreur.

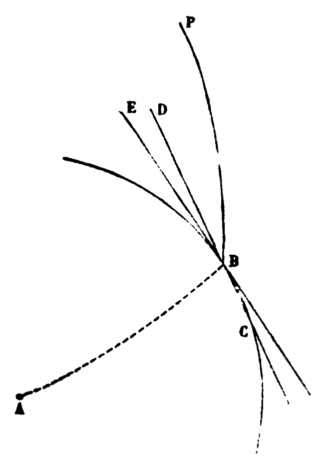
Il nous reste à dire que, pour se familiariser avec le procédé Marcq, au moins dans une partie de son effectuation, il conviendrait dorénavant, dans tous les calculs de longitude, de commencer par déterminer à l'aide du chronomètre, et comme il a été expliqué au n° 1,

l'heure de l'astre par rapport au premier méridien, qui est égale à sa longitude géographique, si celle-ci est *Ouest*, ou à son complément à 24h, si elle est *Est*. On n'aurait plus alors, pour obtenir la longitude du lieu, qu'à combiner avec ladite heure de l'astre l'angle horaire de celui-ci, tel qu'il résulte du calcul de l'angle au pôle P. Ainsi, lors d'une observation du Soleil, on commencerait par déduire de l'heure du chronomètre, l'heure vraie de Paris; et cette heure vraie se combinerait avec l'heure vraie du bord donnée par le calcul de l'angle. — En un mot, au lieu d'opérer selon la pratique actuelle, avec le Soleil moyen, pour déduire la longitude des différences d'heures de ce Soleil sur le premier méridien et sur le méridien du lieu, il serait opportun d'opérer désormais avec l'astre observé lui-même; ce qui, au fond, n'entraînerait qu'un simple changement dans l'ordre des opérations. C'est cette marche qu'on a suivie dans les TYPES DE CALCUL Nos 4 et 4 *bis* de la fin du volume.

1re PARTIE. — § II. CAS D'UNE SEULE OBSERVATION : DIVERSES MANIÈRES DE MENER LA DROITE DE HAUTEUR PAR LE POINT CHOISI. EXISTENCE ANALYTIQUE DE CINQ DROITES DE HAUTEUR SIMULTANÉES DU NAVIRE.

N° 10. Emploi d'une tangente pour droite de hauteur; assimilation des droites de hauteur à des loxodromies. — Une fois arrêté le point B, *fig.* 2, du cercle de hauteur que l'on a choisi comme *point déterminatif* de la droite de hauteur, on mène par ce point, soit une corde CBD, passant par un deuxième point C du cercle, à très-petite distance du premier; soit une tangente BE à ce cercle. Nous admettrons, d'abord, que l'on peut se borner dans les calculs aux très-petits du premier ordre. En cette hypothèse, la portion de la droite de hauteur s'étendant de part et d'autre de B, à une distance n'excédant pas l'ordre de grandeur convenu, se confondra avec la portion du cercle de hauteur sur laquelle se trouve le navire, sauf le cas exceptionnel (n° 8) où la distance zénithale de l'astre et par suite le rayon dudit cercle,

Fig. 2. relative aux deux manières de tracer une droite de hauteur.



seraient eux-mêmes des très-petits du premier ordre. Elle représentera par suite un relèvement auquel appartiendra le bâtiment, toutefois dans un rayon ne s'écartant pas du point B au delà dudit ordre de grandeur.

Lorsqu'on emploie une tangente comme droite de hauteur, il suffit, pour la mener sur une carte de Mercator, de tracer une droite faisant avec le méridien du point choisi un angle égal à l'angle PBE de la sphère céleste, lequel angle n'est évidemment autre que l'amplitude de l'astre A par rapport au point B, et qui, d'après la propriété fondamentale des cartes en question, s'y projette en véritable grandeur. Il est même plus simple de se servir du parallèle au lieu du méridien, et de faire alors avec le parallèle un angle égal à l'azimut lui-même. Ce dernier se déduit parfois de l'azimut relevé au moment de l'observation, et corrigé de la variation ainsi que de la déviation du compas. Mais ce moyen est peu recommandable, à cause de son manque de précision. D'ailleurs, l'azimut qui convient rigoureusement à la question est l'azimut B calculé dans le triangle de position PBA, déterminé par la distance zénithale BA ainsi que par la latitude et la longitude du point déterminatif B. Dans tous les cas, on peut se servir des tables azimutales de M. Labrosse ou de M. Perrin, pour accélérer l'opération. Quand le point déterminatif B de la droite de hauteur est de l'espèce L, il y a aussi moyen d'obtenir la valeur de l'azimut à l'aide des procédés indiqués au n° 13.

Dans le cas du procédé Marcq, on peut, afin d'éviter de compliquer le calcul, prendre pour l'azimut voulu la valeur déduite du triangle de position comprenant le zénith estimé, et dont la recherche (n° 4) fait partie du procédé lui-même pour la détermination de l'intersection R qui lui correspond. L'erreur commise ainsi est négligeable; car la différence des deux azimuts est un angle de contingence dans l'ordre d'approximation où nous nous sommes placé.

— Toute droite de hauteur envisagée comme tangente au cercle de hauteur et par suite à la courbe de hauteur sur la carte réduite, et considérée dans toute son étendue, représente sur cette carte une loxodromie ayant un angle de route égal à l'amplitude adoptée. — Dans cet ordre d'idées, le procédé Marcq, avec le mode de calcul approximatif employé pour la recherche *finale* (n° 4) du point déterminatif y relatif, correspond, somme toute, au tracé sur la carte d'une loxodromie : 1° perpendiculaire à une première loxodromie menée par le point estimé suivant l'azimut estimé; 2° passant par le point de rencontre de la courbe de hauteur avec cette première loxodromie.

En tout état de cause, l'emploi de la tangente comme droite de hauteur, est dû à M. Johnson, et ne date que de quelques années. Il est de beaucoup postérieur à l'usage de la sécante imaginé dès 1847 par le capitaine américain Sumner, qui est le véritable inventeur de la droite de hauteur, et l'a proposée en prenant pour point déterminatif l'intersection L correspondant à la latitude estimée.

N° 11. Emploi d'une sécante pour droite de hauteur. — Le système de la sécante ne s'associe pas d'une manière naturelle au procédé Marcq. Néanmoins ce qui suit est applicable à ce procédé (bien qu'on n'en use jamais), sous la condition qu'on ne considère comme variant qu'une des deux données de l'estime, de préférence la latitude, pour la facilité du calcul à recommencer, eu égard aux formules relatives à ce procédé (n° 4).

Avec cette réserve, on peut poser en principe que, quelle que soit celle des trois intersections L, G ou R, choisie, pour point déterminatif, il suffit, pour trouver le deuxième point de la corde cherchée, de faire varier la latitude ou la longitude estimée, qui a servi à déterminer ladite intersection, d'une quantité de la grandeur des très-petits du premier ordre, et de déduire de l'élément varié la nouvelle intersection y relative. De cette façon, on est certain de ne pas avoir une corde dont la deuxième extrémité pourrait se trouver à une distance de la position réelle du navire telle, que l'écart entre cette corde et son arc excéderait le degré d'approximation convenu. — Par ailleurs, pour faciliter le tracé sur la carte, on substitue au deuxième point de sécance très-rapproché du premier ainsi calculé, un autre point de la droite beaucoup plus éloigné. On obtient ce nouveau point en multipliant par un même nombre entier arbitraire, la variation de l'élément déterminatif et celle de l'élément calculé lui correspondant. Par exemple, si le deuxième point de sécance a été déterminé à l'aide d'une variation en latitude de 1 minute et du changement en longitude correspondant, on multipliera cette variation et ce changement par les nombres 10, 20, ..., suivant que l'échelle de la carte est moins ou plus petite. Toutefois, on commet de ce chef une nouvelle erreur d'un très-petit du deuxième ordre sur l'alignement du navire; car, pour opérer avec rigueur, il faudrait, dans la multiplication du changement en longitude, substituer auxdits nombres les rapports des variations en latitude croissante pour 10, 20 minutes, etc., à la variation en latitude croissante pour 1 minute à compter du premier point de la corde. Au surplus, il est rationnel, afin d'éviter toute partie proportionnelle, de prendre

pour l'élément déterminatif un nombre rond, et de faire sa variation égale à un multiple de la différence tabulaire des angles.

Au lieu de recommencer complétement la deuxième opération, on a adopté, depuis longtemps déjà, le *mode* (n° 12) proposé par M. Pagel dans sa *Méthode complète* (n° 43) pour déterminer le point par deux hauteurs. Ce mode, on le sait, consiste à inscrire, à la place des deuxièmes logarithmes, les différences des premiers logarithmes qui résultent de la variation de l'élément déterminatif. Lorsque cet élément est la latitude estimée, et que dès lors l'élément inconnu est la longitude, et que le calcul fondamental du problème est l'angle horaire, on évite toute partie proportionnelle, dans l'un ou l'autre mode d'opérer, en prenant pour variation dudit élément le *double* ou plus généralement un nombre *pair* de fois la différence tabulaire des angles. — Les deux modes de calcul donneraient le même résultat si l'on prenait, dans le cas du mode Pagel, pour différence logarithmique du *cosinus* de la latitude, la somme des deux différences afférentes dans la table aux deux différences tabulaires successives. Mais, d'habitude, on se contente d'y doubler la différence logarithmique correspondant à la différence tabulaire des angles adjacents à la latitude considérée.

N° 12. Mode Pagel pour calculer la variation de l'heure en fonction de la variation de la latitude : coefficient Pagel. — Comme ce mode jouit d'une grande vogue, nous allons en rappeler le développement. Ayons présente à l'esprit la formule usuelle d'angle horaire rappelée au n° 2.

Désignons par :

d' la différence logarithmique de $\cos L$;

d'', d''' et d les différences logarihmiques de $\cos S$, $\sin(S-H)$ et $\sin\frac{1}{2}P$;

δ la différence tubulaire des angles.

On a évidemment, en considérant arithmétiquement les différentes quantités qui vont suivre : $\frac{2d'-d''+d'''}{d}\times\delta$, pour la variation de P en secondes de degré, relative à une différence 2δ sur la latitude, et $\frac{2d'-d''+d'''}{d}\times\frac{\delta}{15}$ pour cette même variation en secondes de temps.

D'ordinaire, on substitue à la précédente variation celle correspondant à la différence de $+1'$ sur la latitude, en se bornant à multiplier la fraction ci-dessus par $\frac{60''}{2\delta}$. On obtient ainsi :

$$\frac{2d' - d'' + d'''}{2d}.$$

Cette expression est tout à fait générale, et indépendante de la table de logarithmes employée. Prise avec LE SIGNE de son résultat si on a observé dans l'OUEST, ou avec le signe *contraire* si on a observé dans l'*Est*, elle procure la variation en *secondes* de l'heure du lieu, *en temps de l'astre*, pour une variation de $+1'$ de la latitude. On lui donne le nom de *coefficient Pagel*, et on la désigne par la lettre ϖ_1. — Dès lors, la variation cherchée en *longitude* g_1 correspondant à ladite variation de $+1'$ sur la latitude, vaut, eu égard aux conventions de signe de la légende page 1 pour les changements en longitude : $-15\frac{\varpi_1}{60} = -\frac{\varpi_1}{4}$ en *minutes de degré*. Ceci donne pour g_1 obtenu au moyen des différences logarithmiques :

$$g_1 = -\frac{2d' - d'' + d'''}{2d}, \text{ avec observation dans l'Ouest;}$$

$$g_1 = +\frac{2d' - d'' + d'''}{2d}, \text{ avec observation dans l'Est.}$$

Comme les différences secondes logarithmiques ne sont pas nulles pour cos L, il suit des explications de la fin du numéro précédent que, pour le changement en longitude nécessaire à la détermination du second point d'une sécante de hauteur caractérisée par un point déterminatif de l'espèce L, le mode *Pagel* et le mode correspondant au calcul d'angle horaire *recommencé* donnent lieu à deux résultats un peu différents. Toutefois, cet écart rentre largement dans les très-petits du second ordre. — Mais il n'en serait plus de même si l'on calculait $15\frac{\varpi_1}{60} = \frac{\varpi_1}{4}$ *directement* par la formule approchée du n° 13; l'écart dont il s'agit pourrait alors, dans de certaines conditions, atteindre des valeurs relativement élevées.

Quoi qu'il en soit, pour opérer avec une parfaite méthode, il faudrait voir si la somme de ce nouvel écart, de l'erreur mentionnée au n° 11 due au tracé de la droite de hauteur par sécante, et enfin de la divergence entre cette droite et le véritable lieu géométrique du navire, ne dépasse pas la limite supérieure adoptée comme caractéristique des très-petits du second ordre. Mais cette appréciation rétrospective n'est guère de mise dans les applications.

N° 18. Calcul de l'azimut par le coefficient Pagel, et *vice versâ*. Autre détermination directe de ce coefficient : tables de M. Perrin. — A propos du coefficient Pagel, il est bon de rappeler qu'on peut l'utiliser pour déterminer l'azimut,

quand on en aura besoin soit pour un calcul de variation, soit pour le tracé d'une droite de hauteur d'après la méthode d'une tangente menée par le point déterminatif L (n° 10). Le développement (16 *bis*) du n° 25, de ΔP en fonction de ΔL, étant limité à son premier terme, donne $\Delta P = \frac{\operatorname{cotg} Z}{\cos L} \Delta L$. Si on fait $\Delta L = 1'$, ΔP devient égal à $15 \frac{\varpi_1}{60}$, d'après le n° 12; et on a :

$$\operatorname{cotg} Z = 15 \frac{\varpi_1}{60} \cos L = \frac{\varpi_1}{4} \cos L.$$

Cette expression de cotg Z est entachée non-seulement des erreurs dues aux termes négligés du développement, mais aussi du fait que l'égalité $\Delta P = 15 \frac{\varpi_1}{60} = \frac{\varpi_1}{4}$ n'est pas *rigoureuse*, eu égard, comme nous en avons prévenu au n° 12, à ce que les différences secondes logarithmiques ne sont pas nulles pour cos L. Mais cela a peu d'importance, vu l'approximation dont on peut en général se contenter pour Z. Cependant, aux environs du méridien, la formule cesse d'être applicable, ainsi que cela résulte du n° 44.

Quand on connaît l'azimut, soit par un relèvement, soit par sa détermination rapide en fonction de l'heure du lieu, de la déclinaison et de la latitude d'après les tables de M. Labrosse, on peut, en renversant l'équation ci-dessus, se servir de cet élément pour obtenir *directement* $15 \frac{\varpi_1}{60} = \frac{\varpi_1}{4}$, soit le coefficient Pagel en minutes de degré, ou $-g_1$. On a en effet alors :

$$-g_1 = \frac{\operatorname{cotg} Z}{\cos L}.$$

Mais cette méthode ne fournit en somme qu'une valeur approximative de $-g_1$, et ne saurait en général être recommandée, surtout quand le second terme du développement susmentionné atteint une certaine valeur, ce qui a lieu dès que l'observation se rapproche du méridien.

— Comparant la formule ci-dessus à la relation ci-après tirée du triangle de position :

$$\operatorname{tg} D \cos L = \operatorname{cotg} Z \sin P + \sin L \cos P;$$

et éliminant cotg Z entre ces deux équations, M. Perrin a trouvé :

$$-g_1 = \frac{\operatorname{tg} D}{\sin P} - \frac{\operatorname{tg} L}{\operatorname{tg} P}.$$

Il a construit d'après cette formule des TABLES (*) appelées à rendre

(*) NOUVELLES TABLES destinées à abréger les calculs nautiques, par E. Perrin. — Paris, Arthus Bertrand, éditeur.

de grands services aux navigateurs pour la solution d'une foule de questions, et en particulier de celle qui précède. Le principal avantage de ces tables consiste surtout en ce que leur emploi n'est pas limité aux observations du Soleil. La déclinaison et la latitude y variant de 0° à 70°, elles s'appliquent à tous les lieux où l'on est appelé à naviguer, à la Lune, aux planètes, ainsi qu'aux étoiles de première ou de deuxième grandeur que l'on peut observer à la mer.

Nous écrirons la relation de M. Perrin sous la forme :

$$-g_1 = p' + p'' = p,$$

pour la mettre en harmonie avec les notations employées par l'auteur. Le premier terme $p' = \dfrac{\operatorname{tg} D}{\sin P}$ est donné avec le signe qui lui convient, par la *table* I, dans laquelle on entre avec la déclinaison D et l'angle au pôle P. Le second terme $p'' = -\dfrac{\operatorname{tg} L}{\operatorname{tg} P}$ est donné avec son signe, par la *table* II, dans laquelle on entre avec la latitude L et le même angle au pôle P. La somme algébrique $(p' + p'')$ donne le coefficient Pagel $p = -g_1$, exprimé en *minutes de degré*, et avec le signe qui lui convient pour l'appliquer à l'heure. Il suffit d'en changer le signe pour l'appliquer à la longitude, en ayant d'ailleurs égard aux conventions de la légende page 1, pour le signe de ce dernier élément.

Connaissant p, on peut ensuite calculer rapidement l'azimut au moyen de la *table* III de M. Perrin, dans laquelle on entre avec la latitude L et la somme algébrique $(p' + p'') = p$. En faisant cadrer ces deux arguments, on obtient l'azimut vrai de l'astre, qui est toujours donné plus petit que 90°, et que l'on énonce d'après la règle inscrite au haut de chaque page de la table.

—Il est bon de remarquer à ce sujet que l'azimut calculé par ce procédé est toujours *rigoureusement* exact, puisqu'il résulte de la formule :

$$\operatorname{cotg} Z = \cos L \left(\frac{\operatorname{tg} D}{\sin P} - \frac{\operatorname{tg} L}{\operatorname{tg} P} \right),$$

dont les TABLES de M. Perrin fournissent successivement les différentes parties.—Mais le coefficient Pagel,$-g_1 = p$, déduit de ces tables, n'est suffisamment exact, comme plus haut, qu'autant que le second terme du développement susrappelé (16 *bis*) du n° 25 est négligeable (*).

(*) Par une transformation du même genre que celle en cotg Z, M. Perrin a ramené la recherche de l'angle de route pour la navigation au grand cercle à un calcul analogue à celui de l'azimut. Si l'on appelle en effet V l'angle de route, L la latitude de départ, L' celle d'arrivée et P la différence des longitudes, le triangle sphérique formé par le pôle, les lieux de départ et d'arrivée, donne la relation :

$$\operatorname{tg} L' \cos L = \operatorname{cotg} V \sin P + \sin L \cos P;$$

⁎ N° 14. Recherche analytique de toutes les droites de hauteur simultanées du navire. — Dans ce qui précède, nous avons familiarisé le lecteur avec la considération des droites de hauteur à un point de vue exclusivement géométrique. Mais pour donner à cette considération la généralité qu'elle comporte, il convient de rechercher maintenant la génération analytique de toutes les droites de hauteur simultanées du navire. A cet effet, en bien nous souvenant des conventions de la légende générale de la page 1 pour les signes des éléments à considérer, nous partirons de la relation fondamentale du triangle de position rappelée au n° 1 :

$$(1\ bis) \qquad \sin H = \sin L \sin D + \cos L \cos D \cos (G_a - G).$$

Remarquons d'abord que si dans cette équation, on regarde L et G comme deux variables indépendantes reliées entre elles par les valeurs connues H, D et G_a, nous nous trouverons en face d'un lieu géométrique du navire, qui ne sera autre que son cercle de hauteur.

Par ailleurs, on se trouve ici en présence de cinq éléments : la latitude L du navire et sa longitude G, la hauteur H de l'astre, sa déclinaison D et enfin sa longitude géographique G_a. Or, on connaît pour chacun de ces éléments une valeur *directe* v qui est donnée par l'*estime* pour L et G, par l'observation pour H, et par l'heure du premier méridien pour D et G_a. On est libre de prendre l'un quelconque de ces cinq éléments pour ce que nous appellerons l'*élément de comparaison*. On peut déduire alors de l'équation (1 *bis*), pour cet élément, une valeur *calculée* v_1 à l'aide des valeurs *directes* des quatre autres éléments.

Si la valeur calculée v_1 de l'élément de comparaison se trouvait égale à sa valeur directe v, cela prouverait que le point *estimé* fait partie du véritable cercle de hauteur du navire. Mais il n'en est pour ainsi dire jamais ainsi. On peut alors se proposer, dans l'équation (1 *bis*), disposée pour donner la valeur calculée v_1, d'aug-

---

d'où l'on tire :

$$\cot g\, V = \cos L \left(\frac{\operatorname{tg} L'}{\sin P} - \frac{\operatorname{tg} L}{\operatorname{tg} P}\right).$$

La partie de cette relation comprise entre parenthèses est analogue à celle que nous avons obtenue pour l'azimut. Les deux termes dont elle se compose, se calculeront donc au moyen des *tables* I et II, en entrant dans la première avec la latitude d'arrivée considérée comme déclinaison et la différence en longitude comme angle au pôle, et dans la seconde avec la latitude de départ comme latitude du navire et le même angle au pôle. Les règles de signes propres à ce problème sont inscrites au haut des pages de chaque table, à l'opposé des règles spéciales au problème que nous venons d'expliquer dans le texte. — En entrant ensuite dans la *table* III avec la somme algébrique des deux termes ainsi obtenus et la latitude de départ, on trouve l'angle de route, que l'on énonce d'après la règle donnée au haut de la page, à l'opposé de celle concernant l'azimut.

menter L_e et G_e de deux quantités variables ΔL_e et ΔG_e choisies de façon que l'élément de comparaison reprenne sa valeur directe, ou mieux que v_1 augmente de $(v - v_1)$. Nous aurons ainsi une nouvelle équation qui ne sera évidemment autre que celle du cercle de hauteur du navire écrite sous une forme différente de la première. Au surplus, eu égard au faible écart habituel entre le point exact et le point estimé, les éléments ΔL_e, ΔG_e et $(v - v_1)$ seront en général des quantités très-petites.

— L'élément de comparaison qui se présente le plus naturellement est la hauteur; mais, toute réflexion faite, il n'y a pas de raison analytique qui l'impose à l'exclusion des autres. Nous les considérerons tous successivement.

En tout état de cause, au lieu géométrique rigoureux que représente notre nouvelle équation, on peut en substituer un plus simple et suffisamment approché. A cet effet, développons, par la série de Taylor, tous les termes qui contiennent ΔL_e, ΔG_e et $(v - v_1)$, en nous bornant aux termes du premier ordre. Nous obtiendrons de la sorte, entre ΔL_e, ΔG_e et $(v - v_1)$, une équation du premier degré, où cette dernière quantité devra être regardée comme une constante. On simplifiera d'ailleurs cette équation en la combinant tant avec l'équation (I *bis*), disposée comme il a été dit plus haut, qu'avec d'autres relations tirées du triangle de position.

Considérons maintenant le plan tangent à la sphère terrestre mené par la position estimée du navire; et traçons dans ce plan et par cette position deux axes rectangulaires, dont l'un sera une tangente au méridien de ladite position, et l'autre une tangente à son parallèle. Les termes ΔL_e et $\Delta G_e \cos L_e$ pourront être regardés comme des coordonnées courantes y et x par rapport aux axes adoptés, les *x positifs* étant du reste comptés du côté de l'*Ouest* et les y positifs du côté du Nord. — L'équation susmentionnée appartiendra alors à une droite qui représentera, aux très-petits près du second ordre, un lieu géométrique rectiligne du navire, dérivant d'une manière immédiate du cercle de hauteur de l'astre. En un mot, ce sera l'équation d'une droite de hauteur.

⁎ **N° 15. Équations des cinq droites de hauteur simultanées du navire.** — En choisissant pour élément de comparaison successivement chacun des cinq éléments mentionnés au numéro précédent, nous obtiendrons cinq droites de hauteur différentes que nous allons examiner rapidement.

1° Prenons pour l'élément de comparaison la longitude du navire. Nous aurons $(G_e - G_1)$ pour la différence $(v - v_1)$ entre la valeur *directe* G_e et la valeur *calculée* G_1 déduite de la formule logarithmique de l'angle horaire (n° 2), à l'aide des valeurs *directes* des quatre autres éléments, et satisfaisant par suite à l'équation (1 *bis*) alimentée avec ces mêmes éléments.

Dès lors, et eu égard à la prescription générale qui précède, nous obtiendrons les deux relations :

$$\sin H = \sin L_e \sin D + \cos L_e \cos D \cos (G_a - G_1)$$
$$\sin H = \sin (L_e + \Delta L_e) \sin D + \cos (L_e + \Delta L_e) \cos D \cos \left[(G_a - G_1) - \Delta G_e - (G_e - G_1)\right].$$

Puis, en développant jusqu'au premier ordre les termes de la deuxième équation, et en combinant le résultat avec la première équation, nous trouverons :

$$\left[\operatorname{tg} D \cos L_e - \sin L_e \cos (G_a - G_e)\right] \Delta L_e + \cos L_e \sin (G_a - G_e) \left[\Delta G_e + (G_e - G_1)\right] = 0.$$

Mais le triangle de position PZ_eA, correspondant au zénith estimé, donne :

$$\operatorname{tg} D \cos L_e = \operatorname{cotg} Z_e \sin (G_a - G_e) + \sin L_e \cos (G_a - G_e).$$

En éliminant $\operatorname{tg} D \cos L_e$ entre cette équation et la précédente, il vient :

$$\frac{\operatorname{cotg} Z_e}{\cos L_e} \Delta L_e + \left[\Delta G_e + (G_e - G_1)\right] = 0;$$

soit :

(9) $$\Delta L_e = - \Delta G_e \cos L_e \operatorname{tg} Z_e - (G_e - G_1) \times \cos L_e \operatorname{tg} Z_e;$$

(9 *bis*) $$y = - x \operatorname{tg} Z_e - (G_e - G_1) \times \cos L_e \operatorname{tg} Z_e;$$

2° Prenons pour l'élément de comparaison la latitude du navire. Nous aurons $(L_e - L_1)$ pour la différence $(v - v_1)$ entre la valeur *directe* L_e et la valeur *calculée* L_1, déduite des formules logarithmiques *ad hoc* (n° 3). Des calculs entièrement analogues aux précédents donneront :

(10) $$\Delta L_e = - \Delta G_e \cos L_e \operatorname{tg} Z_e - (L_e - L_1);$$

(10 *bis*) $$y = - x \operatorname{tg} Z_e - (L_e - L_1).$$

3° Prenons pour l'élément de comparaison la hauteur de l'astre. Nous aurons $(H - H_1)$ pour la différence entre la valeur *directe* H, qui est ici la hauteur vraie déduite de l'observation, et la valeur *calculée* H_1 déduite des formules logarithmiques *ad hoc* (n° 4) (H_1 n'est autre que H_e du procédé Marcq; mais nous avons employé présentement l'indice $_1$ au lieu de l'indice $_e$ pour conserver, dans tout le cours de ce numéro, le même indice à la valeur *calculée* de chaque élément de

comparaison). Nous trouverons, en suivant la même marche qu'en 1°, la série de relations :

$$\sin H_1 = \sin L_e \sin D + \cos L_e \cos D \cos(G_a - G_e);$$

$$\sin[H_1 + (H - H_1)] = \sin(L_e + \Delta L_e)\sin D + \cos(L_e + \Delta L_e)\cos D \cos(G_a - G_e - \Delta G_e);$$

$$\cos H_1 \times (H - H_1) - \cos D[\operatorname{tg} D \cos L_e - \sin L_e \cos(G_a - G_e)]\Delta L_e - \cos L_e \cos D \sin(G_a - G_e)\,\Delta G_e = 0.$$

Puis, en remplaçant le coefficient de ΔL_e par $\operatorname{cotg} Z_e \sin(G_a - G_e)$, qui lui est égal, et $\frac{\cos D}{\cos H_1}$ par $\frac{\sin Z_e}{\sin(G_a - G_e)}$, on trouve :

$$(11) \qquad \Delta L_e = -\Delta G_e \cos L_e \operatorname{tg} Z_e + (H - H_1) \times \frac{1}{\cos Z_e};$$

$$(11\ bis) \qquad y = -x \operatorname{tg} Z_e + (H - H_1) \times \frac{1}{\cos Z_e}.$$

4° Prenons pour l'élément de comparaison la déclinaison de l'astre. Nous aurons $(D - D_1)$ pour la différence $(v - v_1)$ entre la valeur *directe* D, déterminée à l'aide de l'heure du premier méridien, et la valeur *calculée* D_1, déduite de formules logarithmiques entièrement analogues à celles employées pour la détermination de L_1, eu égard à ce que la déclinaison et la latitude sont symétriques dans la formule fondamentale du triangle de position. Pour cette même raison, la marche indiquée en 1° mène aux résultats présentement cherchés par la suppression de $(G_e - G_1)$ et l'introduction d'un terme en $(D - D_1)$, dont le coefficient se déduit de celui de ΔL_e à l'aide d'une simple permutation de L_e en D, et de l'angle Z_e en l'angle A. Il vient ainsi :

$$\frac{\operatorname{cotg} Z_e}{\cos L_e}\Delta L_e + \frac{\operatorname{cotg} A}{\cos D}(D - D_1) + \Delta G_e = 0;$$

$$(12) \quad \Delta L_e = -\Delta G_e \cos L_e \operatorname{tg} Z_e - (D - D_1) \times \frac{\cos L_e \operatorname{tg} Z_e}{\cos D \operatorname{tg} A} = -\Delta G_e \cos L_e \operatorname{tg} Z_e - (D - D_1)\frac{\cos A}{\cos Z_e};$$

$$(12\ bis) \qquad y = -x \operatorname{tg} Z_e - (D - D_1) \times \frac{\cos A}{\cos Z_e}.$$

5° Prenons enfin, pour l'élément de comparaison, la longitude géographique de l'astre. Désignons par $(G_a - G_{a,1})$ la différence $(v - v_1)$ entre la valeur *directe* G_a déterminée à l'aide de l'heure du premier méridien, et la valeur *calculée* $G_{a,1}$ déduite du calcul habituel d'angle horaire avec la longitude G_e servant cette fois de donnée. Il va de soi que les résultats trouvés en 1° sont entièrement applicables ici, sous la seule condition de remplacer $-(G_e - G_1)$ par $+(G_a - G_{a,1})$. Il vient dès lors :

$$(13) \qquad \Delta L_e = -\Delta G_e \cos L_e \operatorname{tg} Z_e + (G_a - G_{a,1}) \times \cos L_e \operatorname{tg} Z_e;$$

$$(13\ bis) \qquad y = -x \operatorname{tg} Z_e + (G_a - G_{a,1}) \times \cos L_e \operatorname{tg} Z_e.$$

— En résumant tout ce qui précède, on conclut qu'en se bornant aux très-petits du premier ordre, il existe CINQ ***droites de hauteur simultanées*** du navire, et ***qu'il n'y en pas d'autres.***

Les équations (9) à (13) conduisent toutes à une remarque importante, c'est qu'on peut calculer les divers coefficients par ***voie indirecte.*** — Ainsi, pour l'équation (11), le coefficient $-\cos L_e \operatorname{tg} Z_e$ de ΔG_e est égal, aux très-petits près du second ordre, à la variation que subit la latitude dans la relation générale (1 *bis*) rappelée au n° 14, pour une variation de $+1'$ sur la longitude, les autres éléments demeurant constants. Ce même coefficient peut encore s'obtenir d'une autre *manière*, en prenant l'inverse de la variation en longitude correspondant à une variation en latitude de $+1'$, les autres éléments demeurant encore constants. — Le coefficient de $(H - H_1)$ à son tour est aussi calculable ***indirectement*** de deux ***manières.***

Ce que nous venons de dire pour l'équation (11) est, bien entendu, applicable aux autres équations susmentionnées. Il est nécessaire d'ajouter que la détermination par ***voie indirecte*** dont il s'agit, est en principe erronée, et que l'erreur devient souvent assez forte (fin du n° 4 et n° 44) pour en rendre l'emploi impossible.

L'usage de ladite détermination trouvera son utilité spéciale dans la connexité à établir (n°s 48 à 51) entre l'ordre d'idées qui conduit aux cinq droites de hauteur simultanées du navire, et la théorie de la fausse position appliquée à la recherche par le calcul du point observé.

✳ **N° 16. Identification des cinq droites de hauteur simultanées du navire.** — En comparant entre elles les équations (9 *bis*) à (13 *bis*), on voit que les cinq droites de hauteur simultanées du navire font toutes avec l'axe des x, un angle égal à Z_e, et par suite qu'elles sont perpendiculaires à la direction azimutale de l'astre relevé du zénith ***estimé***, et qui fait ce même angle avec l'axe des y. En un mot, elles forment une série de parallèles. Parmi ces parallèles, il importe surtout de distinguer celle donnée par l'équation (11 *bis*). Cette équation représente une droite qui se trouve à une distance de l'origine égale à $(H_1 - H)$. Elle se confond donc, à un très-petit près du second ordre, avec la trace du cercle de hauteur sur le plan tangent où on suppose le navire. C'est là la droite de hauteur *fondamentale.* — Mais les autres lieux rectilignes dont il s'agit se confondent eux-mêmes avec cette droite aux très-petits près du second ordre. Car, par exemple, la distance comptée dans le sens de l'axe des y (ou de l'axe

des x, si $Z_e = 90°$) entre cette droite et la parallèle donnée par l'équation (9 *bis*) est évidemment égale à $(G_e - G_1) \times \cos L_e \operatorname{tg} Z_e - \frac{(H - H_1)}{\cos Z_e}$. Or il est aisé de prouver que cette dernière expression est nulle aux très-petits près du second ordre, en partant des deux équations :

$$\sin H = \sin L_e \sin D + \cos L_e \cos D \cos (G_a - G_1),$$
$$\sin H_1 = \sin L_e \sin D + \cos L_e \cos D \cos (G_a - G_e).$$

Donc, la droite de hauteur fondamentale et les autres lieux rectilignes qui nous occupent, se confondent en une seule ligne aux très-petits près du second ordre.

De la conclusion précédente, il suit, d'après le n° 8, que ce sont des très-petits du premier ordre qui représentent les distances séparant les cinq points du cercle de hauteur pour chacun desquels les coordonnés conviennent *rigoureusement*, ou, *sinon*, à un très-petit près du second ordre, à une des équations des cinq lieux rectilignes considérés, et qu'il est naturel de regarder comme les *points déterminatifs* respectifs desdits lieux. Ces cinq points particuliers sont évidemment donnés par les valeurs de ΔL_e et ΔG_e qui satisfont, dans les conditions susmentionnées, d'une part à l'équation (1 *bis*), rappelée au n° 14, en y introduisant $(L_e + \Delta L_e)$, $(G_e + \Delta G_e)$ et la valeur directe de l'élément de comparaison, et d'autre part à l'une des équations (9) à (13). — Par ailleurs, les points en question se trouvent à l'intersection du cercle de hauteur : 1° avec le parallèle de latitude L_e, pour les équations (9) et (13); 2° avec le méridien de longitude G_e, pour l'équation (10); 3° avec le vertical de l'astre mené par le zénith estimé, pour l'équation (11) ; 4° avec le grand cercle mené, dans la direction connue de l'astre, par le zénith estimé, et par le point où la circonférence décrite de ce zénith comme pôle, d'un rayon égal à la distance zénithale réelle, rencontre le parallèle de l'astre, pour l'équation (12).

Il est très-aisé de voir que les points déterminatifs relatifs à 1° et 2° sont *rigoureusement* sur le cercle de hauteur. Mais les points déterminatifs correspondant à 3° et 4° n'appartiennent à ce cercle qu'à un très-petit près du second ordre. — Pour le prouver, il faut se livrer à un calcul assez long. Ainsi, en ce qui concerne 3°, on considère le triangle PZ_eR, *fig.* 1, et l'on en déduit successivement les valeurs de ΔL_e et ΔG_e convenant au point R, et développées en fonction des deux premières puissances de $(H - H_1)$; puis on introduit ces valeurs dans

l'équation (11). Nous laissons aux lecteurs familiarisés avec l'analyse le soin d'achever la question.

En tout état de cause, remarquons maintenant que l'azimut estimé PZ_eA de l'astre est égal, à un angle de contingence près, au relèvement azimutal pris de tout point du cercle de hauteur distant du zénith estimé d'un très-petit du premier ordre. Dès lors, on peut dire que les cinq droites de hauteur simultanées du navire, qui sont, avons-nous vu plus haut, perpendiculaires à la première direction azimutale, le sont aussi à la seconde. Conséquemment, elles sont toutes tangentes au cercle de hauteur chacune en celui des points déterminatifs susmentionnés qui lui correspond. Mais n'oublions pas que ces diverses conclusions conviennent à l'hypothèse expresse de l'ordre de petitesse où nous nous sommes placé, pour l'écart entre la position estimée et la position exacte du navire.

En résumé, nous sommes ramené à cette remarque déjà faite au n° 8, que, dans l'hypothèse d'un écart entre la position exacte et la position estimée du navire ne dépassant pas un très-petit du premier ordre, les divers points du cercle de hauteur susceptibles d'être choisis comme *points déterminatifs* de la droite de hauteur s'équivalent entre eux. Mais, ainsi que nous l'avons pareillement déjà dit, cette hypothèse peut très-souvent ne point se réaliser en pratique; et dès lors nos conclusions (n° 9) en faveur du procédé Marcq pour le choix du point déterminatif, conservent toute leur valeur.

1re PARTIE. — § III. Cas d'une seule observation : remplacement de la droite de hauteur par un autre lieu géométrique du navire, rectiligne sur la carte.

N° 17. Remplacement de la droite de hauteur par un méridien ou un parallèle. Remarques sur le calcul de la latitude par les hauteurs méridiennes. — A la droite de hauteur, on substitue un autre lieu géométrique indépendant du cercle de hauteur et d'ailleurs rectiligne sur la carte, quand les circonstances s'y prêtent, soit comme simplification de calcul, soit comme exactitude. Ainsi, si l'on observe un astre au moment de son passage au premier vertical ou tout à fait aux environs, il sera plus vite fait de substituer à l'emploi d'une droite de hauteur obtenue par le procédé

Marcq, l'usage d'un méridien déduit alors dans d'excellentes conditions (n°s 34 et 35) de l'angle horaire exécuté avec la latitude estimée.

Semblablement, si la hauteur a été prise au moment du passage au méridien ou aux environs de ce passage, ou encore si l'on s'est servi de l'étoile polaire, il conviendra de prendre pour lieu géométrique du navire le parallèle de latitude correspondant à l'observation. Ce parallèle forme un lieu géométrique *rigoureux* du navire, qui devient rectiligne sur la carte. Dans le cas d'une hauteur méridienne, le lieu rectiligne ainsi obtenu se confond avec la droite de hauteur, ayant pour *point déterminatif* l'intersection de la courbe de hauteur et du méridien passant par son centre. Mais il est en lui-même indépendant de la connaissance dudit point. Au surplus, dans les autres cas, le parallèle obtenu diffère de la droite de hauteur, et cela d'autant plus que l'observation considérée a été faite plus loin du méridien.

— La considération des parallèles de latitude comme lieux géométriques du navire, nous amène à diverses remarques importantes sur le calcul même de la latitude par les hauteurs méridiennes.

Quand on marche très-vite en latitude, ce qui peut se présenter avec les navires rapides actuels, et que de plus le mouvement en déclinaison de l'astre est accentué et a lieu en sens contraire du changement en latitude, il est bon d'être prévenu que la hauteur méridienne peut différer sensiblement de la hauteur maxima (ou minima, s'il s'agit du passage au méridien inférieur). En d'autres termes, la *culmination* de l'astre s'effectue hors du méridien ; et si l'on veut opérer rigoureusement pour déterminer la latitude, il faut ici avoir recours à la formule (14) du n° 19.—Toutefois, on peut aussi calculer (n°18) l'heure que doit marquer le chronomètre lors du passage simultané de l'astre et du navire au même méridien, et prendre la hauteur à cet instant. Cette manière de faire est, d'ailleurs, très-utile quand l'astre atteint les environs du zénith. Du reste, il faut, au moins en pareil cas, avoir bien soin de s'orienter, d'après le compas, dans la direction même du méridien du lieu, tout en suivant avec l'instrument la hauteur rapidement croissante de l'astre; car l'azimut de celui-ci saute presque brusquement d'environ 180° au moment dudit passage.

Nous rappellerons, d'autre part, que, eu égard aux signes convenus pour la latitude et la déclinaison dans la légende générale de la

page 1, on a pour formule *générale* de la latitude méridienne :

$$L = (90° - H) + D,$$

sous la condition : 1° que, pour le passage au méridien supérieur, la distance zénithale (90° — H) prenne le nom et, par suite, le signe se rapportant au pôle situé derrière l'observateur ; — 2° que, pour le passage au méridien inférieur, cette distance soit toujours regardée comme de même signe que la déclinaison, et que la valeur absolue du résultat soit retranchée de 180°.

N° 18. Calcul de l'heure du passage d'un astre au méridien du bord, en tenant compte de la vitesse du navire. — L'usage de ce calcul vient d'être indiqué au numéro précédent et le sera encore au n° 21. Bien qu'il soit préférable de substituer aux procédés qui l'exigent, ceux des n°s 19 et 20 qui en dispensent, et que son développement soit complexe, il nous a paru utile à donner, eu égard au but que nous nous sommes proposé de traiter toutes les questions ayant un caractère de nouveauté. — Nous adopterons présentement la légende spéciale suivante, qui a, d'ailleurs, été mise, autant que possible, en harmonie avec la légende générale de la page 1, dont en particulier les conventions de signes sont entièrement applicables ici :

- T et C — heure temps moyen et heure du chronomètre correspondant au calcul d'angle horaire précédant immédiatement le passage au méridien.
- G — longitude du navire au même moment.
- T′ et C′ — heure temps moyen et heure du chronomètre à l'instant du passage *simultané* de l'astre et du navire au même méridien.
- T″ — heure temps moyen du passage de l'astre au méridien de longitude G. Pour le Soleil, ce n'est autre que l'heure temps moyen à midi vrai de ce méridien.
- g — changement en longitude en temps, obtenu par un calcul de point, correspondant à l'intervalle de temps (T″ — T) apprécié à la montre d'habitacle.
- Γ — vitesse en longitude du navire à *l'heure*, dans l'intervalle qui s'écoule entre le moment où l'heure du bord est T″, et le moment où cette heure est T′ ; cette vitesse sera considérée comme constante, eu égard à la faible valeur dudit intervalle. D'ailleurs, par analogie avec G et g, elle est *positive* ou négative, suivant que le navire court vers l'*Ouest* ou vers l'Est.
- *m* — marche diurne du chronomètre sur le temps moyen.
- μ — marche diurne du Soleil moyen sur le temps de l'astre, c'est-à-dire variation de l'heure temps moyen du passage de l'astre au premier méridien entre les deux passages à ce méridien comprenant le passage cherché. Pour le Soleil, ce n'est autre que la différence entre les heures temps moyen à midi vrai pour deux jours consécutifs.
- g′ — changement en longitude en temps entre le moment où l'heure moyenne sur le méridien de longitude G est T″, et le moment où l'heure sur le méridien du passage *simultané* de l'astre et du navire est T′, laquelle heure correspond à l'heure (T′ + g + g′) sur le méridien de longitude G.

Eu égard à ce que la vitesse Γ est *évaluée* à l'heure, g et g′ devront être *exprimés* aussi en prenant l'heure pour unité.

En bien se pénétrant de la légende précédente, on trouve aisément les deux relations suivantes :

$$T' = T'' + (G + G')\frac{\mu}{24^h};$$

$$G' = \Gamma \times [T'' - (T' + G + G')].$$

En résolvant ces deux équations, on trouve successivement :

$$G' = \Gamma \times \frac{(T'' - T' - G)}{1 + \Gamma};$$

$$T' = T'' + \left[G + \frac{\Gamma(T'' - T' - G)}{1 + \Gamma}\right] \times \frac{\mu}{24};$$

$$T'\left(1 + \frac{\Gamma}{1+\Gamma} \times \frac{\mu}{24}\right) = T''\left(1 + \frac{\Gamma}{1+\Gamma} \times \frac{\mu}{24}\right) + G\left(1 - \frac{\Gamma}{1+\Gamma}\right) \times \frac{\mu}{24};$$

Et enfin :

$$T' = T'' + \frac{G}{1 + \Gamma\left(1 + \frac{\mu}{24}\right)} \times \frac{\mu}{24};$$

$$G' = -\Gamma \times \frac{G\left(1 + \frac{\mu}{24}\right)}{1 + \Gamma\left(1 + \frac{\mu}{24}\right)} = -G + \frac{G}{1 + \Gamma\left(1 + \frac{\mu}{24}\right)}.$$

Dès lors, l'intervalle temps moyen qui s'est écoulé à bord entre les heures T et T' comptées sur le méridien variable du navire, peut s'écrire :

$$(T' + G + G') - T = T'' - T + \frac{G}{1 + \Gamma\left(1 + \frac{\mu}{24}\right)} \times \left(1 + \frac{\mu}{24}\right)$$

Or ce même intervalle vaut en temps chronométrique :

$$(C' - C)\left(1 + \frac{m}{24}\right).$$

Il vient donc :

$$C' = C + \left[T'' - T + \frac{G\left(1 + \frac{\mu}{24}\right)}{1 + \Gamma\left(1 + \frac{\mu}{24}\right)}\right]\left(1 + \frac{m}{24}\right).$$

—Pour le Soleil et les étoiles, l'expression ci-dessus se réduit sensiblement à :

$$C' = C + [T'' - (T - G)] \times \left(1 + \frac{m}{24}\right).$$

— Pour la Lune et les planètes, on peut, au lieu d'avoir recours à la formule générale, procéder par approximations successives.

A cet effet, après avoir déterminé T″ et G comme ci-dessus, on prend pour intervalle de temps à la montre d'habitacle $[(T'' + G) - T]$. On en

déduit un nouveau changement en longitude totale G_1 ; et l'on prend alors pour T' l'heure du passage au méridien de longitude $G + G_1$. Une fois T' connue, on a évidemment :

$$C' = C + \left[(T' + G_1) - T\right]\left(1 + \frac{m}{24}\right).$$

N° 19. Calcul de la latitude par les culminations. — En dehors du cas signalé au n° 17 d'une hauteur méridienne très-grande, il est beaucoup plus pratique, et comme observation et comme calcul, de substituer à la détermination de la latitude par la hauteur méridienne elle-même, sa détermination par la hauteur *maxima* ou *minima*, quand on se trouve dans des conditions telles, que ces deux hauteurs doivent différer sensiblement entre elles.

Les formules données ci-après sont absolument générales, pourvu qu'on fasse bien attention aux signes des valeurs numériques de L et D, donnés conformément aux conventions de la légende générale page 1. La première chose à faire dans la question qui nous occupe est de déterminer l'écart P, en *minutes de temps* de l'astre, qui existe entre le moment de sa culmination, et l'heure de son passage au méridien que traverse le navire audit moment. Cette détermination s'obtient facilement en ayant recours à la relation fondamentale du triangle de position rappelée au n° 1, savoir :

$$\sin H = \sin L \sin D + \cos L \cos D \cos P.$$

On déduit de cette équation $\frac{dH}{dt}$, en y considérant H, L et D comme des fonctions du temps t envisagé d'une manière générale. Puis, on pose l'équation $\frac{dH}{dt} = 0$, qui correspond à la valeur *maxima* ou *minima* de la hauteur. — Après avoir négligé dans cette équation les termes du second ordre, ce qui revient à faire $\cos P = 1$, on trouve la valeur particulière cherchée de P. Cette valeur exprimée en secondes de degré est évidemment égale à $P \times 15 \times 60 = P \times 900$. On obtient ainsi :

$$P = -\frac{1}{900 \times \sin 1''} \times \frac{\sin(L \mp D)}{\cos L \cos D}\left(\frac{\frac{dL}{dt} - \frac{dD}{dt}}{\frac{dP}{dt}}\right),$$

le signe *supérieur* ou inférieur de $(L \mp D)$ convenant à la culmination au méridien *supérieur* ou inférieur.

Pour les expressions $\frac{dL}{dt}$, $\frac{dD}{dt}$, $\frac{dP}{dt}$ des vitesses en latitude, en déclinaison et en angle au pôle, on convient de prendre la ***seconde de degré*** pour unité d'angle, et la ***minute de temps moyen*** pour unité de temps. Avec ces conventions, on a sensiblement $\frac{dP}{dt} = \frac{15^\circ \times 3600''}{60^m} = 900''$, en négligeant le mouvement propre de l'astre par rapport au temps moyen. Par ailleurs, on représente, pour simplifier, par λ et δ les vitesses en latitude et en déclinaison, en se reportant pour leurs signes aux conventions spécifiées dans la légende générale page 1. Enfin, comme L est inconnue, puisque c'est justement la quantité à déterminer, il est suffisamment exact de lui substituer dans l'expression de P une latitude *fictive* L_0 déduite de la déclinaison D combinée avec la hauteur H regardée comme hauteur méridienne. Il vient ainsi :

$$P = -\frac{1}{900^2 \times \sin 1''} \times \frac{\sin(L_0 \mp D)}{\cos L_0 \cos D} \times (\lambda - \delta).$$

Introduisons cette valeur de P à la place de p dans la formule des circumméridiennes (15) du numéro suivant; et nous obtiendrons :

$$(14) \qquad L = L_0 - \left[\frac{1}{2 \times 900^2 \times \sin 1''} \frac{\sin(L_0 \mp D)}{\cos L_0 \cos D} \times (\lambda - \delta)^2\right].$$

Le coefficient de $(\lambda - \delta)^2$ n'est autre que le 1/4 de l'inverse du coefficient de p^2 dans ladite formule des circumméridiennes. Il sera donc toujours facile de le déterminer à l'aide des tables *ad hoc* qui donnent ce dernier coefficient.

Il importe d'ajouter que la latitude calculée L de la formule précédente, correspond à l'heure même de la culmination, et non à l'heure où l'astre et le navire traversent simultanément le même méridien.

En prenant $\lambda = 15''$ avec $\delta = 1''$ pour le Soleil et 17″ pour la Lune, on voit que, par des latitudes de 50°, P peut atteindre 8 minutes dans le cas du Soleil, et 16 minutes dans le cas de la Lune, en même temps que la différence $(L - L_0)$ devient 1′04″ pour le premier de ces astres, et 3′51″ pour le second. Ces écarts ne sont pas négligeables, surtout pour les atterrissages; et il est bon que les officiers en soient avertis, afin d'en tenir compte au besoin.

On voit, d'après ce qui précède, que si l'on veut raffiner pour la latitude méridienne, on est en définitive ramené à un cas particu-

lier de circumméridiennes.—Si, d'ailleurs, on tient à se mettre à l'abri de toute surprise, il est tout à fait utile de prendre en principe quelques circumméridiennes en dehors de la hauteur de culmination.

N° 20. Calcul de la latitude par les hauteurs circumméridiennes, eu égard au mouvement de l'astre en déclinaison et à la vitesse du navire. — L'emploi des hauteurs circumméridiennes permet (n° 17) de substituer à la droite de hauteur un parallèle de latitude, en n'exigeant qu'un calcul plus court, et en fournissant, somme toute, un lieu géométrique plus rigoureux.

Toutefois, il faut bien convenir d'entendre par *circumméridiennes*, les hauteurs prises assez près du méridien pour que, eu égard au degré d'approximation qu'on s'est fixé, il ne soit pas nécessaire d'aller au delà du terme du second ordre dans le développement complet de L en fonction de l'écart p en *minutes de temps*, dont le moment de l'observation précède ou suit le passage au méridien. — Il est toujours facile, en pratique, d'apprécier *grosso modo* dans quelle limite d'écart il faut observer pour être dans cette condition ; car il existe des tables indiquant la valeur de p pour laquelle, suivant la déclinaison et la latitude, les termes négligés au delà du second ordre, et dont l'expression est donnée ci-après, déterminent une erreur moindre qu'une quantité voulue. Si on voulait tenir compte de ces termes, il redeviendrait plus simple de se servir d'une droite de hauteur ordinaire d'après le procédé Marcq, qui, du reste, se trouve alors beaucoup simplifié (n° 4). C'est au surplus ce qu'on doit encore faire, quand le calcul d'angle horaire antérieur ne permet pas, pour une raison ou pour une autre, d'avoir p avec une exactitude suffisante.

Cependant, à ce point de vue, on ne doit pas oublier que la philosophie de l'usage des circumméridiennes à la mer repose précisément sur ce que, dans le problème général de la détermination de la latitude à l'aide de l'heure du lieu, c'est aux environs du passage de l'astre au méridien qu'une erreur donnée sur l'heure produit le minimum d'erreur sur la latitude. Car, de la relation générale (1) du n° 1, on déduit facilement par le théorème de Taylor: $\Delta L = \dfrac{\Delta H}{\cos Z} + \cos L \operatorname{tg} Z \times \Delta P$. Or, dans ce développement, le terme en ΔP tend vers 0, aux environs du passage au méridien, alors que Z se rapproche de 0° ou de 180°, en même temps du reste que ΔL converge vers ΔH, c'est-à-dire en même temps que l'erreur sur la latitude tend à se réduire à l'erreur sur la hauteur. — Par ailleurs,

il y a moyen, dans certains cas (n° 62), d'obtenir p dans de bonnes conditions à l'aide de deux circumméridiennes.

— En tout état de cause, la formule la plus rationnelle et la plus rigoureuse pour les circumméridiennes s'obtient par la méthode dont Delambre avait indiqué le principe dès 1814, sans toutefois en bien préciser les résultats. Dans cette méthode, on écrit d'abord la relation (1) du n° 1, sous la forme :

$$\sin H = \sin L \sin D \pm \cos L \cos D \left(1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} P\right).$$

Puis on cherche, par le théorème de Maclaurin, le développement de l'inconnue L en fonction de $\sin^2 \frac{1}{2} P$, en ayant bien soin de considérer D comme constant. En d'autres termes, on calcule la série :

$$L = L_0 + \left(\frac{dL}{d\sin^2 \frac{1}{2} P}\right)_0 \sin^2 \tfrac{1}{2} P + \left(\frac{d^2 L}{(d\sin^2 \frac{1}{2} P)^2}\right)_0 \frac{\sin^4 \frac{1}{2} P}{1.2} + \dots..$$

En calculant les dérivées, et en remplaçant, comme au numéro précédent, P par sa valeur 900 p en fonction de l'écart p exprimé en *minutes de temps*, on obtient la formule :

$$L = L_0 - \frac{\cos L_0 \cos D}{\sin(L_0 \mp D)} 2\sin^2 \frac{900p}{2} - \frac{\cos^2 L_0 \cos^2 D}{\sin^2(L_0 \mp D)} \left[2 \operatorname{tg} L_0 + \operatorname{cotg}(L_0 \mp D)\right] \times 2\sin^4 \frac{900p}{2} + \dots..$$

le signe *supérieur* ou inférieur de $(L_0 \mp D)$ convenant au méridien *supérieur* ou inférieur.

Il importe de remarquer que :

1° p s'obtient en convertissant en temps de l'astre la différence entre l'heure du chronomètre au moment même de l'observation, et son heure correspondant à l'instant du passage de l'astre au méridien que traverse le navire audit moment ;

2° L_0, qui correspond à $p = 0$, n'est autre qu'une *latitude fictive*, obtenue par la combinaison de la déclinaison D calculée pour l'*heure même de l'observation*, avec la hauteur observée prise comme hauteur méridienne ;

3° La *latitude calculée* L correspond à cette même heure, et non à l'heure où l'astre et le navire traversent *simultanément* le même méridien.

Dans le développement que nous venons d'obtenir, on peut encore, pour simplifier, remplacer $\sin^2 \frac{1}{2} (p \times 900)$ et $\sin^4 \frac{1}{2} (p \times 900)$ par le carré et la quatrième puissance du développement de $\sin \frac{1}{2} (p \times 900)$ en fonction de arc $\frac{1}{2} (p \times 900) \times \sin 1''$. Dans cette nouvelle opération, il faut faire attention que ledit carré fournit un terme en p^4



qu'on doit conserver avec soin. Cette précaution est indispensable pour arriver à un développement susceptible d'être identifié avec celui qu'il est loisible d'obtenir par la méthode du n° 21.

— Quoi qu'il en soit, il résulte de la spécification précise que nous avons donnée aux circumméridiennes dès le début de ce numéro, que la formule à leur adapter doit s'arrêter aux termes en p^2. D'après cette condition, ladite formule déduite des indications précédentes, peut s'écrire :

$$(15) \qquad L = L_0 - \left[\frac{900^2 \times \sin 1''}{2} \times \frac{\cos L_0 \cos D}{\sin(L_0 \mp D)}\right] \times p^2.$$

Cette expression est tout à fait générale, pourvu qu'on donne aux valeurs numériques de L_0 et de D, les signes convenus dans la légende générale page 1. Au surplus, on n'a pas à s'y préoccuper de la vitesse de l'astre en déclinaison ; et si, par ailleurs, on veut avoir la position de l'observateur au moment même où l'astre et le navire traversent *simultanément* le même méridien, il suffit de corriger L du changement en latitude parcouru depuis l'heure de l'observation jusqu'à ce moment. Cette dernière opération revient à tenir compte de la vitesse en latitude.

Quoi qu'il en soit, on pose d'ordinaire :

$$\alpha = \frac{900^2 \times \sin 1''}{2} \times \frac{\cos L_0 \cos D}{\sin(L_0 \mp D)}.$$

Cette quantité se trouve toute calculée dans des tables *ad hoc*, où l'on entre avec L_0 et D pour arguments. Il est aisé de voir qu'elle représente le changement en hauteur de l'astre pendant la minute qui précède ou qui suit le passage de l'astre au méridien du moment de l'observation. Il vient ainsi :

$$(15 \textit{ bis}) \qquad L = L_0 - \alpha p^2 = (90^\circ - H) + D - \alpha p^2, \text{ d'après la fin du n° 17.}$$

— Il importe de remarquer que, si l'on a pris n hauteurs circumméridiennes, α varie avec chaque hauteur ; et, en prenant la moyenne des résultats, on obtient

$$L_m = \frac{\Sigma(90^\circ - H)}{n} + \frac{\Sigma D}{n} - \frac{\Sigma \alpha p^2}{n}.$$

Si l'on admet que le mouvement en latitude soit uniforme, la latitude L_m correspond à l'heure moyenne des observations. De son côté, $\frac{\Sigma D}{n}$ n'est autre que la déclinaison calculée pour cette même heure moyenne.

N° 21. Autre formule pour les circumméridiennes, en tenant compte du mouvement de l'astre en déclinaison et de la vitesse du navire. — La théorie des circumméridiennes, en tenant compte de la vitesse du navire, peut encore être traitée autrement. A cet effet, désignons par :

L_1 la latitude au moment même du passage *simultané* de l'astre et du navire au même méridien ;
D_1 la déclinaison à ce même moment.
p_1 l'angle compris entre le cercle de déclinaison de l'astre à l'instant de l'observation et le méridien du navire audit moment ; cet angle étant exprimé en *minutes de temps*, et étant *positif* à l'*Ouest* du méridien, et négatif à l'Est ;
λ, γ et δ les vitesses en latitude, longitude et déclinaison par minute de temps de l'astre ; ces vitesses étant exprimées en secondes de degré, et leurs signes étant conformes aux indications de la légende page 1.

Dans la formule (1) du n° 1 considérée comme se rapportant au méridien du navire au moment même de l'observation, remplaçons L, D et P par $(L_1+\lambda\times p_1)$, $(D_1+\delta\times p_1)$ et $900p_1\left(1-\frac{\gamma}{900}\right)$ (ou le supplément à 180° de cette dernière quantité pour le passage au méridien inférieur). Il vient ainsi :

$$\sin H=\sin(L_1+\lambda\times p_1)\sin(D_1+\delta\times p_1)-\cos(L_1+\lambda\times p_1)\cos(D_1+\delta\times p_1)\cos\left[900p_1\left(1-\frac{\gamma}{900}\right)\right].$$

Développons maintenant H en fonction de p_1 d'après la formule générale :

$$H=H_0+\left(\frac{dH}{dp_1}\right)_0 p_1+\left(\frac{d^2H}{dp_1^2}\right)_0\frac{p_1^2}{1.2}+\left(\frac{d^3H}{dp_1^3}\right)_0\frac{p_1^3}{1.2.3}+\ldots$$

En effectuant les opérations indiquées, on trouve en se bornant au second terme :

$$(\text{Méridien supérieur})\ H=H_0\pm(\lambda-\delta)p_1-\frac{900^2\sin 1''}{2}\frac{\cos L_1\cos D_1}{\sin(L_1-D_1)}p_1^2\left(1-\frac{\gamma}{900}\right)^2,$$

le signe + ou — de $(\lambda-\delta)$ convenant au passage du côté du pôle élevé ou abaissé ;

$$(\text{Méridien inférieur})\ H=H_0+(\lambda-\delta)p_1+\frac{900^2\sin 1''}{2}\frac{\cos L_1\cos D_1}{\sin(L_1+D_1)}p_1^2\left(1-\frac{\gamma}{900}\right)^2.$$

Dans ces deux formules, H_0 qui correspond à $p_1=0$, se confond avec la hauteur de l'astre pour le moment où il traverse le même méridien que le navire.—D'autre part, p_1 se déduit de l'intervalle en temps, écoulé entre l'observation et l'heure dudit moment calculée comme il a été dit au n° 18.

En posant :

$$\alpha_1 = \frac{900^2 \sin 1''}{2} \frac{\cos L_1 \cos D_1}{\sin(L_1 \pm D_1)} \left(1 \mp \frac{\gamma}{900}\right)^2,$$

les deux formules précédentes donnent :

$$H_0 = H \mp (\lambda - \delta) p_1 + \alpha_1 p_1^2;$$
$$H_0 = H - (\lambda + \delta) p_1 - \alpha_1 p_1^2.$$

Les expressions $[\mp (\lambda - \delta) p_1 + \alpha_1 p_1^2]$ et $[-(\lambda + \delta) p_1 - \alpha_1 p_1^2]$ portent le nom de ***réduction au méridien***, parce qu'elles représentent la correction à faire subir à la hauteur observée H pour la convertir en hauteur méridienne H_0.

Une fois H_0 connue, le calcul s'achève comme dans le cas d'une hauteur méridienne ordinaire. On obtient ainsi, d'après la fin du n° 17, et en nous bornant à ce qui concerne le méridien inférieur :

$$L_1 = (90° - H) + (D_1 + \delta p_1) - \lambda p_1 - \alpha_1 p_1^2.$$

Mais on peut remarquer que $(L_1 + \lambda p_1)$ et $(D_1 + \delta p_1)$ ne sont autres que la latitude et la déclinaison à l'heure même de l'observation. Ces quantités sont donc égales aux quantités L et D du numéro précédent. Il vient dès lors :

$$L = (90° - H) + D - \alpha_1 p_1^2 = L_0 - \alpha_1 p_1^2,$$

L_0 étant alors la latitude fictive définie au même numéro.

— Dans le cas de *n* observations, on obtient, en remarquant que α_1 est présentement le même pour toutes les hauteurs :

$$L_m = \frac{\Sigma(90° - H)}{n} + \frac{\Sigma D}{n} - \alpha_1 \frac{\Sigma p_1^2}{n}.$$

La latitude L_m se rapporte ici, comme au n° 20, à l'heure moyenne des observations.

Si l'on voulait avoir sa valeur $L_{m,1}$ pour l'heure du passage de l'astre et du navire au même méridien, il suffirait de sommer l'expression en L_1 ci-dessus; et il viendrait :

$$L_{m,1} = \frac{\Sigma(90° - H)}{n} + D_1 + (\delta - \lambda) \frac{\Sigma p_1}{n} - \alpha_1 \times \frac{\Sigma p_1^2}{n}.$$

N° 22. Comparaison des deux méthodes précédentes concernant les circumméridiennes. Troisième méthode pour calculer une latitude circumméridienne. Circonstances favorables à l'usage des circumméridiennes. — La dernière méthode que nous venons de développer est due à M. Mas Saint-Guiral, qui est le premier à avoir tenu compte, à bord du vaisseau-école, du mouvement de l'astre en déclinaison ainsi que

de la vitesse du navire dans la théorie des circumméridiennes. Elle a été reproduite par M. Hilleret dans sa « *Théorie générale des circumméridiennes.* »

Cette méthode et la précédente ne diffèrent entre elles comme résultat que par les termes $\alpha_1 \frac{\Sigma p_1^2}{n}$ et $\frac{\Sigma \alpha p^2}{n}$. — La quantité α_1 a l'avantage de pouvoir se mettre hors du signe Σ. Mais le calcul *rigoureux* de sa valeur n'est pas possible; car elle renferme L_1 qui est la latitude au moment du passage *simultané* de l'astre et du navire au même méridien, et qui, se trouvant inconnue, se remplace par la latitude estimée ou par une latitude obtenue en considérant comme méridienne une des hauteurs observées. — De son côté, la quantité α de la première méthode a l'inconvénient d'être différente pour chaque observation, et, par conséquent, de compliquer le calcul du terme sommé où elle entre. Mais elle offre l'avantage que chacune de ses valeurs peut se calculer *rigoureusement;* attendu que la latitude que chaque valeur renferme, est une latitude *fictive* déduite de la hauteur observée correspondante.

Toutefois, pour la pratique, ce sont là des nuances entièrement secondaires, et les deux formules n'en font qu'une. Car le terme α variant très-peu, on le considère comme *constant*, en calculant à cet effet sa valeur avec la latitude fictive concernant l'observation la plus intermédiaire. Cette hypothèse serait, du reste, entièrement rigoureuse, s'il n'y avait que deux hauteurs, et qu'elles fussent correspondantes. Dans tous les cas, elle permet de faire sortir cette quantité de dessous le signe Σ, et de simplifier la détermination du terme où elle entre.—Le manque de rigueur qui résulte, soit de cette manière de faire, soit de la façon dont on est obligé de calculer α_1, est insignifiant, surtout eu égard aux autres erreurs provenant des termes négligés dans les développements. Néanmoins, nous avons cru utile de donner *avec une entière précision* les termes employés des deux formules de circumméridiennes aptes à tenir compte du mouvement de l'astre en déclinaison et de la vitesse du navire; car les traités de navigation n'ont donné jusqu'ici cette question que d'une manière fort obscure, en ne précisant pas comme nous venons de le faire : 1° à quel moment correspond chaque latitude considérée; 2° quelle est l'espèce de latitude qui doit entrer rigoureusement dans le terme α ou α_1.

— Il nous reste à dire qu'il existe une troisième méthode pour

calculer une latitude circumméridienne en tenant compte de la vitesse du navire et du mouvement de l'astre en déclinaison.

Dans cette méthode, on ramène toutes les hauteurs au zénith qui correspond au moment même du passage *simultané* de l'astre et du navire au même méridien. Pour cela, on commence par calculer l'heure chronométrique dudit moment (n° 18) ; et cette heure comparée avec celle de chaque hauteur permet de trouver le nombre de milles parcourus entre chaque observation et le moment en question, ce qui est nécessaire pour faire subir aux hauteurs les corrections bien connues nécessitées par le changement de zénith. On est alors ramené au cas de circumméridiennes observées dans un même lieu. — Il reste encore à tenir compte, au besoin, du mouvement de l'astre en déclinaison, ce qui exige qu'on calcule cet élément pour l'heure de Paris correspondant à chaque observation elle-même.

La méthode dont il s'agit est donc, à tous égards, plus longue que les deux autres.

— Quelle que soit la méthode employée pour la détermination de la latitude par les circumméridiennes, les circonstances favorables à cette détermination se présentent lorsque les hauteurs observées sont deux à deux correspondantes ; car, d'après le n° 62, l'influence des erreurs d'observation se réduit alors à peu de chose.

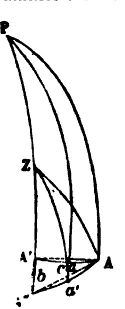
En revanche, les formules de circumméridiennes font défaut lorsque les quantités L et D sont égales et de même nom, ce qui correspond à une hauteur méridienne de 90° ; car alors le terme α tend vers l'infini, et le développement sur lequel est basée la formule, cesse d'être licite. — D'ailleurs, pour les hauteurs circumméridiennes plus grandes que 80° environ, les changements rapides de l'astre en azimut rendent les observations précises impraticables.

N° 23. Démonstration géométrique de la formule des circumméridiennes. — La formule (15) du n° 20 peut s'établir par les procédés géométriques d'une manière très-simple. Nous allons donner cette démonstration, non-seulement parce qu'elle n'est point connue, mais afin de bien montrer quelle attention réclame l'usage de ces procédés pour ne pas commettre, en de certains cas, de grossières erreurs.

Soient PZ, *fig.* 3, le méridien, A la position de l'astre au moment où il a été observé à un écart horaire du méridien égale à ZPA $= p$ en *minutes de temps*. Des points P et Z comme centres, décrivons les arcs AaA' et $Aa'A''$. L'arc $A'bA''$ représente évidemment la différence $(L_0—L)$ de

la latitude L au moment même de l'observation, à la latitude fictive L_0 déduite de la distance zénithale ZA provenant de l'observation et considérée comme distance zénithale méridienne. Cet arc est donc, en fait, l'inconnue. — Si on regarde p comme un très-petit du 1er ordre, ladite différence est évidemment un très-petit du 2e ordre, d'après les proportions du triangle curviligne dont les trois sommets sont A, A' et A''. Au premier abord, on serait conduit à tirer l'arc inconnu A'bA'' dudit triangle curviligne, en considérant cet arc ainsi que les arcs A'aA et A''a'A, comme rectilignes, et se confondant avec les cordes A'A'', A'A et A''A. Dans cette manière d'opérer, l'angle A'AA'' des cordes AA' et AA'' serait regardé comme égal à l'angle formé par les tangentes en A aux arcs A'aA et A''a'A. Mais ces deux angles différant entre eux d'une quantité très-petite du premier ordre, leur égalité n'est pas présentement admissible, eu égard à l'ordre de petitesse de l'arc A'bA''. Il faut dès lors suivre une autre marche. — A cet effet, nous considérerons directement le triangle rectiligne A'AA'' formé par les cordes mêmes A'A, A''A et A'A'' des arcs A'aA, A''a'A et A'bA''. On trouve ainsi rigoureusement :

Fig. 3, relative à la démonstration géométrique de la formule des circumméridiennes.



$$A'A'' = A'A \frac{\sin A'AA''}{\sin A'A''A}.$$

Si l'on mène les deux arcs de cercle Pa et Za' respectivement par les milieux a et a' des arcs A'aA et A''a'A, l'angle c formé par ces arcs sera *rigoureusement* égal à l'angle A'AA'' des deux cordes A'A et A''A. D'ailleurs, en remplaçant sin A'A''A par sin 90°, qui en diffère d'un terme du second ordre, on n'affectera le résultat que d'une erreur du quatrième ordre.

Nous aurons donc :

$$A'A'' = A'A \sin c.$$

Remplaçons maintenant les cordes par les arcs. Nous ne négligerons que des termes au moins du troisième ordre, ce qui est licite; et nous arriverons à l'égalité :

$$A'bA'' = A'aA \sin c.$$

Or, on a évidemment, en donnant à p la même signification qu'au n° 20 :

$$A'aA = p \times 15 \times 60 \times \sin 1'' \times \cos D = p \times 900 \times \sin 1'' \times \cos D.$$

4

D'autre part, en remarquant qu'il suffit de connaître sin c aux termes près du second ordre, et que PZ et Zc valent, dans ces mêmes limites $(90^\circ - L_0)$ et $(90^\circ - H)$, on tirera du triangle PcZ :

$$\sin c = \frac{\frac{p}{2} \times 15 \times 60 \times \sin 1'' \times \sin PZ}{\sin Zc} = \frac{\frac{p}{2} \times 900 \times \sin 1'' \times \cos L_0}{\cos H}.$$

Et il viendra, somme toute, en se rappelant que $A'bA'' = -(L - L_0)$:

$$L - L_0 = -\left(\frac{900^2 \times \sin 1''}{2} \times \frac{\cos L_0 \cos D}{\cos H}\right) \times p^2;$$

$$= -\left(\frac{900^2 \times \sin 1''}{2} \times \frac{\cos L_0 \cos D}{\sin (L_0 \mp D)}\right) \times p^2. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

1re PARTIE. — § IV. Cas d'une seule observation : remplacement de la droite de hauteur par un autre lieu géométrique du navire, curviligne sur la carte.

N° 24. Portion de la droite de hauteur qu'il est seule licite de considérer comme renfermant le navire. But du remplacement de cette droite par un lieu géométrique curviligne du navire. — La droite de hauteur ne peut, en principe, être regardée comme un lieu géométrique du navire que sur une certaine étendue de part et d'autre de son point déterminatif. Cette étendue est limitée par la condition que la distance de ses points extrêmes au cercle ou à la courbe de hauteur, demeure un très-petit du second ordre (nos 7 et 8). Elle se trouve d'autant plus restreinte que le rayon du cercle ou le rayon de courbure de la courbe au point considéré, est lui-même plus petit.

Le TABLEAU I de la fin du texte construit par M. Perrin permet, par sa combinaison avec la *table* 1 des TABLES du même auteur, d'apprécier sur une carte réduite les distances de l'espèce, eu égard implicitement aux coordonnées du point déterminatif, aux coordonnées de l'astre et à la hauteur considérée. On est donc ainsi à même de fixer, suivant le degré d'approximation dont on convient (n° 7), la *portion* de droite de hauteur en dehors de laquelle le navire ne *saurait* être contenu.

Quant à cette portion elle-même, elle est susceptible de ne pas non plus renfermer le navire, si le point déterminatif de la droite de hauteur est écarté de la véritable position de celui-ci d'une quantité supérieure à un très-petit du premier ordre. Et encore, quand cette dernière circonstance n'existe pas, il y a à se préoccuper des erreurs

possibles commises sur la hauteur, et qui, de leur côté, peuvent aussi rejeter le bâtiment en dehors de ladite portion. Nous montrerons au n° 37 jusqu'à quel point il y a moyen de se mettre en garde contre ces défectuosités.

En laissant de côté la considération des erreurs sur la hauteur, on s'est proposé de faire disparaître les deux autres causes d'imperfection, que nous venons de signaler, de la droite de hauteur, abstraction faite des cas où l'on peut remplacer (n° 17) cette droite par un méridien ou un parallèle. Le moyen le plus rationnel et le plus complet, pour atteindre le but proposé, est de substituer à ladite droite le cercle de hauteur lui-même, et, par suite, sa projection sur la carte, en partie ou en totalité, ou des circonférences se confondant sensiblement avec cette partie ou cette totalité. Mais avant qu'on ait eu bien étudié les courbes de hauteur, on a craint des difficultés de construction ; et des auteurs ont été conduits à proposer l'emploi de paraboles osculatrices aux cercles de hauteur sur la sphère, ou auxdites courbes sur la carte.

* **N° 25. Remplacement de la droite de hauteur par une parabole osculatrice au cercle de hauteur.** — C'est ainsi que M. Boitard, dans sa « *Note sur la détermination du point* », a imaginé de remplacer la droite de hauteur par une parabole sphérique osculatrice (*) au cercle de hauteur, passant par le point déterminatif déduit de la latitude estimée (n° 2). L'équation de cette parabole est de la forme :

$$\Delta P = \frac{dP}{dL}\Delta L + \frac{d^2P}{dL^2}\frac{\sin 1'}{1.2}(\Delta L)^2. \qquad (16)$$

Les arcs ΔP, ΔL, forment les coordonnées, comptées à partir du point de contact, de la parabole et du cercle. Les coefficients $\frac{dP}{dL}$ et $\frac{d^2P}{dL^2}$ tirés de la formule fondamentale du triangle de position rappelée au n° 1, donnent :

$$\Delta P = \frac{\cot g Z}{\cos L}\Delta L + \frac{1}{\cos^2 L}\left(\cot g Z \sin L - \frac{\cot g P}{\sin^2 Z}\right)\frac{\sin 1'}{1.2}(\Delta L)^2. \qquad (16\ bis)$$

Le coefficient de $(\Delta L)^2$ peut prendre une autre forme qu'il est intéressant de connaître. A cet effet, on élimine P au moyen de la relation

(*) Cette dénomination porte, bien entendu, sur la nature de l'équation, et non sur la forme du contour de la courbe considérée.

tg H cos L = cotg P sin Z + sin L cos Z, ce qui donne pour ledit coefficient :

$$\frac{\sin L \cos Z(1+\sin^2 Z) - \text{tg} H \cos L}{\cos^2 L . \sin^3 Z} \cdot \frac{\sin 1'}{1.2}.$$

Aux valeurs naturelles précédentes des coefficients $\frac{dP}{dL}$ et $\frac{d^2P}{dL^2}$, M. Boitard s'est proposé d'en substituer d'autres, en s'y prenant d'ailleurs de deux manières.

Dans l'une de ces manières, il a commencé par exprimer les coefficients $\frac{dP}{dL}$ et $\frac{d^2P}{dL^2}$ en fonction des lignes trigonométriques de L, de $\frac{\Delta + H + L}{2} = S$, et de $\frac{L + \Delta - H}{2} = (S - H)$. Il est parvenu ainsi à calculer ces coefficients en fonction des différences premières et des différences secondes de [log cos S + log sin (S — H) — log cos L], d'une part, et log sin $\frac{P}{2}$, d'autre part. L'auteur a montré dans ces transformations beaucoup de sagacité analytique. Malheureusement la détermination des coefficients par le principe qui nous occupe n'est qu'approchée ; car elle repose sur des développements en séries dont on ne prend que les premiers termes. D'ailleurs, elle est d'une certaine longueur, et expose à des erreurs de signe dans les applications numériques.

La seconde manière, proposée par M. Boitard pour déterminer $\frac{dP}{dL}$ et $\frac{d^2P}{dL^2}$, consiste à égaler, dans la formule (16), ΔL successivement à + 1′ et — 1′, et à trouver directement $(\Delta P)_{+1'}$ et $(\Delta P)_{-1'}$ par le calcul habituel d'angle horaire, combiné, si l'on veut, avec le mode Pagel. Il est évident qu'on obtient ainsi :

$$\frac{dP}{dL} = \frac{1}{2}\left[(\Delta P)_{+1'} - (\Delta P)_{-1'}\right]; \quad \frac{d^2P}{dL^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{(\Delta P)_{+1'} + (\Delta P)_{-1'}}{\sin 1'}\right].$$

Cette seconde manière d'opérer est beaucoup plus pratique que la première, et la seule à recommander.

Il importe d'ailleurs de remarquer que pour Z = 0° ou 180°, la formule (16 *bis*) n'est plus applicable, attendu que le coefficient de ΔL devient manifestement infini, sans compter que le coefficient de ΔL^2 le devient pareillement, ainsi que cela se voit en considérant la seconde forme susmentionnée plus haut de ce coefficient, la première forme se

trouvant présentement indéterminée. Une restriction analogue à la précédente s'applique aux très-grandes latitudes, quel que soit Z. Dans tous les cas, pour lesdites valeurs 0° et 180° de Z, la parabole osculatrice devient un parallèle.

Pour $Z = 90°$ la formule se réduit au terme du second ordre; et la parabole osculatrice devient presque un méridien.

En tout état de cause, cette parabole ne s'emploie pas avec une seule hauteur; car elle ne se prête pas à un usage graphique. On n'est à même de s'en servir que quand on a pris une deuxième hauteur, pour trouver la position du navire par son intersection avec la parabole osculatrice concernant cette deuxième hauteur (n° 45).

* **N° 26. Remplacement sur la carte de la droite de hauteur par une corde de parabole osculatrice à la courbe de hauteur.** — M. Fasci, de son côté, a proposé, dès 1868, de substituer, sur la carte réduite, à la droite de hauteur, une certaine corde y parallèle, et qu'il détermine en tenant compte des termes du second ordre, et en partant du point de la courbe de hauteur déduit de la latitude estimée.

La méthode qu'il a suivie, à cet effet, se trouve exposée dans un «*Mémoire sur le point observé*». L'auteur ayant tenu à n'employer que des démonstrations élémentaires, dans l'espérance de mettre son travail à la portée d'un plus grand nombre de lecteurs, a fini par le compliquer outre mesure. En y regardant de près, on reconnaît que la corde en question appartient à une parabole osculatrice à la courbe de hauteur sur la carte réduite. Cette parabole a une équation de la forme :

$$\Delta P = \frac{dP}{dL_c}\Delta L_c + \frac{d^2P}{dL_c^2}\frac{\sin 1'}{1.2}(\Delta L_c)^2,$$

en représentant par :

L_c les latitudes croissantes.
ΔP, ΔL_c les coordonnées, exprimées d'ailleurs en minutes de l'équateur, comptées à partir du point de contact de la parabole avec la courbe de hauteur.

Pour trouver les coefficients $\frac{dP}{dL_c}$, $\frac{d^2P}{dL_c^2}$, on peut avoir recours à l'équation générale (19) ci-après des courbes de hauteur sur une carte réduite; mais il est plus court de se servir des relations (1 *bis*) et (18) du n° 28, d'où provient ladite équation. Il suffit, à cet effet, de considérer P comme une fonction implicite de L_c, ce qui donne :

$$\frac{dP}{dL_c} = \frac{dP}{dL}\times\frac{dL}{dL_c}; \quad \frac{d^2P}{dL_c^2} = \frac{d^2P}{dL^2}\left(\frac{dL}{dL_c}\right)^2 + \frac{dP}{dL}\times\frac{d^2L}{dL_c^2}.$$

Enfin, on peut encore tirer les coefficients en question de l'équation (19 *bis*) du n° 30 des courbes de hauteur exprimée en lignes hyperboliques.

Quel que soit le mode d'opérer employé, on trouve :

$$(17) \qquad \Delta P = \operatorname{cotg} Z \times \Delta L_c - \frac{\operatorname{cotg} P}{\sin^2 Z} \frac{\sin 1'}{1.2} \times (\Delta L_c)^2.$$

Cette équation peut s'écrire :

$$(17\ bis) \qquad \Delta L_c = \operatorname{tg} Z \times \Delta P + \frac{\operatorname{cotg} P \times \sin 1'}{\sin 2Z} \times (\Delta_1 L_c)^2,$$

si l'on suppose qu'on ait attendu une seconde observation pour en déduire, par l'intersection des deux droites de hauteur, une valeur suffisamment bonne de la latitude, et par suite de $(\Delta_1 L_c)^2$.

C'est là l'expression à laquelle est arrivé M. Fasci. Elle représente une corde appartenant à la parabole osculatrice (17), et menée parallèlement à la droite de hauteur, à une distance de celle-ci, qui, comptée sur le méridien du point de contact, vaut, en minutes de l'équateur, $\frac{\operatorname{cotg} P \sin 1'}{\sin 2Z} \times (\Delta_1 L_c)^2$. Cette corde sera un lieu géométrique qui contiendra le navire avec une approximation plus grande que la droite de hauteur.

Ce procédé, aussi bien que celui de M. Boitard, entraîne avec lui, outre des longueurs de calcul, les inconvénients inhérents au grand écart susceptible d'exister entre la véritable position du navire, et le point de contact déduit de la latitude estimée. On pourrait, il est vrai, employer ces deux procédés avec le point de contact déterminé par la méthode Marcq. Mais alors les opérations n'en finiraient pas; car il faudrait calculer exprès l'angle horaire P, propre au point de contact même, et dont on n'a pas besoin dans ladite méthode. D'ailleurs le procédé Fasci échappe, aussi bien que la méthode Boitard, lorsque Z atteint 0° ou 180°. En effet, le coefficient du premier terme de la formule (17) tend encore ici vers l'∞. Il en est de même, du reste, de celui du second terme; car ce deuxième coefficient peut s'écrire, après l'élimination de P effectuée comme au numéro précédent :

$$\frac{\operatorname{tg} H \cos L - \sin L \cos Z}{\sin^2 Z} \times \frac{\sin 1'}{1.2}.$$

Donc l'équation (17) et par suite l'équation (17 *bis*) ne sont plus ap-

plicables dans ce cas particulier. La parabole osculatrice se confond alors avec un parallèle et avec la corde donnée par l'équation (17 *bis*). Une restriction analogue à la précédente convient aux latitudes très-élevées, quel que soit Z; car, en pareil cas, $\Delta_1 L_c$ tend à croître au delà de toute limite.

Pour $Z = 90°$, il faut se reporter exclusivement à l'équation (17). On voit alors que la parabole osculatrice se confond à peu près avec le méridien du point de contact sur la courbe de hauteur; et la corde à considérer devient une droite parallèle à ce méridien, et qui en est distante de $\cot g\, P \times \frac{\sin 1'}{1 \cdot 2} \times (\Delta_1 L_c)^2$.

N° 27. Remplacement sur la carte de la droite de hauteur par une portion de la courbe de hauteur ou de cercles particuliers. — On est revenu dans ces derniers temps à un ordre d'idées plus rationnel que les deux précédents, quand on ne veut pas se contenter de la droite de hauteur (n° 24). Cet ordre d'idées consiste à tracer sur la carte réduite plusieurs points de la courbe de hauteur elle-même, et à les joindre par un trait continu. Ou plus simplement encore, on substitue à la courbe de hauteur le cercle osculateur passant par le point déterminatif de la droite de hauteur, et représentant dans une certaine étendue, à droite et à gauche de ce point, un lieu géométrique presque rigoureux du navire. Enfin, dans le cas de faibles distances zénithales, on remplace la courbe de hauteur par un cercle spécial qui se confond sensiblement avec cette courbe dans toute son étendue.

L'ordre d'idées dont il s'agit a été mis en avant par M. Hilleret dans son « *Étude sur les courbes de hauteur* », mémoire tout à fait original, et qui a contribué puissamment à jeter un jour nouveau sur les perfectionnements actuels de la navigation. Depuis lors, cet ordre d'idées a été repris par d'autres auteurs, qui l'ont plus ou moins modifié pour les applications. Mais avant d'indiquer les modes d'opérer, il importe d'entrer dans quelques détails sur les courbes de hauteur.

*** N° 28. Équation exponentielle des courbes de hauteur.** — Reprenons la relation fondamentale du triangle de position écrite sous la seconde forme donnée au n° 1 :

$$\sin H = \sin L \sin D + \cos L \cos D \cos (G_a - G), \qquad (1\ bis)$$

où G et G_a sont les longitudes géographiques du lieu et de l'astre, longitudes que l'on considère comme *positives* ou négatives suivant

qu'elles sont *Ouest* ou Est, ainsi qu'il a été convenu dans la légende de la page 1.

Cette relation n'est autre que l'équation générale des cercles de hauteur sur la sphère, en y regardant les éléments L et G de la position du navire comme variables, et au contraire les éléments H, D et G_a de l'astre comme constants. Dès lors, pour avoir l'équation des courbes de hauteur sur la carte réduite, il suffit de joindre à ladite relation, l'équation bien connue :

$$(18)\qquad L_c = \log\text{nép.}\,\text{tg}\left(45^\circ + \frac{L}{2}\right).$$

En éliminant L entre (1 *bis*) et (18), il vient pour l'équation dont il s'agit :

$$(19)\qquad (\sin H - \sin D)e^{2L_c} - 2\cos D\cos(G_a - G)e^{L_c} + (\sin H + \sin D) = 0.$$

Pour obtenir une expression plus simple et plus commode à étudier, M. Villarceau a proposé de remplacer dans la formule précédente, les exponentielles par leurs valeurs en lignes trigonométriques hyperboliques.

∗ N° 29. Notions sur les lignes trigonométriques hyperboliques. — Les lignes trigonométriques hyperboliques, qui sont encore peu connues en France, résultent des considérations développées ci-après.

On sait qu'on a pour les sinus, cosinus et tangentes ordinaires, les relations suivantes :

$$\sin z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}};$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \ldots = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2};$$

$$\text{tang}\, z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{(e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}) \times \sqrt{-1}}.$$

L'esprit de corrélation conduit à examiner ce qu'on peut tirer de ces équations, si l'on *remplace* dans les seconds membres $z\sqrt{-1}$ par u, et si de plus on pose, pour les premiers membres, les quantités $\sqrt{-1}\sin z$, $\cos z$ et $\sqrt{-1}\,\text{tang}\, z$, respectivement égales à trois lignes fictives, qu'on écrira $\sin\text{h}.u$, $\cos\text{h}.u$, $\text{tg}\,\text{h}.u$. Il importe de bien remarquer que les remplacements dont il s'agit n'impliquent aucune équation entre z et u, qui sont respectivement des quantités réelles. Dans

tous les cas, ces remplacements donnent :

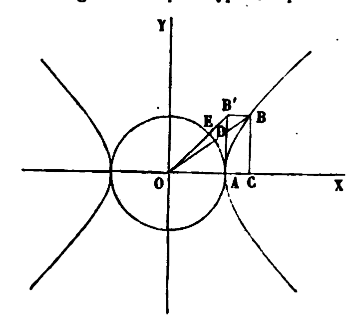
$$\sin \mathrm{h} \,.\, u = u + \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{u^5}{1.2.3.4.5} + \ldots = \frac{e^u - e^{-u}}{2};$$

$$\cos \mathrm{h} \,.\, u = 1 + \frac{u^2}{1.2} + \frac{u^4}{1.2.3.4} + \ldots = \frac{e^u + e^{-u}}{2};$$

$$\mathrm{tang}\, \mathrm{h} \,.\, u = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = \frac{\sin \mathrm{h} \,.\, u}{\cos \mathrm{h} \,.\, u}.$$

Les lignes fictives sin h . u, cos h . u, tg h . u, sont appelées sinus, cosinus et tangente *hyperboliques*. Pour justifier ces dénominations, nous remarquerons qu'en vertu de la relation (20) ci-après, les valeurs des deux premières des quantités en question ne sont autres que l'ordonnée BC, *fig.* 4, et l'abscisse OC d'un point quelconque de l'hyperbole équilatère $x^2 - y^2 = 1$ rapportée à ses axes, supposés égaux chacun à l'unité : cette égalité supposant d'ailleurs que u représente le double de l'aire du secteur hyperbolique OAB, compris entre le demi-axe réel OA, la portion d'hyperbole AB et le rayon vecteur OB, mené du centre de l'hyperbole au point considéré. Or ces deux coordonnées sont justement corrélatives de celles d'un point appartenant au cercle $x^2 + y^2 = 1$, et correspondant à un angle au centre z, soit au secteur circulaire dont le double a pour expression z, eu égard à ce que le rayon du cercle vaut 1. — Ceci implique que, dans la théorie des lignes hyperboliques, il faut prendre pour *l'argument* des deux sortes de lignes trigonométriques, non plus un angle, mais le double d'un secteur, soit circulaire, soit hyperbolique. — Ajoutons que la tangente hyperbolique n'est autre que la tangente AD à l'hyperbole menée par le sommet et limitée au rayon vecteur OB.

Fig. 4, relative à la spécification des lignes trigonométriques hyperboliques.



En tout état de cause, après avoir défini, comme nous venons de le faire, les lignes hyperboliques, on trouve tout de suite qu'il existe entre elles des relations *analogues* (mais non identiques) à celles qui concernent les lignes trigonométriques circulaires. C'est ainsi qu'on trouve :

$$\cos \mathrm{h}^2 . u - \sin \mathrm{h}^2 . u = 1; \qquad \sin \mathrm{h}^2 . u = \frac{\mathrm{tg}\, \mathrm{h}^2 . u}{1 - \mathrm{tg}\, \mathrm{h}^2 . u}.$$

De son côté, la différentiation des lignes hyperboliques se déduit

de la valeur de ces lignes en exponentielles, et donne des règles, sinon identiques, du moins analogues aux règles convenant aux lignes trigonométriques circulaires. On a de la sorte :

$$d \sin h.u = \cos h.u\, du,$$
$$d \cos h.u = \sin h.u\, du.$$

— L'emploi des lignes hyperboliques offre l'avantage d'alléger beaucoup, comme le montre l'exemple du n° 30, les formules à exponentielles ; et dès lors, eu égard à cette circonstance, il simplifie la discussion des courbes que représentent ces formules, et les développements divers qu'on peut avoir à en tirer.

Il nous reste à dire que les sinus hyperboliques croissent depuis 0 jusqu'à $\pm \infty$, et jouissent de la propriété de pouvoir représenter toute quantité réelle, de même qu'une tangente ordinaire. On est donc en droit de poser la relation générale suivante :

$$\sin h.u = BC = tg\, V = B'A,$$

u étant, d'après ce qui a été convenu ci-dessus, le double du secteur hyperbolique OAB ;
V le double du secteur circulaire EOA, qui est numériquement égal à l'arc EA.

Or on a :

$$(20) \qquad u = 2 \sec t\, OAB = yx - 2\int_{x=OA}^{x=OC} y\,dx = \int_{x=OA}^{x=OC} (x\,dy - y\,dx)$$
$$= \int_{x=OA}^{x=OC} \left(\sqrt{1+y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{1+y^2}}\right) dy = \int_{x=OA}^{x=OC} \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Comme on a $y = \sin h.u$, et par suite $y = \text{tang } V$, il vient :

$$u = \int_{x=OA}^{x=OC} \frac{dV}{\cos V} = \log \text{nép.} \, tg\left(45° + \frac{V}{2}\right).$$

Cette relation montre qu'on peut obtenir les sinus hyperboliques avec les tables ordinaires. Car, connaissant l'argument u de la ligne hyperbolique, on trouvera, à l'aide d'une table de latitudes croissantes, l'argument auxiliaire V dans la colonne des latitudes *ordinaires* vis-à-vis de u lu dans la colonne des latitudes croissantes ; et la tangente de cet angle V, prise dans une table ordinaire, ne sera autre que $\sin h.u$.

* **N° 30. Équation des courbes de hauteur en lignes hyperboliques. Distinction des courbes de hauteur en trois classes.** — En remplaçant dans l'équation (19) du n° 28, l'exponentielle e^{L_c} et son carré par des lignes hyperboliques, on trouve :

$$(19\ bis) \qquad \cos h.L_c \times \sin H - \sin h.L_c \times \sin D - \cos D \cos (G_a - G) = 0.$$

Cette relation se déduit plus facilement de l'équation (1 *bis*) rappelée audit n° 28, en remarquant qu'on a :

$$\sin h . L_c = \operatorname{tg} L;$$

et par suite :

$$\sin L = \frac{\operatorname{tg} L}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 L}} = \frac{\sin h . L_c}{\sqrt{1+\sin h^2 . L_c}} = \frac{\sin h . L_c}{\cos h . L_c};$$

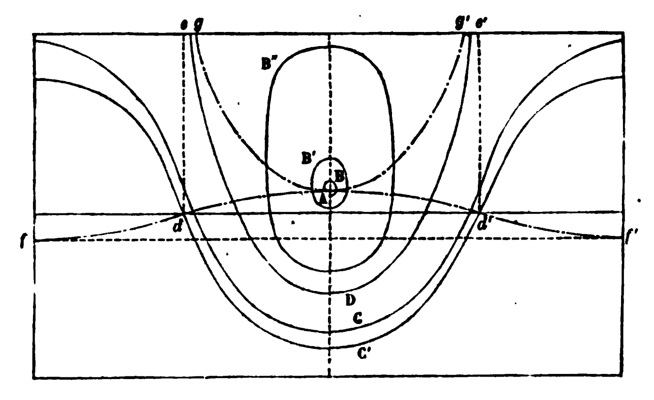
$$\cos L = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 L}} = \frac{1}{\cos h . L_c}.$$

— En discutant l'équation générale (19) ou (19 *bis*) des courbes de hauteur, on reconnaît que ces courbes se divisent en trois classes, suivant que, *sur la sphère*, le pôle est en dehors, en dedans ou sur le périmètre même du cercle de hauteur.

Dans le premier cas, les courbes de hauteur concernant un même astre A, *fig.* 5, considéré à un moment donné, forment sur la carte des courbes fermées, telles que B, B′ et B″, semblables à un ovale, ayant son grand axe dans le sens d'un méridien, et son petit axe dans le sens d'un parallèle. — Dans le second cas, les courbes sont ouvertes, et affectent, comme C et C′, une forme sinusoïdale. Elles possèdent alors des points d'inflexion, tels que *d*, *d′*, situés sur des méridiens distants de 90° de celui qui passe par le centre de l'astre. — Enfin dans le troisième cas, qui est, en fait, intermédiaire aux deux précédents, comme le pôle est situé à l'infini sur la carte, la courbe de hauteur présente, telle que D, deux branches infinies, comprises entre deux méridiens *de* et *d′e′*, qui en sont les asymptotes.

On trouvera dans l'étude de M. Hilleret, citée au n° 27, toutes les propriétés des trois classes de courbes de hauteur. — Nous préviendrons toutefois que la connaissance de ces propriétés n'est pas nécessaire pour l'usage qu'on peut avoir à faire de ces courbes en navigation.

Fig. 5. — Représentation des trois classes de courbes de hauteur.



Nous nous bornerons à mentionner les deux lieux géométriques $fdAd'f'$ et gAg'. — Le premier de ces lieux renferme les points qui, sur toutes les courbes de hauteur relatives à un même astre pour un moment donné, correspondent à l'angle de position *droit*. Ce lieu géométrique n'est autre que la projection sur la carte du grand cercle tracé sur la sphère, par le centre même de l'astre, perpendiculairement au cercle de déclinaison. Il représente tous les points du globe pour lesquels l'astre observé au moment donné, le sera dans des circonstances favorables, pourvu d'ailleurs qu'il soit au-dessus de l'horizon.

De son côté, le lieu géométrique gAg' représente tous les points du globe pour lesquels l'astre se trouve au premier vertical à l'instant considéré. Ce lieu passe par les extrémités des petits axes de toutes les courbes ovales. De leur côté, lesdits points forment une nouvelle série de positions de l'observateur, pour lesquelles l'astre sera observé dans des circonstances favorables.

N° 31. Rayon et centre de courbure des courbes de hauteur. — Si les propriétés des courbes de hauteur ne sont pas indispensables à connaître pour les besoins de la navigation, il n'en est plus de même de leur rayon de courbure ρ, dont l'usage tend à se répandre de plus en plus. L'expression de ce rayon se déduit facilement de la formule générale des rayons de courbure, en y remplaçant les dérivées qui y figurent par leurs valeurs déduites de l'équation (19) du n° 28 ou (19 *bis*) du n° 30. En d'autres termes, on a :

$$(21) \qquad \rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dL_c}{dP}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2L_c}{dP^2}} = \frac{\cos H}{\cos P \cos D} = \frac{\operatorname{tg} P}{\sin Z}.$$

Le rayon de courbure est ici exprimé en fonction du rayon de la sphère terrestre. Pour avoir sa longueur en *minutes de l'équateur*, il faut poser :

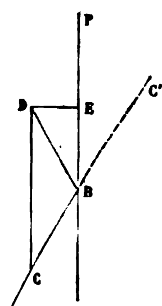
$$\rho = \frac{\operatorname{tg} P}{\sin Z} \times \frac{1}{\operatorname{arc} 1'} = \frac{\operatorname{tg} P}{\sin Z} \times \frac{60 \times 180}{3{,}1416...} = \frac{\operatorname{tg} P}{\sin Z} \times 3438.$$

Ce dernier résultat devrait être multiplié par le cosinus de la latitude du point considéré, pour avoir le rayon de courbure en milles croissants correspondant à cette latitude. Mais cette transformation est généralement inutile en pratique ; car il est plus simple et plus exact, eu égard à l'inégalité des milles croissants, de mesurer sur l'échelle des longitudes de la carte, le nombre de minutes de l'équateur trouvé pour la valeur de ρ.

Il importe de noter que le quotient $\frac{\operatorname{tg} P}{\sin Z}$ se trouve tout calculé dans les TABLES de M. Perrin décrites au n° 13. Il suffit, à cet effet, d'entrer dans la *table* I de ces tables, avec l'angle au pôle P considéré comme déclinaison, et l'azimut Z considéré comme angle au pôle ; le nombre obtenu en faisant cadrer ces deux arguments est précisément la valeur du quotient $\frac{\operatorname{tg} P}{\sin Z}$.

— Pour marquer le centre de courbure, il suffit, d'après ce qui a été dit au n° 10, de mener par le point déterminatif le plus avantageux (n° 5) B, *fig.* 6, une ligne faisant, avec le méridien PB, un angle PBC égal, en grandeur et en nom, à l'azimut relatif audit point. Puis, on porte sur la direction ainsi tracée une longueur égale à ρ, dans le sens de l'astre si P est < 90°, et en sens opposé si P est > 90°.

Fig. 6. relative à la détermination du centre de courbure, propre à un point d'une courbe de hauteur.



Cette longueur peut, du reste, s'obtenir avec rapidité par le tracé graphique que voici :

On mène la ligne DB, *fig.* 6, faisant, avec le méridien PB, un angle PBD = l'angle au pôle P. On prend BE égal $\frac{1}{\text{arc } 1'} = 3438^{\text{min.}}$ de l'équateur. Puis, on mène par E la ligne ED perpendiculaire au méridien, et par D la ligne DC parallèle au méridien. Le point de rencontre C de cette ligne avec la direction azimutale donne du même coup le centre et le rayon de courbure, pourvu que P soit < 90°. Si P > 90°, il faut prolonger BC du côté opposé à B, d'une longueur BC' = BC pour avoir en C' le centre cherché.

Dans la détermination tant graphique que numérique de ρ, il faut, pour opérer avec rigueur, que l'angle au pôle employé corresponde au point déterminatif adopté.

N° 22. Usage en navigation des courbes de hauteur, ou de cercles qui en dérivent. — En résumé, l'étude des courbes de hauteur conduit, pour la recherche d'un lieu géométrique du navire plus rapproché que la droite de hauteur, aux résultats suivants :

— 1° On détermine les coordonnées d'un certain nombre de points de la courbe de hauteur, pris aux environs du point déterminatif le plus avantageux (n° 5). On applique à cette détermination successive

la marche indiquée au n° 11 pour la recherche du deuxième point de sécance, dans l'emploi d'une sécante pour droite de hauteur. Puis, on reporte sur la carte les coordonnées desdits points; et on les joint par un trait continu.

Il est plus expéditif pour la question dont il s'agit, d'avoir recours au procédé de M. Perrin qui dérive de ses TABLES. Dans ce procédé, après avoir marqué le point déterminatif, on prend comme axes des coordonnées la tangente à la courbe de hauteur et la direction azimutale de l'astre. On entre alors dans la *table* I des TABLES en question; et on y prend la valeur (21), donnée n° 31, du rayon de courbure en fonction du rayon de la terre, soit $\rho = \frac{\operatorname{tg} P}{\sin Z}$. Avec l'expression numérique de ce quotient, on entre dans le TABLEAU *ad hoc* de la fin du texte, calculé par M. Perrin. On y trouve, en se donnant des valeurs successives de la *corde* comprise entre le point déterminatif et un point quelconque de la courbe, les projections de ces valeurs sur la direction azimutale de l'astre, les deux sortes de longueur étant d'ailleurs exprimées en *minutes de l'équateur*. On déduit de là les positions de divers points de la courbe, comme il est dit dans l'usage explicatif dudit TABLEAU donné à sa suite. Pour plus de simplicité, les longueurs des cordes vont en croissant de 10 en 10 minutes (de l'équateur) depuis 10 jusqu'à 100; ce qui fournit en pratique des points assez rapprochés. Il ne reste plus qu'à joindre par une courbe continue tous les points ainsi tracés.

Il y a encore possibilité d'employer ici un moyen proposé par M. Bertot. Dans ce moyen, on donne à la latitude estimée trois ou quatre valeurs arbitraires. Ces valeurs combinées avec la longitude estimée demeurée fixe, fournissent autant de points estimés. On marque ces points sur la carte. Puis on calcule les hauteurs estimées comme il dit au n° 4, pour obtenir la différence $(H - H_e)$ entre la hauteur observée et la hauteur estimée. Avec ces différences évaluées en milles croissants et prises comme rayons, on décrit des divers points estimés comme centres, autant de cercles. Enfin, on trace à la règle pliante une courbe tangente à tous ces cercles.

Ces divers modes de tracer une portion de la courbe de hauteur sont, pour ainsi dire, indispensables quand le centre de courbure tombe en dehors des limites de la carte, ou lorsque le rayon de courbure est trop considérable pour qu'on puisse l'employer à tracer le cercle osculateur avec un compas.

En tout état de cause, le procédé de M. Perrin revient simplement à décrire, point par point, un arc de cercle ayant pour centre le centre de courbure (n° 31) afférent au point déterminatif choisi, et pour rayon le rayon de courbure appartenant à ce point. Au moyen de l'équation des courbes de hauteur, M. Perrin s'est assuré que cet arc de cercle reste très-voisin de la courbe dans une étendue, de part et d'autre du point déterminatif, de plus de 400 milles croissants, pour une différence entre le cercle et la courbe moindre que 1/2 mille, la latitude étant comprise entre 0° et 80°. — Tout ceci est, du reste, soumis à la condition que dans l'étendue considérée, la courbe ne présente pas de point d'inflexion. Mais il est toujours facile de s'assurer du fait; car, dans l'équation (19) du n° 28 ou (19 *bis*) du n° 30, où $P = (G_a - G)$, les points d'inflexion, qui n'existent que dans le cas de courbes non fermées, correspondent à des valeurs de la longitude G de l'observateur égales à $(G_a \pm 90^\circ)$, G_a étant la longitude géographique de l'astre.

— 2° Lors de *petites* distances zénithales et du non-voisinage des pôles, il y a moyen de remplacer toute la courbe de hauteur par un certain cercle, qu'on détermine comme voici :

Le centre du cercle est situé sur le méridien de l'astre observé, et a pour ordonnée la moyenne des deux latitudes croissantes correspondant à $(D + 90^\circ - H)$ et à $(D - 90^\circ + H)$. D'un autre côté, la demi-différence de ces mêmes latitudes croissantes fournit le demi grand axe de la courbe de hauteur, lequel s'étend dans le sens des méridiens. Prenant ce demi grand axe pour une latitude croissante, on en déduit une latitude vraie, qui représente le demi petit axe de la courbe de hauteur, lequel se dirige perpendiculairement aux méridiens. Le rayon du cercle se prend égal à la moyenne des deux demi-axes précédents.

Dans cette méthode, l'erreur commise entre la véritable courbe et le cercle, calculée par M. Perrin, ne dépasse pas 1/2 mille croissant pour des distances zénithales variant de 6° 50′ environ à 4° 19′, en même temps que le plus grand des deux éléments, latitude ou déclinaison, considéré en valeur absolue, vaut de 0° à 60°. — L'erreur demeure encore au-dessous de 3 milles croissants pour des distances zénithales oscillant entre 12° 30′ et 11° 45′, en même temps que le plus grand des deux éléments précités varie de 0° à 23° 28′. — D'après cela, on peut dire que les courbes de hauteur du Soleil sont des cercles parfaits, à moins de 1/2 mille croissant près, pour

toutes les distances zénithales comprises entre 0° et 6° environ.

3° Dans les cas de *très-faibles* distances zénithales, on peut remplacer la courbe de hauteur par un cercle plus facile encore à trouver que le précédent. Le centre du cercle coïncide ici avec la position géographique de l'astre observé; et le rayon s'obtient en prenant sur l'échelle des latitudes croissantes, l'espace qui sépare les coordonnées correspondant à des latitudes respectivement égales à $\left(D + \frac{90° - H}{2}\right)$ et $\left(D - \frac{90° - H}{2}\right)$.

Avec une erreur moindre que 1/2 mille croissant entre le cercle et la courbe, le procédé convient pour une distance zénithale s'étendant de 6° 00′ à 0° 00′, en même temps que le plus grand des deux éléments, latitude ou déclinaison, vaut de 0° à 90°, abstraction faite des signes. Mais ce procédé est beaucoup moins exact que le précédent par suite de la rapidité avec laquelle les latitudes croissantes augmentent. D'après M. Perrin, la limite extrême de 6° ne convient que pour le cas où l'astre se trouve juste sur l'équateur. Dès qu'on s'écarte de cette position, la limite de la distance zénithale décroît très-rapidement, si l'on ne veut pas avoir une erreur de plus de 1/2 mille. Ainsi, pour une latitude ou une déclinaison de 5°, la distance zénithale ne doit pas dépasser 3° 00′ environ; pour une latitude ou une déclinaison de 12°, elle doit être inférieure à 2° 04′; et pour une latitude ou une déclinaison de 24°, elle doit être inférieure à 1° 26′. A partir de 24° jusqu'à 90° de latitude ou de déclinaison, la distance zénithale n'a plus à passer que de 1° 26′ à 0°. — En somme, ce procédé, assez rapide d'exécution, ne doit être recommandé que pour les astres ayant moins de 24° de déclinaison, et en particulier dès lors pour le Soleil, lorsque d'ailleurs sa distance zénithale ne dépasse pas 1° 26′ au maximum.

—La substitution que nous venons de donner en 2° et 3° d'un cercle à la courbe de hauteur, constitue une application importante de la théorie des courbes de hauteur à la navigation courante, pour le cas d'astres observés aux environs du zénith.

1re PARTIE. — § V. CAS D'UNE SEULE OBSERVATION : CIRCONSTANCES FAVORABLES A LA DÉTERMINATION D'UNE DROITE DE HAUTEUR.

N° 38. Classification à divers points de vue des circonstances favorables à la détermination d'une droite de

hauteur. Considérations générales sur le degré acceptable d'abréviation de toute formule et sur celui d'approximation des opérations. — Les circonstances favorables à la détermination d'une droite de hauteur doivent être envisagées à cinq points de vue :

1° Au point de vue des erreurs dues à la substitution de la droite de hauteur au cercle de hauteur ;

2° Au point de vue de l'influence des erreurs de la hauteur sur la position du point déterminatif de la droite de hauteur ;

3° Au point de vue de l'influence des erreurs du point estimé sur la position du point déterminatif de la droite de hauteur ;

4° Au point de vue des erreurs pouvant provenir du procédé employé pour tracer la droite de hauteur ;

5° Au point de vue du degré d'approximation des calculs, c'est-à-dire du degré d'approximation adopté pour l'effectuation même des opérations chiffrées. — Ce dernier point de vue est du reste général, en ce sens qu'il s'applique à toute détermination d'une quantité inconnue, dans n'importe quelle branche des sciences. Ainsi, par exemple, si l'on convient de ne prendre les logarithmes qu'avec un certain nombre de décimales, et que l'inconnue dépende d'un *sinus*, l'erreur provenant des quantités négligées dans l'effectuation même des opérations, sera d'autant plus notable que, eu égard aux circonstances particulières du calcul, l'arc correspondant audit *sinus* devra être plus près de 90°.

En ce qui concerne les erreurs afférentes aux chronomètres eux-mêmes, il n'existe évidemment pas de circonstances favorables ; et, comme il a été dit au n° 1, il faut subir intégralement l'influence de ces erreurs, en se rendant compte, du reste, de cette influence ainsi qu'il est indiqué au n° 37. En tout état de cause, nous ne considérerons, pour le sujet même dont il s'agit, que les trois déterminations principales de la droite de hauteur (n°s 2 à 4).

— En sommant les diverses erreurs précédentes, et en général, dans toute espèce de calcul, les erreurs de différentes sortes qu'on est obligé de subir, et en comparant dans chaque cas la somme ainsi obtenue avec le résultat définitif qu'il s'agit de trouver, on obtient la mesure de l'*approximation totale* de ce résultat. C'est par la plus grande concomitance possible des diverses circonstances favorables propres à chaque problème considéré, qu'on parvient à réaliser la meilleure approximation.

Il y a, à ce sujet, une manière de voir qu'il importe de signaler. Beaucoup de personnes, prenant pour base la limite supérieure des erreurs probables sur les observations, prétendent que c'est sur cette limite que doivent se régler le degré acceptable d'abréviation des formules, et celui d'approximation de l'effectuation même des opérations. Mais cette manière de voir n'est pas assez précise, ni assez explicite. — D'abord pour une même erreur sur les hauteurs, les deux degrés dont il s'agit sont variables avec le moment où celles-ci ont été prises. D'autre part, ils dépendent évidemment aussi de l'espèce de l'élément qui représente le résultat cherché. — Selon nous, le plus rationnel serait d'abord de fixer en grandeur absolue, dans les circonstances les plus désavantageuses jusqu'où il est encore licite d'observer en pratique, l'erreur totale acceptable sur ledit résultat, au triple point de vue de l'observation, de l'abréviation des formules et de l'approximation des opérations. Puis, on devrait retrancher de cette erreur la portion afférente à la limite supérieure susmentionnée des erreurs d'observation. On formerait ensuite du reste deux parts égales, appelées à correspondre aux erreurs dues à l'abréviation et à l'approximation dont il s'agit. Dès lors, en remontant de chacune desdites parts aux valeurs mêmes de ces dernières erreurs, on conclurait logiquement le degré d'abréviation des formules et le degré d'approximation des calculs qu'il conviendrait d'adopter.

Hâtons-nous d'ajouter que cette voie n'a pas été suivie jusqu'ici. C'est par vérification *a posteriori* qu'on apprécie actuellement jusqu'à quel point, selon les circonstances, il est permis d'employer les valeurs adoptées de prime saut pour les deux degrés dont il s'agit, quitte, particulièrement en ce qui concerne le second de ces degrés, à changer les formules ou à modifier ce degré, comme il est indiqué au n° 36.

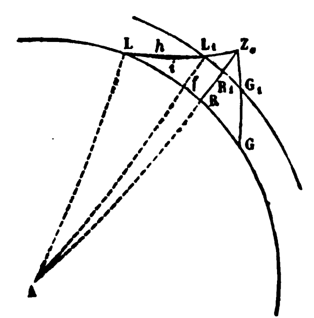
N° 34. Circonstances favorables à la détermination d'une droite de hauteur, eu égard à la substitution de celle-ci au cercle de hauteur et à l'influence des erreurs en hauteur sur le point déterminatif de ladite droite. — Occupons-nous d'abord du premier point de vue, concernant la substitution de la droite de hauteur au cercle de hauteur.

Il est évident que les erreurs provenant de cette substitution, augmentent avec la courbure du cercle, et, par suite, avec l'accroissement de la hauteur. Mais, eu égard à l'ordre de petitesse de la dis-

tance existant aux environs du point de contact entre une tangente et sa courbe, cette augmentation ne porte que sur des très-petits du second ordre, et n'est à prendre en considération que secondairement, sauf le cas (n° 8) où la distance zénithale de l'astre se réduit à un très-petit du premier ordre. D'ailleurs, il est facile de tenir compte de la courbure, comme on l'a montré au n° 32, si l'on constate par le TABLEAU I de la fin du texte, que cette courbure n'est pas *négligeable.*

— En dehors de l'exception précédente, ce sont surtout les écarts entre le point déterminatif choisi et la véritable position du navire qui sont à considérer. Ces écarts dépendent entièrement des erreurs sur la hauteur de l'astre et sur la position estimée du navire. Occupons-nous des premières de ces erreurs.

Fig. 7, relative à l'influence d'une erreur en hauteur sur la détermination d'une droite de hauteur.



Supposons une certaine erreur ($AR_1 - AR$), *fig.* 7, sur la hauteur. On voit qu'avec le procédé Marcq, l'erreur RR_1, qui en résulte sur la position du point déterminatif de la droite de hauteur, est toujours égale à cette erreur même. Il n'existe donc pas avec ce procédé de circonstances favorables relativement au point de vue qui nous occupe.

Quand le point déterminatif est obtenu par la latitude ou la longitude estimée, l'erreur L_1L ou GG_1, qui provient pour ce point de l'erreur en hauteur, est minimum suivant les conditions habituelles, c'est-à-dire lorsque l'astre passe au premier vertical, ou sinon le plus près possible (*) avec l'emploi de la latitude, et lorsqu'il passe au méridien avec l'emploi de la longitude. —Cela résulte d'une manière évidente des deux relations ci-dessous, qui proviennent du développement de ΔG ($= - \Delta P$), ou de ΔL, en fonction de ΔH, en s'arrêtant aux termes du premier ordre :

(*) Cette manière de parler est tout à fait générale; car si l'astre ne traverse le premier vertical qu'au-dessous de l'horizon, il faut l'observer aussi bas que le permet une bonne évaluation de la réfraction; et s'il ne le traverse pas du tout, on sait que le moment où il en est le plus près correspond à l'angle à l'astre droit, circonstance qui se présente toujours alors.

$$\Delta G \cos L = \frac{\Delta H}{\sin Z} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta H \times \cos L}{\cos D \sin A}; \qquad \Delta L = \frac{\Delta H}{\cos Z} \text{ (*)}.$$

Par ailleurs, ladite erreur LL_1 ou GG_1 tend à devenir considérable, à mesure qu'on s'éloigne des circonstances favorables que nous venons de spécifier. Mais même dans ces circonstances, le développement susmentionné de $\Delta G \cos L$ en fonction de ΔH montre encore que l'erreur LL_1 est susceptible de demeurer importante, si l'on se trouve par une latitude élevée, ou si l'on a observé un astre près du pôle.

Dans tous les cas, chacune des deux erreurs LL_1 ou GG_1 est toujours plus forte que l'erreur afférente au procédé Marcq. En effet, sur une sphère, la distance minimum entre deux cercles concentriques LG, L_1G_1, *fig.* 7, est égale à la portion interceptée, telle que RR_1, de tout arc de grand cercle passant par le centre commun A. — Cette propriété se démontre en considérant d'abord un arc quelconque de *grand cercle* LhL_1 intercepté entre les deux petits cercles. Le triangle sphérique $ALhL_1$ donne $LhL_1 > L_1A - LA$, et par suite, $LhL_1 > fL_1 = RR_1$. Puis, si au lieu d'un arc de grand cercle LhL_1, on considère un arc de petit cercle LiL_1 compris entre les deux mêmes points L et L_1, l'inégalité précédente existe *à fortiori*, puisque $LiL_1 > LhL_1$.

N° 35. Circonstances favorables à la détermination d'une droite de hauteur, eu égard à l'influence des erreurs du point estimé sur la position du point déterminatif de la droite. — En ce qui concerne l'influence des erreurs du point estimé sur les points déterminatifs de l'espèce L ou G, les circonstances favorables sont les mêmes qu'au numéro précédent, c'est-à-dire que l'observation doit être faite le plus près possible du premier vertical pour le point L, et du méridien pour le point G. Cela résulte d'une manière évidente de la relation (16 *bis*) du n° 25 réduite à son premier terme, soit de l'égalité :

$$\Delta G = -\Delta P = -\frac{\operatorname{cotg} Z}{\cos L} \Delta L \text{ (**)}.$$

(*) Ces relations, dont la dernière est assez longue à établir par l'analyse, peuvent s'obtenir géométriquement avec une extrême facilité, à l'aide de petits triangles curvilignes rectangles, qu'on regarde comme rectilignes. — L'un de ces triangles est formé du complément de l'angle à l'astre A, d'un arc de parallèle $\Delta G \cos D$ comme hypoténuse, et d'un arc de vertical ΔH comme côté adjacent audit complément. — Le second triangle comprend l'azimut Z ou son supplément, un arc de méridien ΔL comme hypoténuse, et un arc de vertical ΔH comme côté adjacent à Z.

(**) Cette égalité peut s'obtenir géométriquement, avec une grande facilité, par la simple

Il faut, au surplus, pour le point L, qu'on ne se trouve pas par une latitude trop élevée, à cause de l'importance que prend en pareil cas le second terme de ladite relation (**16** *bis*), même avec une bonne valeur de Z.

Quand on observe loin du moment des circonstances favorables susmentionnées, non-seulement ces intersections sont susceptibles d'être très-erronées; mais même elles peuvent ne pas exister, si Z_eL ou Z_eG, *fig.* 1 ou 1 *bis*, ne rencontre pas le cercle de hauteur. On sera prévenu de cette occurrence par le calcul même, qui conduira pour l'inconnue à une ligne trigonométrique imaginaire.

— Avec l'intersection R correspondant au procédé Marcq, les circonstances les plus favorables à l'atténuation des erreurs de l'estime, se présentent lorsque la distance ZR, *fig.* 1 ou 1 *bis*, de la véritable position Z du navire à l'intersection R est nulle. Or, en pareille occurrence, aR du triangle Z_eRa représente l'erreur d'estime ΔL_e en latitude, et aZ_e l'erreur $\Delta\text{E} = \Delta G_e \cos L_e$ en chemin E. O. On a dès lors comme condition de circonstances favorables :

$$\Delta L_e = \Delta\text{E} \operatorname{cotg} PZ_eA.$$

Cette équation prouve, entre autres, qu'aux environs du passage de l'astre au méridien ou au premier vertical, il suffit que ΔE ou ΔL_e soit égal à zéro ; ce qui du reste se voit *à priori*. Toutefois, la circonstance favorable dont nous venons de parler, n'est pas à la disposition de l'observateur. Elle peut se présenter d'elle-même; mais on ne saurait la faire naître.

N° 26. Circonstances favorables à la détermination d'une droite de hauteur, eu égard au procédé employé pour la tracer et au degré d'approximation des opérations. Ensemble des meilleures conditions propres à cette détermination. — Quand la droite de hauteur est menée suivant le procédé de la *tangente* (n° 10), les circonstances favorables à l'opération sont évidemment identiques avec celles propres au point de contact.

Mais quand on se sert du système de la *sécante* (n° 11), il y a de ce chef à examiner si, pour une même variation de l'élément qui sert à calculer les deux points de sécance, ces deux points ne tendent pas, dans de certains cas, à s'écarter entre eux outre mesure.

considération d'un petit triangle curviligne rectangle, qu'on regarde comme rectiligne, et qui est formé du complément de l'angle Z, d'un arc de méridien ΔL comme côté adjacent à ce complément, et d'un arc de parallèle — $\Delta G \cos L$ comme côté opposé.

Car, en pareille occurrence, il ne serait plus permis de les considérer comme appartenant à un même plan tangent à la sphère terrestre, et, par suite, de regarder la droite qui les joint comme un lieu géométrique du navire. Or, c'est justement ce qui arrive avec l'emploi des points déterminatifs L et G, lorsqu'on est près du méridien pour L, et près du premier vertical pour G. De sorte qu'en fait, au point de vue particulier où nous nous plaçons, l'usage des sécantes cesse d'être licite dans ces conditions ; et les circonstances favorables y relatives se confondent avec celles propres au point déterminatif lui-même.

— En ce qui concerne le degré d'approximation adopté pour l'effectuation même des opérations, les circonstances favorables dépendent de l'espèce des formules employées. Comme nous l'avons montré, entre autres au n° 4, et ainsi que nous l'avons annoncé au n° 33, on peut toujours choisir celles-ci de façon à limiter les erreurs provenant de la cause qui nous occupe. Si non, il faudra, suivant les cas, opérer avec un degré d'approximation plus resserré, en prenant, par exemple, les logarithmes avec un plus grand nombre de décimales. (Voir les commentaires qui accompagnent les TYPES DE CALCUL n°s 1 *bis* et 1 *ter* de la fin du texte.) — Ceci conduit à remarquer qu'en principe, les formules ne doivent pas être appliquées au hasard et suivant une règle d'approximation *unique*, sous peine d'exposer à des erreurs pouvant devenir importantes. Aussi faut-il, pour chaque espèce de calcul, que les navigateurs, surtout ceux auxquels le manque d'instruction théorique ne permet pas de faire la part des nuances que nous venons d'indiquer, se servent et de formules et d'un degré d'approximation qui puissent convenir aux cas les plus désavantageux jusqu'où il est encore licite d'observer en pratique. De la sorte, ils éviteront pour ces cas de graves erreurs, quitte à ce que, dans les circonstances favorables, la longueur des opérations et le degré d'approximation se trouvent plus grands qu'il n'est nécessaire.

— Résumons ce qui concerne à tous les points de vue, les circonstances favorables à la détermination d'une *droite de hauteur*, abstraction faite de ce qui a trait au degré d'approximation des calculs, eu égard aux moyens que nous venons d'indiquer pour maintenir dans des limites voulues les erreurs provenant de cette cause.

On voit d'abord qu'il faut rejeter toute distance zénithale rentrant dans les très-petits du premier ordre, appréciée (n° 7) d'après le

degré d'approximation convenu. En dehors de cette exception commune à tous les modes de détermination de la droite de hauteur, on est conduit aux règles suivantes :

Avec le *procédé Marcq*, on peut se servir d'une observation faite à à un instant quelconque.

Avec le procédé *par la latitude estimée*, on se trouve dans les meilleures conditions en ayant recours à des hauteurs prises le plus près possible du premier vertical ; et il faut exclure les observations faites, aux environs du méridien. D'ailleurs, par les latitudes très-élevées, ledit procédé donne de mauvais résultats, quel que soit le moment de l'observation.

Enfin avec le procédé *par la longitude estimée*, il faut, pour le mieux, avoir recours à des hauteurs prises aux environs du méridien, et rejeter les observations près du premier vertical.

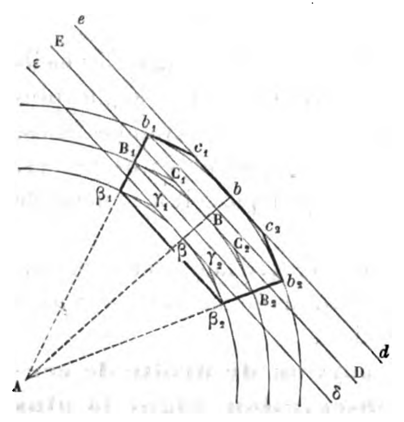
N° 27. Bandes, polygones et portion de droite de certitude, propres à une seule observation. Ligne la plus probable de l'aire de certitude. — D'après ce qui a été dit au n° 24, la droite de hauteur ne peut être regardée comme contenant le navire que sous de certaines restrictions. Nous allons voir maintenant comment il faut, pour s'édifier le mieux possible sur la position du bâtiment, utiliser cette droite, ou, au besoin, les portions de courbe qu'on est à même de lui substituer (n° 32).

Quand on a des données sur *la limite* des erreurs, tant *systématiques* qu'*accidentelles* (n°s 118 et 119), en plus ou en moins, susceptibles d'avoir été commises sur la hauteur, on peut mener de part et d'autre de la droite de hauteur DE, *fig.* 8, relative à l'observation elle-même, deux droites parallèles *de* et *δε* écartées de DE de ladite limite. Dans le plan tangent à la sphère, l'écart en question s'évalue en arc de grand cercle. — Quand on se sert de papier quadrillé (n° 40) ou sur une carte, il se mesure à l'échelle des latitudes ; car, en fait, cet écart, eu égard à sa petitesse, peut être regardé comme un arc loxodromique ayant pour longueur sur la sphère la distance des deux points B et *b*, ou B et β, et ayant pour direction la direction azimutale de l'astre.

En opérant comme il vient d'être dit, on obtient une bande *edδε*, dans laquelle le navire sera compris, pourvu que la véritable position de celui-ci se trouve, à droite ou à gauche du point de contact choisi B, sur la portion du cercle ou de la courbe de hauteur renfermée dans ladite bande. — Cette bande est ce qu'on appelle une

bande de certitude, puisque, dans notre hypothèse, le bâtiment y sera

Fig. 8. — Représentation d'une bande et d'un polygone de certitude, abstraction faite de l'erreur possible due aux chronomètres.



certainement contenu. Et même, en menant par les limites extrêmes de la portion susmentionnée entre lesquelles sera compris le bâtiment, deux rayons du cercle de hauteur ou du cercle osculateur en B à la courbe de hauteur, les parties de ces rayons interceptées par la bande de certitude, forment dans celle-ci un ***quadrilatère rectiligne de certitude.***

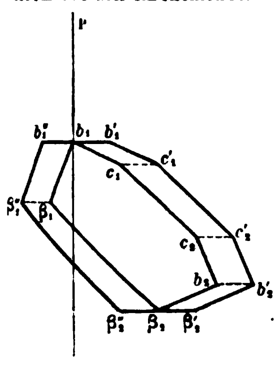
— Mais si le bâtiment se trouve en dehors de la bande en question; ou si, tout simplement, on désire tenir compte plus rigoureusement de la limite d'erreur supposée entre le point de contact B et la véritable position du navire B_1 ou B_2, il faut évidemment considérer comme ***aire de certitude*** le ***quadrilatère curviligne*** $\beta_1 b_1 b b_2 \beta_2 \beta$, formé dans le plan tangent à la sphère ou sur la carte : 1° par les deux portions de cercle ou de courbe de hauteur $b_1 b b_2$ et $\beta_1 \beta \beta_2$, écartées, l'une et l'autre, de la véritable ligne de hauteur d'une quantité égale à la limite d'erreur supposée, en plus ou en moins, sur la hauteur; 2° par deux portions $\beta_1 b_1$ et $\beta_2 b_2$ de rayons ordinaires ou de courbure appartenant à la véritable ligne de hauteur, et menés par les points B_1 et B_2 susdéfinis. — A la place du quadrilatère curviligne de ***certitude*** que nous venons de spécifier, il est plus commode, sauf dans les cas 2° et 3° du n° 32, d'employer l'***hexagone rectiligne*** $\beta_1 b_1 c_1 c_2 b_2 \beta_2$, où l'on substitue à la portion de courbe $b_1 b b_2$, la ligne brisée $b_1 c_1 c_2 b_2$ formée par des parties de tangentes; et à la portion de courbe $\beta_1 \beta \beta_2$, la corde $\beta_1 \beta_2$.

Dans tous les cas, les différents points B_1, B_2, b_1, b_2, β_1, β_2, dont on se sert pour les constructions précédentes, pourront se déterminer sur la carte par les TABLES de M. Perrin, comme il est expliqué en 1° du n° 32. De leur côté, les directions des portions de rayon $\beta_1 b_1$ et $\beta_2 b_2$ par rapport à βb, s'obtiendront par la variation de l'azimut due au changement du point B en B_1 et en B_2. Mais elles seront d'ordinaire sensiblement parallèles entre elles et à βb.

— Maintenant, si on veut tenir compte de l'erreur sur l'état absolu

des chronomètres, il faudra se fixer une limite de cette erreur, aussi bien dans l'*Est* que dans l'*Ouest;* et alors, comme nous en avons prévenu au n° 1, on transportera en longitude de cette quantité, tant à droite qu'à gauche, l'*hexagone de certitude* $\beta_1 b_1 c_1 c_2 b_2 \beta_2$, *fig.* 9. On obtiendra ainsi trois hexagones, puis un polygone de huit côtés $\beta''_1 b''_1 b'_1 c'_1 c'_2 b'_2 \beta'_2 \beta''_2$, qui enveloppera les trois hexagones, et représentera le polygone de certitude du navire, en tenant compte de toutes les erreurs possibles, y compris l'erreur propre aux chronomètres.

Fig. 9. — Représentation d'un polygone de certitude, tenant compte de l'erreur due aux chronomètres.



— Dans le même ordre d'idées qu'en la remarque faite en 2°, n° 5, il y a ici à examiner le cas où l'on connaît la direction dans laquelle le navire a été dévié de sa route sous l'influence des courants et des erreurs de l'estime. On peut alors se procurer, abstraction faite de l'erreur des chronomètres, une *portion de droite de certitude*. Il suffit pour cela de tracer sur la carte, par la position estimée du navire, une droite s'étendant dans ladite direction, et d'en considérer la partie interceptée par le polygone de certitude.

En tenant compte de l'erreur des chronomètres, on obtient manifestement pour *aire de certitude* une portion du polygone extérieur de la *fig.* 9, comprise entre deux parallèles à la direction en question, menées à l'Est et à l'Ouest du point estimé, à une distance en longitude égale à l'erreur dont il s'agit.

— Ajoutons que, dans tout *polygone* de certitude, il existe une ligne représentant le lieu géométrique *le plus probable* (n° 122) du navire. Avec un quadrilatère de certitude, cette ligne est évidemment la partie de ED, *fig.* 8, interceptée dans le quadrilatère. Autrement, c'est la portion de courbe B_1BB_2, ou la ligne brisée $B_1C_1C_2B_2$. Dans tous les cas, ces diverses portions de ligne appartiennent à la ligne *fondamentale* de chaque polygone, c'est-à-dire à la ligne droite, courbe ou brisée, sur laquelle est basée, en définitive, la construction de ce polygone.

Le lieu géométrique *le plus probable* du navire se réduit à un point, quand on a à sa disposition une portion de droite de certitude. Ce point est évidemment l'intersection de cette partie de droite avec

la ligne la plus probable dont nous venons de parler. Si par hasard ledit point tombait en dehors de l'aire de certitude, cela prouverait que l'on s'est trompé en moins dans l'appréciation des limites des diverses erreurs à considérer.

— Pour résumer ce numéro, il convient de prévenir que, la plupart du temps, on se borne dans la pratique à l'emploi d'une *bande de certitude.*

Mais il importait, afin de bien préciser la question, de la traiter avec le développement que nous venons de lui attribuer, et de donner des figures correspondant à la solution possible la plus complète, en laissant au lecteur le soin d'apprécier, selon les cas, quand on peut se contenter d'une bande de certitude.

1re PARTIE. — § VI. CAS DE DEUX OBSERVATIONS : DÉTERMINATION DU POINT OBSERVÉ.

N° 38. Rappel de la solution trigonométrique de la détermination du point observé. Idée générale de toutes les simplifications possibles de cette solution. — La question du point observé prise dans toute sa généralité ne s'est longtemps résolue à la mer qu'exceptionnellement. Les nécessités de la navigation rapide ont conduit à changer cet ordre de choses.

Le problème renferme, comme cas particulier d'un usage incessant, la détermination journalière du point par la combinaison du calcul d'angle horaire déduit d'une hauteur prise loin du méridien ou *horaire*, suivant l'expression adoptée, et de la latitude obtenue par une hauteur méridienne ou circumméridienne.

Quand, pour une raison ou pour une autre, les deux hauteurs observées sont horaires, la solution *exacte* ou *directe* de la question consiste à trouver l'intersection précise de deux cercles de hauteur ; et elle exige la résolution par la *trigonométrie* d'un quadrilatère sphérique, ayant pour côtés : la colatitude c du lieu, la distance polaire Δ d'un des astres, la distance des deux astres entre eux, et la distance zénithale N' du deuxième astre ; et pour diagonales : la distance polaire Δ' de ce dernier astre et la distance zénithale N du premier, ramenée d'ailleurs au même zénith que le second astre, si les observations n'ont pas été simultanées. — Les données sont Δ, Δ', N et N', plus l'angle formé par Δ et Δ'. Les inconnues sont c et les angles horaires des deux astres.

Cette méthode, exclusivement en usage chez les anciens navigateurs, est aujourd'hui complétement abandonnée à cause de sa longueur, et à cause aussi de la nécessité de pouvoir utiliser (n° 1) une seule hauteur, dès qu'on l'a prise. Delambre en avait proposé une solution élégante, en appliquant aux trois triangles du quadrilatère sphérique qu'on est conduit à considérer, les formules de trigonométrie sphérique qui portent son nom.

— On peut, du reste, traiter aussi la question en la regardant comme la résolution logarithmique de deux équations semblables à la relation générale (1 *bis*) du n° 1, et où les observations respectives sont ramenées au même lieu, à savoir :

$$\sin H = \sin L \sin D + \cos L \cos D \cos(G_a - G); \qquad (22)$$

$$\sin H' = \sin L \sin D' + \cos L \cos D' \cos(G'_a - G); \qquad (23)$$

avec :

$(G_a - G) = P$, $(G'_a - G) = P'$, $(P' - P) = (\mathit{AR}_a - \mathit{AR}'_{a,1} + I) \pm 24^h$ s'il est nécessaire,

AR_a et $\mathit{AR}'_{a,1}$ étant calculées pour le moment de la première observation, et d'ailleurs évaluées en degrés,

I représentant l'intervalle des observations évalué en temps du deuxième astre, puis converti en degrés.

La dernière des trois égalités ci-dessus a besoin d'être prouvée. Or en tenant compte des conventions de signes de la légende, page 1, on obtient évidemment :

$$P = T_a, \text{ ou } -(24^h - T_a); \quad (P' - P) = T'_{a,1}, \text{ ou } -(24^h - T'_{a,1}).$$

Examinons les diverses combinaisons possibles qui résultent de ces égalités pour la valeur générale de $(P' - P)$. Remarquons d'abord que cette différence peut être positive ou négative, et doit toujours être $< 24^h$ en valeur absolue. Rappelons-nous, en second lieu, que pour un même instant : $T_a + \mathit{AR}_a = T'_a + \mathit{AR}'_a \pm 24^h$ ***s'il est nécessaire.*** Dès lors nous obtiendrons la troisième égalité en question.

D'autre part, on a évidemment

$$(T'_a - T_a) = (T'_a + G) - (T_a + G) = (T'_{p,a} - T_{p,a}),$$

en considérant l'ascension droite du second astre au moment même de la deuxième observation, soit AR'_a au lieu de $\mathit{AR}'_{a,1}$.

Conséquemment, on peut encore poser :

$$(P' - P) = (T'_{p,m} + \mathit{AR}'_m - \mathit{AR}'_a) - (T_{p,m} + \mathit{AR}_m - \mathit{AR}_a) \pm 24^h \text{ s'il est nécessaire};$$

toutes les lettres ont ici les significations conventionnelles de la légende page 1 ; elles se rapportent d'ailleurs à la *première* ou à la seconde observation, suivant qu'elles sont *sans* ou avec accent.

Cette deuxième forme de $(P' - P)$ est plus commode pour les

applications ; mais la première est nécessaire pour certaines discussions (n° 55).

Dans les deux équations précédentes, où l'on suppose d'ailleurs les hauteurs ramenées au même lieu (n° 39), il n'y a d'inconnues que L et G. Parmi les autres éléments, H et H' sont données par l'observation. De leur côté G_a et G'_a se déduisent des heures du premier méridien d'après le chronomètre. Ces heures, et par suite G_a et G'_a sont affectées de l'erreur du chronomètre ; et il n'y a d'exact, ou au moins à très-peu près, que leur différence. Il suit de là que cette erreur se reporte intégralement sur la longitude, et que d'après la forme même des équations, elle n'a pas d'influence sur la latitude.

— La solution *directe* générale du problème n'est que peu ou point simplifiable, en tant qu'il s'agit d'arriver à des équations *toutes* logarithmiques. Le procédé que Brünnow tire dans son « *Astronomie sphérique* » des deux relations susmentionnées est le plus recommandable. Mais, somme toute, on ne peut parvenir à réduire sérieusement les calculs, sans rien sacrifier à l'exactitude mathématique, que dans l'hypothèse *d'une même déclinaison* et par suite d'un même astre pour les deux stations. Or ceci suppose, en principe, qu'on a observé un même astre de déclinaison constante.

Toutefois, la première simplification qui ait été proposée dans ladite hypothèse n'était qu'approximative. Elle remonte au milieu du siècle dernier ; elle est due au Hollandais Douwes. Elle consiste à retrancher (23) de (22), après y avoir rétabli P et P', et introduit la *latitude estimée* L_e. D'après cela, en appelant :

P_m la moyenne *algébrique* des deux angles au pôle P et P'_1, dont les signes sont, d'après nos conventions, + dans l'*Ouest* et — dans l'*Est* ;
I l'intervalle en degrés entre les deux observations ;

on trouve aisément ainsi la relation suivante :

$$(24)\qquad \sin P_m = \sin\left(P+\frac{I}{2}\right) = \sin\left(P'-\frac{I}{2}\right) = \frac{\cos\frac{1}{2}(H'-H)\sin\frac{1}{2}(H'-H)}{\sin\frac{1}{2}I\cos L\cos D}.$$

De cette équation, on tire à volonté P ou P', et par suite une longitude. Puis, on en déduit la latitude par les formules (2) et (3) du n° 3.

Cette méthode revient en définitive à trouver la moyenne des valeurs de P et de P' qu'on déduirait directement de (22) et de (23) en faisant le calcul d'angle horaire avec L_e. Or ce mode d'opérer n'a sa raison d'être que lorsque les deux hauteurs sont correspondantes ; car en pareil cas il y a annulation sur les valeurs de P_m, de l'influence

des erreurs dues à l'inexactitude possible tant de la latitude estimée que des hauteurs observées. Dans toute autre circonstance, c'est un calcul complétement dépourvu de logique, et que sa simplification trigonométrique a pu seule faire accepter en son temps. Il est intéressant de remarquer que la méthode proposée dans ces dernières années par M. Littrow (nº 61) pour déterminer la longitude par deux hauteurs circumméridiennes, est mot à mot l'application de la méthode de Douwes dans le susdit cas où elle est rationnelle.

Il faut encore prévenir que cette dernière méthode a son *inverse*; car on pourrait pareillement chercher, en fonction de la *longitude estimée* G_e, une latitude, qui ne serait autre que la moyenne de deux valeurs de L, qu'on déduirait de (22) et de (23), en y faisant $G = G_e$. Puis avec la latitude trouvée, on déterminerait la longitude par le calcul d'angle horaire habituel, appliqué à une des deux observations. — Mais ici il n'y a pas de combinai son de (22) etde (23) qui fournisse une valeur immédiate de ladite latitude moyenne; et le procédé n'a jamais été proposé.

Longtemps après Douwes, M. Caillet père a imaginé une simplification *rigoureuse* des formules générales, toujours dans l'hypothèse *d'une même déclinaison* pour les deux observations. Les formules de M. Caillet sont connues de tous les navigateurs. — Comme rapidité de calcul, elles ne peuvent lutter contre aucune des *Nouvelles méthodes* exposées ci-après; et comme exactitude, bien que celles-ci ne soient qu'approximatives, la différence s'évanouit d'ordinaire dans les applications. D'ailleurs lesdites méthodes n'exigeant aucune hypothèse sur les déclinaisons, ont encore de ce fait, dans le cas du soleil, un avantage sur les formules de M. Caillet, où il faut alors admettre, au détriment de la rigueur, que la déclinaison de l'astre demeure constante et égale à sa valeur moyenne entre les deux stations.

— Dans ces derniers temps on a proposé, en Allemagne, une méthode *exacte* ou *directe*, applicable au cas le plus général, et dont le caractère particulier consiste dans un mélange de formules logarithmiques et de formules simplement arithmétiques.

Lorsque les astres ont des déclinaisons différentes, la méthode allemande est incontestablement plus longue et plus difficile que les *nouvelles méthodes*. Comparée, au contraire, aux autres procédés *directs* de Delambre, Brünnow, Caillet, elle est un progrès incontestable. De plus, on ne fait ici aucun calcul inutile; puisque l'ambiguïté résultant

du choix de l'une des deux solutions ne se présente que dans la dernière opération, ce qui n'a lieu avec aucun desdits procédés. — Lorsque les deux déclinaisons sont égales, le calcul n'est pas plus long que par les *Nouvelles méthodes*. Mais, en principe, il présente quelques difficultés dans l'emploi des signes qui est ici inévitable dans tout le cours du calcul ; cependant cela se réduit à peu de chose.

Il est encore intéressant de prévenir que si l'on se borne, dans le système allemand comme dans les autres systèmes, à l'emploi de cinq décimales pour la rapidité des calculs logarithmiques, la solution théoriquement exacte donne un résultat moins approché. Cela tient à ce que les erreurs dues aux décimales négligées se reproduisent alors en un plus grand nombre d'endroits.

On trouvera l'exposé de la méthode allemande au n° 53, où, pour conserver plus d'enchaînement dans le cours des idées, nous l'avons rejeté à la suite des diverses solutions *indirectes* ci-après mentionnées du problème général qui nous occupe, et qui comprennent les *Nouvelles méthodes*.

— Somme toute, quelle que soit l'opinion qu'on puisse avoir du résultat final obtenu par les procédés *directs* comparativement aux procédés *indirects*, pour la détermination du point observé, il importe d'insister sur la circonstance suivante :

Les Nouvelles méthodes *s'imposent, en principe, par l'opportunité d'utiliser les calculs que l'on exécute d'ordinaire aujourd'hui dès la première observation, afin d'en tirer une droite de hauteur.*

— Occupons-nous maintenant de l'ensemble des *procédés indirects* que nous venons d'annoncer.

Dans le cas général de l'observation de deux astres quelconques, et par suite dans le cas *d'une déclinaison différente* pour les deux stations, la simplification de la recherche du point observé a dû être tentée dans la voie des solutions *approximatives* ou *indirectes*. Nous exposons dans ce qui suit le mode de génération ainsi que l'esprit philosophique de ces solutions. — Au lieu de suivre l'ordre chronologique, nous commencerons par exposer, parmi les solutions, celles qui forment les *Nouvelles méthodes*, lesquelles dérivent de la considération des droites de hauteur, et sont les plus recommandables, eu égard à l'opportunité susmentionnée d'utiliser les calculs déjà effectués. Ces calculs peuvent, suivant les circonstances, consister soit dans la recherche d'un point déterminatif de l'espèce L (n° 2), soit très-exceptionnellement, du reste, dans la détermination d'un point déterminatif de l'espèce G

(n° 3), soit enfin dans la détermination d'un point déterminatif de l'espèce R (n° 4), c'est-à-dire d'un *point rapproché*. Ils conduisent, au moins d'ordinaire (n° 40), à des calculs analogues à eux-mêmes pour la deuxième observation. Et en définitive, on est ainsi amené à des solutions soit graphiques, soit chiffrées, de la détermination du point observé, qui caractérisent les *Nouvelles méthodes*.

Après l'exposé de ces méthodes, nous reprendrons, de la manière la plus complète et à un point de vue essentiellement *analytique*, la résolution *indirecte* des deux équations (22) et (23), résolution qui englobe toutes les solutions *indirectes* et incidemment les *Nouvelles méthodes*, ou du moins la plupart d'entre elles, dans l'ensemble de ses résultats.

— Il nous reste à dire que les méthodes *directes* conduisent toujours à deux solutions, qui représentent les deux intersections des cercles de hauteur. L'indétermination est d'ordinaire levée par la comparaison entre les résultats obtenus et les éléments de l'estime, corroborée par la considération des relèvements azimutaux relatifs aux deux observations.

Les méthodes *indirectes* ne fournissent au contraire qu'une solution ; car elles ne constituent en fait qu'une *rectification* du point estimé. Elles donnent, en principe, celle des deux intersections susmentionnées qui se trouve le plus près de ce point.

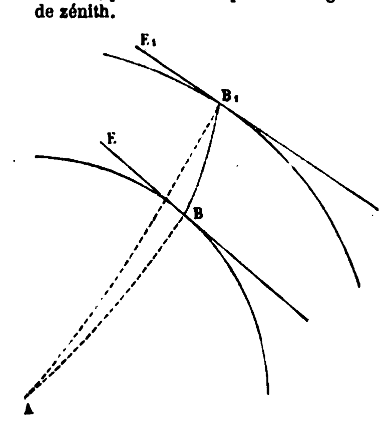
N° 39. Observations ramenées au même lieu. — Avant d'aller plus loin, nous rappellerons qu'on a sans cesse à *ramener* le résultat de la première observation au zénith de la seconde, ou *vice versâ*. A cet effet, avec l'*angle de gisement* ω (*) et le nombre de milles M qui séparent les deux stations, on peut calculer, par la formule bien connue $\Delta H = M \cos \omega$, la variation ΔH que subit, du fait du changement de lieu, la hauteur transportée ; et exécuter les opérations voulues avec les deux hauteurs ainsi ramenées au même endroit. Mais ce moyen ne permet d'utiliser les calculs déjà faits qu'autant qu'on ramène tout au premier lieu.

On préfère d'habitude transporter au zénith d'une des hauteurs elle-même le résultat obtenu avec cette hauteur. S'il s'agit d'un point, on le déplace du mouvement même du navire. S'il s'agit

(*) On ne doit pas oublier que L'*angle de gisement* est l'angle formé par la route du navire, ou son opposée, et par la direction azimutale de l'astre.

d'une droite de hauteur, il suffit de remarquer qu'en se supposant toujours dans des conditions permettant de négliger les très-petits du deuxième ordre, la nouvelle droite de hauteur B_1E_1, *fig.* 10, doit faire un angle de contingence (n° 8) avec la droite de hauteur primitive BE. En d'autres termes, on peut considérer ces deux droites comme parallèles. Il suffit alors de fixer, par un calcul d'estime, la position du point B_1 par lequel devra passer la nouvelle droite de hauteur.

Fig. 10, relative au transport d'une droite de hauteur, pour tenir compte du changement de zénith.



S'il y a eu des courants dans l'intervalle des deux observations, la droite de hauteur, transportée parallèlement à elle-même, aura sa position affectée en conséquence, sans cependant que son parallélisme cesse d'exister. On ne peut faire à cela aucune rectification radicale. Seulement, quand on a quelques notions sur les courants subis, il y a moyen d'en tenir compte en construisant les polygones de certitude (nos 37 et 41) relatifs aux deux observations, après qu'elles ont été ramenées au même lieu.

— Lorsque le chemin parcouru entre les deux observations devient trop considérable pour qu'il y ait possibilité, eu égard au degré d'approximation qu'on s'est fixé, d'admettre que la droite de hauteur de la station déplacée se transporte parallèlement à elle-même, il faut abandonner ce procédé. On doit alors commencer par faire subir à la hauteur de ladite station la correction due au changement de zénith, en tenant compte d'ailleurs, dans cette correction, du terme du deuxième ordre. Autrement dit, il faut alors avoir recours à la formule :

$$\Delta H = \text{M} \cos \omega - \frac{1}{2} \text{M}^2 \sin^2 \omega \operatorname{tg} H \sin 1',$$

où ω et M ont les significations susmentionnées, et que l'on tire, par le théorème de Maclaurin, de la relation évidente :

$$\sin(H + \Delta H) = \sin H \cos \text{M} + \cos H \sin \text{M} \cos \omega.$$

On trouvera dans le TYPE DE CALCUL N° 3 donné à la fin du texte

une application numérique de la formule en ΔH ci-dessus.

La plupart du temps, c'est à la seconde station qu'on ramène les deux observations, puisque c'est le dernier *point observé* du navire qu'il importe le plus de connaître. — Mais à d'autres points de vue il est préférable : 1° de réduire la petite hauteur à l'horizon de la grande, parce que le relèvement de la petite hauteur se prend avec plus d'exactitude ; 2° si les deux hauteurs sont égales, ou à peu près, de réduire la hauteur pour laquelle l'angle ω s'écarte le plus de 90°, parce qu'une erreur sur l'évaluation de cet angle sera alors moins sensible sur $\cos\omega$, et par suite sur ΔH.

N° 40. Détermination du point observé par la rencontre de deux droites de hauteur. — Ayant en sa possession deux droites de hauteur BN et B'N, *fig.* 11, ramenées au même lieu, il suffit, pour achever graphiquement le problème de la *détermination complète du point*, de marquer l'intersection N de ces deux droites.

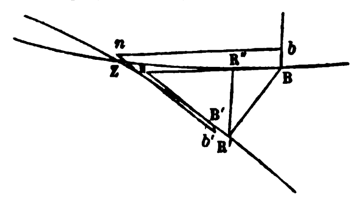
— Ce mode d'opérer suppose précisément qu'on puisse regarder comme se confondant en un seul les deux plans tangents à la sphère terrestre, menés par les points déterminatifs des deux droites de hauteur. Nous admettrons qu'il en est ainsi en principe; et nous signalerons en lieu utile (n° 58) les moyens de se mettre à l'abri des cas exceptionnels où cette condition n'est pas remplie.

En tout état de cause, le point déterminatif de la deuxième droite de hauteur est en général une intersection de la même espèce que celle de la première droite. Mais exceptionnellement l'intersection pourrait être d'espèce différente, si, pour un motif ou un autre, on n'était point amené à choisir (n° 5) le point déterminatif de la deuxième droite de hauteur de la même espèce que celui de la première. — Il importe, à propos de ce cas particulier, de mentionner l'usage d'une intersection de l'espèce L sur le premier cercle avec une intersection de l'espèce G sur le deuxième, obtenue en employant, au lieu de la longitude estimée, la longitude déduite du calcul d'angle horaire qui a servi à déterminer l'intersection L. La solution graphique du point observé résultant de cette combinaison correspond précisément à la méthode Borda expliquée au n° 47, pour la détermination dudit point par le calcul.

— Afin de ne rien omettre sur la détermination du point observé par l'intersection de deux droites de hauteur, il reste à expliquer comment on peut exécuter la construction quand on n'a pas de

cartes à grand point à sa disposition. On emploie alors du ***papier quadrillé;*** et on considère la longueur d'un côté des petits carrés comme représentant un mille de latitude croissante; chaque minute de longitude sur le papier vaut alors ledit côté multiplié par le cosinus de la latitude moyenne de l'espace à considérer, produit qu'il est aisé de construire graphiquement, ou, mieux, de calculer par la ***table de point.*** Si on désire opérer à plus grande échelle, on prendra deux fois ou trois fois le côté susmentionné pour représenter le mille croissant. — Il importe d'ajouter qu'on pourrait aussi prendre ce même côté pour représenter la minute de longitude. En pareil cas, les changements en longitude se porteraient tels quels, et ceux en latitude devraient être convertis en changements en latitude croissante avant d'être évalués avec le quadrillage, c'est-à-dire devraient être divisés par le cosinus de la latitude moyenne. — On trouvera des applications du procédé qui nous occupe à la suite des TYPES DE CALCUL nos 2, 3 et 4 *bis* de la fin du texte.

Fig. 11, relative à la détermination graphique du point observé.



Ce procédé est souvent préféré au calcul par beaucoup de marins; car il évite les erreurs de signe, et laisse reposer l'esprit, un peu tendu par les calculs trigonométriques qu'on vient de faire. Enfin, il est nécessaire pour la détermination graphique du ***point le plus probable*** relatif à plusieurs droites de hauteurs simultanées ou non (n° 65).

Dans tous les cas, la rencontre N des deux droites de hauteur ne se confond jamais avec l'intersection Z des deux cercles ou des deux courbes de hauteur, laquelle intersection représente la véritable position du navire. Cela tient à l'essence même de l'emploi des droites de hauteur. Nous verrons au n° 58 susmentionné dans quelles circonstances l'écart est le moindre.

N° 41. Perfectionnements applicables à la fixation graphique du point observé. Aire de certitude propre à deux observations. Point le plus probable de ce polygone: cas d'indétermination. — C'est pour remédier graphiquement à l'écart précédent que M. Fasci a proposé de rectifier sur la carte chaque droite de hauteur, comme nous l'avons expliqué au n° 26. A l'aide des différences $\Delta_1 L_c$ et $\Delta'_1 L_c$ en

latitude croissante entre N, *fig.* 11, et B d'une part, et B' d'autre part, on calcule, par la formule (17 *bis*) dudit numéro, les longueurs B*b* et B'*b'* à prendre sur les méridiens de B et de B', et en *dedans* des courbes de hauteur, c'est-à-dire *du côté* de leurs centres de courbure. Puis, par les points *b* et *b'* on mène *bn* et *b'n* parallèles aux droites de hauteur ; et l'intersection *n* donne, en dehors des circonstances défavorables, un point très-près de la véritable position Z.

Malheureusement ce procédé est long. De plus, son emploi ne se présente naturellement qu'avec l'usage du point déterminatif de l'espèce L. Enfin, il échappe, avons-nous déjà dit, quand l'une des deux observations est faite aux environs du méridien.

— Du moment où l'on veut rectifier sur la carte les droites de hauteur, le plus simple est de substituer à chacune d'elles un cercle ou une portion de cercle qu'on décrit ainsi qu'il a été expliqué au n° 32.

Quelle que soit la manière dont on obtient le point à l'aide de deux droites de hauteur ou de deux lieux géométriques curvilignes, la position ainsi obtenue se trouve affectée des erreurs dues tant à l'observation qu'à l'estime et aux chronomètres. Il importe dès lors de substituer à cette position une aire de certitude. — A cet effet, on construira (n° 37) le polygone de certitude propre à chaque observation ; et la partie commune à ces deux polygones représentera l'aire de certitude relative au point observé. Cette aire renferme un point *le plus probable* (n° 122), qui se trouve à la rencontre des deux lignes *les plus probables* (n° 37) afférentes respectivement au polygone de certitude propre à chaque observation, et qui sont, bien entendu, les lignes *fondamentales* de ces polygones, c'est-à-dire les lignes sur lesquelles est basée leur construction. — Si par hasard la rencontre dont il s'agit tombait en dehors de l'aire de certitude, cela prouverait que l'on s'est trompé en moins dans l'évaluation des limites des diverses erreurs considérées.

— Il est utile d'ajouter que, quand lesdites lignes fondamentales ou au moins l'une d'elles correspond à une très-faible distance zénithale, et que, par suite, la courbe de hauteur se réduit sensiblement (2° et 3°, n° 32) à un cercle de très-petit rayon, il y a deux points de rencontre très-rapprochés, et conséquemment indétermination, à moins qu'on ne puisse avoir quelque indication sur les directions azimutales des deux astres. Comme dans ce cas les hauteurs sont très-grandes, et que dès lors elles varient rapidement, le sens du mouvement en hauteur sera facile à apprécier, et permettra dès lors

de stipuler si chaque astre considéré est observé dans l'Est ou dans l'Ouest. Si, en outre, les deux astres se trouvent sur le même cercle de déclinaison, les deux points de rencontre seront situés l'un à droite, l'autre à gauche de ce dernier cercle, et l'indication précédente mettra à même de fixer quelle est la bonne intersection. Mais la plupart du temps la solution du cas qui nous occupe demeurera indéterminée.

N° 42. Détermination indirecte par le calcul du point observé : méthode Marcq Saint-Hilaire. — A la détermination par procédé *graphique* du point d'intersection de deux droites de hauteur, on peut préférer la détermination par le *calcul*. Nous distinguerons à cet effet deux cas, suivant que les droites de hauteur sont des *tangentes* ou des *sécantes*. Nous nous occuperons présentement du premier cas; le second cas sera traité aux n°s 43, 46 et 47.

La détermination par le *calcul* du point de rencontre de deux *tangentes de hauteur*, marche d'*ordinaire* avec l'emploi du procédé *Marcq* pour la recherche du *point déterminatif* (n° 4), c'est-à-dire avec l'usage du *point rapproché*. Il faut, comme toujours, commencer par ramener au même lieu (n° 39) les deux observations, à l'aide du chemin parcouru dans leur intervalle. — Le problème peut alors se résoudre par l'un des trois moyens suivants :

1er *moyen*. Appelons :

l_e et l'_e les changements en latitude croissante, d'une part, entre B, *fig.* 11, et le point cherché N, et, d'autre part, entre B' et N;
g et g' les changements en longitude afférents aux mêmes groupes de points;
R et R' les angles que font les tangentes BN et B'N avec le méridien de B et celui de B', et qui représentent les angles de route pour aller de ces derniers points au point N.

On aura évidemment :

$$g = l_e \operatorname{tg} R; \quad g' = l'_e \operatorname{tg} R';$$

d'où :

$$(g' - g) = (l'_e - l_e) \operatorname{tg} R' + l_e (\operatorname{tg} R' - \operatorname{tg} R);$$

soit :

$$l_e = \frac{(g' - g) - (l'_e - l_e) \operatorname{tg} R'}{\operatorname{tg} R' - \operatorname{tg} R}.$$

Or $(g' - g)$ est manifestement égal au changement en longitude entre B' et B, c'est-à-dire que $(g' - g) = (G' - G)$. D'un autre côté, on a, avec la même évidence $(l'_e - l_e) = (L'_e - L_e)$. Donc la dernière équation ci-dessus devient :

$$l_e = \frac{(G' - G) - (L'_e - L_e) \operatorname{tg} R'}{\operatorname{tg} R' - \operatorname{tg} R}.$$

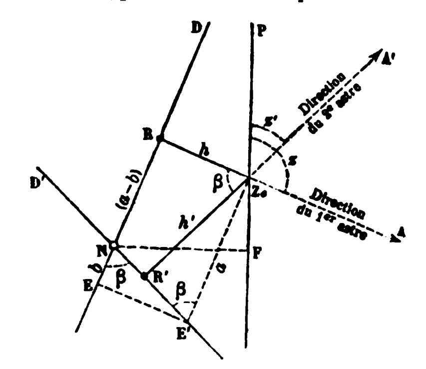
Or, dans cette nouvelle équation les différences $(G' - G)$ et $(L'_e - L_e)$

sont évidemment connues ; et comme R′ et R sont donnés, (tg R′ — tg R) pourra se calculer. Dès lors la dernière des équations ci-dessus permettra de trouver l'inconnue l_e. — Cette équation est du reste entièrement générale, pourvu qu'on se conforme aux conventions de la légende page 1. Par ailleurs, il est aisé de voir que la détermination de l_e peut s'effectuer entièrement par la *table de point*. — Une fois l_e calculé comme il vient d'être dit, on en déduira immédiatement l; puis on aura g par la relation $g = l_e \operatorname{tg} R$; et, dès lors, les coordonnées du point N seront connues. — Il va de soi que si le point N est la première station, ce qui implique que les deux hauteurs ont été ramenées à cette station, il faudra, pour achever le problème, corriger le résultat obtenu de l'estime correspondant à l'intervalle des deux observations.

Le moyen que nous venons d'indiquer est indépendant de l'espèce des points déterminatifs adoptés. Mais les deux suivants ne conviennent qu'autant que ces points sont des points *rapprochés*, c'est-à-dire des points obtenus par le procédé Marcq.

2° *moyen*. Quand les deux points déterminatifs des *tangentes de hauteur* sont des points *rapprochés* R et R′, *fig.* 12, on est en présence d'un quadrilatère Z_eRNR' bi-rectangle, dans lequel on connaît : 1° deux côtés $RZ_e = h$ et $R'Z_e = h'$, h et h' étant, pour chaque observation, la différence entre la hauteur *réelle* et la hauteur *estimée;* 2° l'angle β compris entre ces deux côtés. — On a alors, en menant les lignes auxiliaires Z_eE' et $E'E$:

Fig. 12, relative à la détermination du point observé, par la méthode Marcq St-Hilaire.



$$Z_eE' = a = \frac{h'}{\sin\beta}; \quad NE = b = \frac{h}{\operatorname{tg}\beta}; \quad RN = (a - b).$$

Les formules ci-dessus sont générales, pourvu qu'on fasse attention aux signes des lignes trigonométriques suivant la grandeur de β, et qu'on regarde d'ailleurs h et h' comme des quantités arithmétiques. Quand la différence $(a - b)$ est négative, cela indique que le point cherché N tombe sur la portion de la droite de hauteur ED située du côté de D à partir du point R.

En tout état de cause, une fois la longueur RN déterminée, on la

regarde comme une route courue suivant sa propre direction, qui est connue. Avec cette longueur, on trouve, par un simple calcul d'estime, les changements en latitude et en longitude de N par rapport à R. — Il reste maintenant à grouper en un seul bloc les divers chemins N.S et E.O, qui servent à passer de Z_e en R, puis de R en N, et enfin de N à la deuxième station, si l'on a ramené les deux hauteurs à la première station, et non à la seconde. On obtient ainsi le changement *total* tant en latitude qu'en longitude, pour passer des coordonnées de la position *estimée* de la station à laquelle on a ramené les deux hauteurs, aux coordonnées du *point observé* de la *dernière* station, qui est en définitive la plus importante à connaître.

3° *moyen.* On considère le problème comme un cas particulier de la question du n° 66, où on dispose d'un certain nombre *n* d'observations. A cet effet, on fait $n = 2$ dans les relations générales du numéro en question. Ces relations se simplifient alors, et prennent la forme que nous donnons ci-après. — On reconnaît que les équations simplifiées ne sont autres, comme on devait s'y attendre, que les formules de départ qui ont servi à établir lesdites relations générales.

Au surplus, ces équations peuvent se trouver géométriquement par un moyen qui est trop élégant pour être passé sous silence. Il suffit, en effet, de considérer, pour chaque point *rapproché*, tel que R, *fig.* 12, le quadrilatère RZ_eFN obtenu en menant par la sécance inconnue N des deux droites de hauteur, un parallèle jusqu'à la rencontre avec le méridien de la position estimée Z_e du navire. En projetant ce quadrilatère sur RZ_e, on obtient, par une propriété bien connue des polygones projetés, étant tenu compte d'ailleurs des signes des lignes trigonométriques :

$$RZ_e = Z_eF \cos PZ_eA + NF \sin PZ_eA.$$

Mais RZ_e n'est autre que la différence $(H - H_e)$ entre la hauteur *réelle* et la hauteur *estimée.* D'autre part, Z_eF est le changement en latitude entre Z_e et N, soit ΔL_e; enfin NF représente la différence E des chemins E.O entre les deux mêmes points, et se trouve sensiblement égal à $\Delta G_e \cos L_e$. Dès lors, en représentant d'ailleurs l'angle PZ_eA par z, la relation ci-dessus peut s'écrire :

$$(H - H_e) = \Delta L_e \cos z + \Delta G_e \cos L_e \sin z.$$

On trouverait de même pour le second point rapproché R', en représentant l'angle PZ_eA' par z' :

$$(H' - H'_e) = \Delta L_e \cos z' + \Delta G_e \cos L_e \sin z'.$$

Des deux formules ci-dessus, on tire aisément :

$$\Delta L_e = \frac{(H - H_e)\sin z' - (H' - H'_e)\sin z}{\sin (z' - z)};$$

$$\Delta G_e \cos L_e = -\frac{(H - H_e)\cos z' - (H' - H'_e)\cos z}{\sin (z' - z)} = E.$$

Ces dernières relations peuvent facilement se calculer par la *table de point.* — Il importe d'ajouter qu'elles sont générales, pourvu que : 1° l'on compte les angles z et z' de 0° à 180° à partir du pôle élevé, et qu'on les prenne *positivement* dans le sens de l'*Ouest*, et négativement dans le sens de l'Est ; 2° que les changements en latitude et en longitude ΔL_e et ΔG_e comptés à partir du point Z_e, aient leurs noms qui correspondent aux signes convenus dans la légende de la page 1 ; 3° que les différences $(H - H_e)$ et $(H' - H'_e)$ soient évaluées algébriquement, c'est-à-dire regardées comme *positives*, quand la hauteur *réelle* est *plus grande* que la hauteur *estimée*, et comme négatives dans le cas contraire. — Si le point N déterminé comme il vient d'être dit, représente la première station, on corrigera le résultat trouvé de l'estime correspondant à l'intervalle des deux observations.

En tout état de cause il est bon, dans l'un comme dans l'autre des trois *moyens* précédents, de s'aider d'un croquis rapidement dessiné à la main, afin de bien se rendre compte de la position du point cherché N relativement aux deux points rapprochés R et R'.

— Pour distinguer le GENRE DE SOLUTION CI-DESSUS de la méthode Marcq, d'avec un second donné ci-après, on le désigne sous le nom de *Recherche du point observé par deux points rapprochés* INDÉPENDANTS.

On trouvera dans le TYPE DE CALCUL N° 3 de la fin du texte, un exemple complet du GENRE en question, avec application des *trois moyens* ci-dessus pour la recherche de l'intersection des deux droites de hauteur fournies par ledit GENRE. Les navigateurs seront de la sorte à même d'apprécier le *moyen* qu'il leur conviendra d'adopter.

—Si on n'avait pas à se préoccuper de la circonstance possible d'une troisième observation ou plus, à combiner par le *calcul* avec les deux premières, ce qui exige (n° 66) que tous les points *rapprochés* se déduisent *d'une même position estimée* du navire et par suite soient *indépendants*, il vaudrait mieux, dans la méthode Marcq, déterminer le point observé par des approximations *successives*.

Dans ce cas, après avoir obtenu comme *point rapproché* sur le pre-

mier cercle de hauteur le point B, *fig.* 11, corrigé d'ailleurs du changement de zénith, on se sert de ce point comme point estimé par rapport au cercle de la deuxième hauteur, ce qui donne un *nouveau point rapproché* R'. Ce point se trouvant sur une normale au cercle de hauteur, est évidemment plus voisin de la position véritable du navire Z que le premier point B. — Si l'on désire une plus grande approximation, on repartira de R' comme point estimé pour en déduire sur le premier cercle de hauteur un *troisième point rapproché* R''. En continuant ainsi de suite, on se *rapprochera* de plus en plus du point Z; ce qui justifie bien, comme nous en avons prévenu au n° 6, le nom de *point rapproché* donné à l'intersection Marcq sur le cercle de hauteur, d'autant que c'est la seule intersection qui jouisse de cette propriété. Ordinairement, on s'arrête dès le second point R'. — Dans tous les cas, on achève l'opération en cherchant l'intersection N des deux tangentes, telles que BN et R'N, au cercle de hauteur menées par les deux derniers points obtenus. Bien entendu, ces tangentes s'étendent perpendiculairement aux directions azimutales des deux astres par rapport aux points R et R'.

La rencontre s'obtient ici par un calcul de point très-simple : car le triangle BR'N est rectangle en R', et donne immédiatement le chemin BN en fonction de BR' et de l'angle N, qui sont des quantités connues. La solution n'est autre au fond, qu'un cas particulier du 2e des *moyens* donnés au commencement du présent numéro, ce cas correspondant à l'hypothèse où un des côtés du quadrilatère birectangle se réduit à zéro. — Le 1er et le 3e desdits *moyens* sont du reste applicables aussi au *genre* actuel : le premier l'est intégralement; le second l'est avec simplification; car $(H - H_e)$ ou $(H' - H'_e)$ se trouve alors égal à zéro; et même en y regardant de plus près, il se confond tout à fait avec la solution par le triangle BR'N.

Le SECOND GENRE DE SOLUTION de la méthode Marcq que nous venons d'indiquer, s'appelle ***Recherche du point observé par deux points rapprochés*** SUCCESSIFS *ou* CONJUGUÉS. — On en trouvera un exemple détaillé dans l'assemblage des TYPES DE CALCUL Nos 1 ET 2 donnés à la fin du texte.

De son côté, la détermination du point *le plus probable* (n° 66) correspondant à trois observations au moins, et basée sur l'emploi de *points rapprochés* INDÉPENDANTS, est traitée numériquement au TYPE DE CALCUL N° 7.

— Les divers TYPES de calcul mentionnés dans le cours de ce numéro sont accompagnés de toutes les indications pratiques néces-

saires à leur application. Ils contiennent en particulier, un exemple des deux manières (n° 39) de ramener les observations au même lieu.

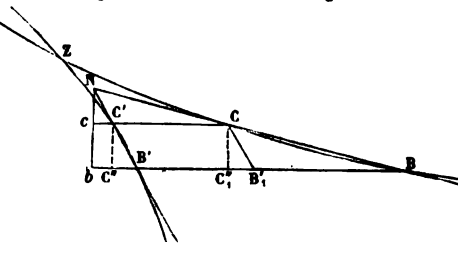
Malgré le soin qu'on a pris d'adopter pour ces types, la disposition la plus avantageuse, la méthode Marcq, sous l'une ou l'autre de ses formes, paraîtra certainement complexe, surtout dans quelques détails. Il faut compter sur l'habitude pour familiariser le navigateur avec ces opérations d'un ordre nouveau. Du reste, ainsi que nous l'avons déjà dit d'une manière générale au n° 38, la raison d'être des *Nouvelles méthodes* consiste surtout dans l'usage des droites de hauteur, et dans la nécessité de rectifier presque incessamment sa position par des observations successives, en utilisant les calculs antérieurs. De plus, comme nous en avons prévenu aussi au même numéro, l'effectuation en une seule fois de tous les calculs est bien plus courte ici qu'avec les méthodes *directes*, même quand elles se prêtent à la simplification de M. Caillet père, dans l'hypothèse d'une même déclinaison pour les deux stations.

N° 43. Détermination indirecte par le calcul du point observé : méthode Lalande-Pagel, par la latitude estimée. — Occupons-nous maintenant de la détermination par le *calcul* des points de rencontre des droites de hauteur quand ces droites sont des *sécantes*, ainsi que cela se présente d'habitude avec l'emploi de *points déterminatifs* tous deux de l'espèce L, c'est-à-dire obtenus avec la latitude estimée (n° 2). Dans cette supposition spéciale, la détermination par le calcul de l'intersection Z, *fig.* 13, de deux sécantes aux cercles de hauteur ZCB et ZC'B' constitue la méthode si usitée de Lalande-Pagel dans la recherche du point observé.

Dans les circonstances ordinaires, on peut regarder, après qu'on a ramené les deux hauteurs à un même horizon, toutes les lignes à considérer comme situées dans le plan tangent à la sphère mené par le point Z. — Les points B, B', et C, C', sont ici deux à deux sur une même droite, BB' ou CC', qui figure un *parallèle*. Les deux parallèles se trouvent, d'ailleurs, distants entre eux de $bc = 1'$. D'autre part, la latitude estimée L_e servant de point de départ au problème, correspond aux points B et B', et diffère de $\Delta L_e = bN$ d'avec la latitude L du point d'intersection N des deux sécantes BC et B'C'. — De leur côté, les heures, en temps de l'astre ou des astres observés, relatives aux deux hauteurs et à la latitude L_e correspondent aux deux longitudes G_1 et G'_1 des points B et B', lesquelles diffèrent respectivement de ΔG_1

représenté par $\frac{Bb}{\cos L_e}$, et de $\Delta G'_1$ représenté par $\frac{B'b}{\cos L_e}$, d'avec la longitude G du point N. Enfin, les différences $\frac{Cc}{\cos L_e}$ et $\frac{C'c}{\cos L_e}$ en longitude des points C et C' d'avec N, valent ΔG_1 et $\Delta G'_1$ combinées respectivement avec les variations algébriques g_1 et g'_1 des longitudes des points B et B', soit (n° 12) avec les variations en sens contraire et évaluées en *minutes de degré*, que subissent les heures de ces mêmes points pour une variation de $+1'$ sur la latitude. — Les variations algébriques g_1 et g'_1 s'obtiennent : soit en refaisant complétement les angles horaires ; soit en les calculant à l'aide des différences logarithmiques suivant le *mode Pagel* (n° 12), auquel cas elles sont respectivement égales à $-\frac{15\varpi_1}{60}=-\frac{\varpi_1}{4}$, et $-\frac{15\varpi'_1}{60}=-\frac{\varpi'_1}{4}$; soit enfin en les déduisant des TABLES de M. Perrin (n° 13).

Fig. 13, relative à la détermination du point observé, par la méthode Lalande-Pagel.



— Tout cela compris, considérons d'abord la sécante BCN et les triangles qu'elle détermine ; et faisons bien attention d'écrire les lettres des diverses lignes dans l'ordre voulu, de manière à avoir, en direction aussi bien qu'en grandeur, les éléments qui correspondent à ces lignes, et des signes desquels il faut expressément tenir compte selon les conventions de la légende générale de la page 1. Nous remarquerons spécialement que le changement en longitude g_1 est sur notre figure *Ouest* et par suite positif, ce qui le rend de même signe que la différence arithmétique linéaire $\frac{(Bb-Cc)}{\cos L_e}$, à laquelle il est égal en valeur absolue. Nous obtiendrons ainsi :

$$\frac{Bb}{bN}=\frac{(Bb-Cc)}{bc}; \quad \text{soit} \quad \frac{\Delta G_1 \times \cos L_e}{\Delta L_e}=\frac{g_1 \times \cos L_e}{1'}.$$

D'où :

$$\Delta G_1 = g_1 \frac{\Delta L_e}{1'} = -\frac{15\varpi_1}{60} \times \frac{\Delta L_e}{1'}.$$

Il est bon de prévenir que cette relation pourrait se déduire de la

formule (9) du n° 15, en remarquant : 1° que $[\Delta G_e + (G_e - G_1)]$ n'y est évidemment autre que ΔG_1 ; 2° que l'inverse du coefficient $-\cos L_e \operatorname{tg} Z_e$ calculé par *voie indirecte* vaut la variation g_1 de la longitude pour une variation de $+1'$ sur la latitude.

En tout état de cause, on obtiendrait de même, d'une manière ou d'une autre, pour la sécante B'C'N :

$$\Delta G'_1 = g'_1 \frac{\Delta L_e}{1'} = -\frac{15\varpi'_1}{60} \times \frac{\Delta L_e}{1'}.$$

Exprimons maintenant de deux manières la longitude G de N ; nous obtiendrons :

$$G = G_1 + \Delta G_1 = G_1 + g_1 \times \frac{\Delta L_e}{1'} ;$$

$$G = G'_1 + \Delta G'_1 = G'_1 + g'_1 \times \frac{\Delta L_e}{1'}.$$

D'où l'on tire :

$$(25) \quad \frac{\Delta L_e}{1'} = \frac{(\Delta G_1 - \Delta G'_1)}{(g_1 - g'_1)} = \frac{(G'_1 - G_1)}{(g_1 - g'_1)}; \qquad (26) \quad L = L_e + \Delta L_e = L_e + 1' \times \frac{(G'_1 - G_1)}{(g_1 - g'_1)};$$

puis :

$$(27) \quad \Delta G'_1 = g'_1 \times \frac{(G'_1 - G_1)}{(g'_1 - g_1)} \text{ (*)}; \qquad (28) \quad G = G'_1 + \Delta G'_1 = G'_1 + g'_1 \times \frac{(G'_1 - G_1)}{(g_1 - g'_1)}.$$

Il importe de remarquer que $(G'_1 - G_1)$ est égal à la différence en *minutes de degré* entre l'intervalle temps moyen des deux observations déduit du chronomètre, et l'écart des deux heures temps moyen déduit des calculs. — Par ailleurs, les relations auxquelles nous venons d'arriver, bien qu'établies sur une figure particulière, sont entièrement générales, eu égard au soin que nous avons eu ci-dessus de nous conformer aux indications de la légende page 1, pour les signes des divers éléments.

(*) Les formules (25) et (27) peuvent s'obtenir plus simplement. En effet, menons par C, *fig.* 13, une parallèle CB'_1 à C'B'. Considérons alors d'abord les sécantes N*cb* et NC'B', puis les deux triangles semblables NB'B et CB'_1B. Nous aurons,

$$\frac{Nb = \Delta L_e}{cb = 1'} = \frac{NB'}{C'B'} = \frac{NB'}{CB'_1} = \frac{B'B = (G'_1 - G_1)\cos L_e}{B'_1B = (C''_1B - C''B') = (g_1 - g'_1)\cos L_e}.$$

D'où l'on tire tout de suite l'équation (25). — Pour avoir l'équation (27), il suffit de considérer les deux triangles semblables NB'*b* et C'B'C'', qui donnent :

$$\frac{Nb = \Delta L_e}{C'C'' = cb = 1'} = \frac{B'b = \Delta G'_1 \cos L_e}{B'C'' = g'_1 \cos L_e}.$$

Toutefois, le mode de démonstration du cours du texte, quoique un peu plus long, offre l'avantage d'arriver aux formules, en suivant le même ordre d'idées que dans la solution analytique qui est habituellement donnée du problème en question, et qui rentre dans les raisonnements du n° 48.

— Dans les formules ci-dessus, nous avons supposé que les deux observations correspondaient au même horizon. S'il n'en était pas ainsi, il suffirait d'y remplacer L_e et G_1 de la première station par $(L_e + l)$ et $(G_1 + g)$, l et g étant les changements en latitude et en longitude parcourus par le navire entre les deux observations. On trouverait ainsi, pour la deuxième station :

$$(25\ bis)\quad \frac{\Delta(L_e + l)}{1'} = \frac{[G'_1 - (G_1 + g)]}{(g_1 - g_1')}; \qquad (26\ bis)\quad L = L_e + l + 1' \times \frac{[G'_1 - (G_1 + g)]}{(g_1 - g'_1)};$$

$$(27\ bis)\quad \Delta G'_1 = g'_1 \times \frac{[g_1' - (G_1 + g)]}{(g_1 - g'_1)}; \qquad (28\ bis)\quad G = G'_1 + g'_1 \times \frac{[G'_1 - (G_1 + g)]}{(g_1 - g'_1)}.$$

— Le principe de la méthode que nous venons d'exposer, c'est-à-dire l'hypothèse de la proportionnalité entre les changements en longitude et en latitude pour de faibles valeurs de ces changements, est dû à Lalande, qui l'avait proposé dans son *Astronomie*. Mais il n'est réellement entré dans le domaine de la pratique que vers 1847, alors que M. Pagel a proposé d'accoupler au procédé de Lalande l'emploi des différences logarithmiques (n° 12) pour trouver les variations des deux angles horaires. La méthode ainsi complétée n'a pas tardé à avoir un immense succès, ce qui tient surtout à ce qu'elle repose sur le calcul si usuel d'angle horaire.

Cependant, quand on y songe, cette méthode n'est en définitive que la détermination par le calcul de l'intersection de deux *sécantes* prises comme droites de hauteur, et *déterminées* d'ailleurs par des points de l'espèce L. Ce n'est donc qu'une solution *particulière* d'un cas lui-même *particulier* du problème général de la recherche du point observé par la rencontre de deux droites de hauteur. — Sans compter que cette solution comporte diverses *exceptions* importantes qui limitent son application, et sur lesquelles il est nécessaire (n° 44) de fixer à fond le lecteur.

Toutefois, elle a rendu de grands services; et elle peut encore être d'un bon usage quand les circonstances s'y prêtent. — On trouvera des applications de la méthode Lalande-Pagel dans les TYPES DE CALCUL N°s 4 et 4 *bis* de la fin du texte, avec les dernières améliorations de détail apportées à cette méthode.

N° 44. Cas où la méthode Lalande-Pagel fait défaut.— La méthode Lalande-Pagel *fait défaut* évidemment toutes les fois qu'on se trouve dans des circonstances telles, que les différents points de la *fig.* 18 ne peuvent plus être considérés comme situés (n° 43) dans un seul et même plan tangent à la sphère terrestre. Or il y a

deux circonstances principales où cela se présente, abstraction faite de l'exception, commune à tous les procédés, de distances zénithales extrêmement petites (nº 33).

La première circonstance correspond au cas où l'une des deux droites de hauteur a ses deux points de sécance très-écartés, et ne peut plus dès lors (nº 34) être regardée comme un lieu géométrique du navire. Ce cas se présente quand une des observations a été faite aux environs du méridien.

La seconde circonstance susmentionnée correspond au cas où le point de rencontre des deux droites de hauteur converge vers l'infini, sans toutefois que les quantités g_1 et g'_1 du numéro précédent tendent elles-mêmes vers zéro (car en cette dernière hypothèse il y a rapprochement intime des points B, B', N et Z, *fig.* 13). En dehors de ladite hypothèse, le cas dont il s'agit se présente lorsque l'angle BNB' tend vers 0°, et par suite que l'écart azimutal des deux astres vaut 0° ou 180°, en même temps que g_1 et g'_1 ont le même signe. Effectivement alors, les deux droites BC et B'C' tendent à se confondre avec BB', en allant se croiser à l'infini sur cette droite.

— Afin de ne laisser subsister aucune obscurité sur les deux points importants qui précèdent, nous allons les traiter analytiquement.

A cet effet, remarquons que la formule (16 *bis*) du nº 25 peut être considérée comme les deux premiers termes du développement de $-\Delta G_1$ en fonction de ΔL_e. Or pour $\Delta L_e = +1'$, le premier membre donne $-g_1$, et le deuxième membre se réduit aux coefficients de ΔL_e et de $(\Delta L_e)^2$. En divisant membre à membre l'expression générale de ΔG_1 par l'expression particulière de g_1, en s'arrêtant d'ailleurs aux termes du second ordre, on trouve :

$$\frac{\Delta G_1}{g_1} = \frac{\Delta L_e}{1'}\left[1 + \frac{(\Delta L_e - 1')\sin 1'}{2\cos L_e}\left(\sin L_e - \frac{2\cot g P}{\sin 2Z}\right) + \dots\right] = \frac{\Delta L_e}{1'}(1+k),$$

expression donnée par M. Mas Saint-Guiral dans son cours de l'école navale pour discuter la méthode de Lalande-Pagel, et en déduire, comme nous le faisons ici, l'ensemble des cas où cette méthode *fait défaut*. — Or, aux environs du méridien, Z tend vers 0° ou 180°, et par suite le second terme de la parenthèse tend vers l'infini, ce qui montre que le développement qui a servi de point de départ à la dernière relation n'est plus licite. Par suite, il en est de même de l'équation $\Delta G_1 = g_1 \frac{\Delta L_e}{1'}$, qui sert de base aux formules Lalande-Pagel.

Aux environs du premier vertical, Z tendant vers 90° et 2Z vers 180°, on serait au premier abord porté à croire que la restriction précédente existe encore. Mais il faut observer que g_1 tend alors vers zéro, et que la dernière équation ci-dessus prend cette fois une forme indéterminée. Or on peut démontrer directement, en se reportant au n° 25, que ΔG_1 est en pareil cas un très-petit du second ordre; et en somme, l'équation qui nous occupe demeure applicable avec $Z = 90°$.

Par ailleurs, dès qu'on s'écarte un peu du méridien, l'erreur *relative* commise dans cette équation, et qui est évidemment représentée par le coefficient k de la relation générale ci-dessus, tombe tout de suite beaucoup au-dessous de l'unité. Par exemple, ce coefficient n'atteint que 1/15 pour $Z = 5°$ ou $(180° - 5°)$, avec P en temps $= 2^h50^m$ ou $(12^h - 2^h50^m)$ et $L = 60°$, ou avec $P = 1^h30^m$ ou $(12^h - 1^h30^m)$ et $L = 0°$. Mais l'erreur *absolue* affectant ladite équation devient *toujours* considérable, quand ΔL_e atteint de grandes valeurs, ce qui correspond, en définitive, au danger signalé au n° 5 de l'emploi de l'intersection de l'espèce L pour point déterminatif d'une droite de hauteur.

Il importe d'ajouter que l'expression générale du coefficient k indique bien la nécessité d'exclure en principe les distances zénithales extrêmement petites; car, en pareil occurrence, quel que soit d'ailleurs le moment de l'observation de l'astre, P se trouve toujours très-faible, et par suite cotg P et k deviennent très-grands. — Enfin, avec une très-grande latitude, $\cos L_e$ tendant vers zéro, k prend encore des valeurs élevées; et l'on est alors exposé aux mêmes restrictions que pour les environs de $Z = 0°$ ou 180°.

La discussion précédente établit analytiquement le cas où l'une des deux équations de départ de la méthode Lalande-Pagel cesse d'être valable, et correspond à la PREMIÈRE des deux défaillances dont nous avons établi géométriquement l'existence au commencement de ce numéro.

— Occupons-nous maintenant d'établir analytiquement la SECONDE desdites défaillances.

Pour cela, remarquons que la validité des deux équations de départ ne suffit pas pour mettre cette méthode à l'abri de cette seconde défaillance. En effet, le résultat final dépend de l'équation (25) du n° 43 :

$$\frac{\Delta L_e}{1'} = \frac{\Delta G_1 - \Delta G'_1}{g_1 - g'_1}.$$

Cette relation n'étant qu'approchée, cesse d'être applicable quand

les différences $(g_1 - g'_1)$ et $(\Delta G_1 - \Delta G'_1)$ viennent à être du même ordre de petitesse que les quantités négligées au dénominateur. Pour savoir quand cela se présente, il faut rétablir l'équation précédente dans toute sa rigueur, à l'aide de la valeur *complète* de ΔG_1 et $\Delta G'_1$ en fonction de ΔL_e, valeur dont l'expression générale a été donnée page 93. Nous trouverons facilement ainsi :

$$\frac{\Delta L_e}{1'} = \frac{\Delta G_1 - \Delta G'_1}{g_1(1+k) - g'_1(1+k')} = \frac{\Delta G_1 - \Delta G'_1}{g_1 - g'_1} + \frac{\Delta G_1 - \Delta G'_1}{g_1(1+k) - g'_1(1+k')} \times \frac{k'g'_1 - kg_1}{(g_1 - g'_1)}.$$

La quantité négligée est donc :

$$\frac{\Delta G_1 - \Delta G'_1}{g_1(1+k) - g'_1(1+k')} \times \frac{k'g'_1 - kg_1}{g_1 - g'_1}.$$

Le premier facteur de cette quantité étant la valeur *exacte* du rapport de $\frac{\Delta L_e}{1'}$, le second facteur représente l'erreur *relative* commise en se servant de la valeur approchée de ce rapport.

Si g_1 et g'_1 sont de signes *contraires*, cette erreur est évidemment moindre en grandeur absolue que la plus grande des deux quantités k ou k', abstraction faite de leurs signes. Or, en dehors du cas d'observations prises aux environs du méridien, et qui est déjà exclu non-seulement comme correspondant à la première défaillance, mais encore au point de vue général de l'atténuation des erreurs d'observation (n° 55), les coefficients k et k' sont en général notablement plus petits que l'unité, comme nous l'avons dit ci-dessus. — Si g_1 et g'_1 sont de *même* signe, l'erreur relative est évidemment plus petite en valeur absolue que la plus grande des deux quantités k ou k' multipliée par $\frac{g_1 + g'_1}{g_1 - g'_1}$. Or, si l'on remplace g_1 et g'_1 par leurs valeurs approchées $-\frac{\cot g Z}{\cos L_e}$, $-\frac{\cot g Z'}{\cos L_e}$, le rapport précédent devient $\frac{\sin(Z + Z')}{\sin(Z' - Z)}$. On voit dès lors que ce rapport, et *à fortiori* l'erreur relative qui nous occupe, ne sauraient atteindre une valeur considérable que dans le cas où $(Z' - Z)$, qui n'est autre que l'écart azimutal des deux astres, tend vers 0° ou 180°. Mais ce cas doit par ailleurs être exclu pour les deux mêmes motifs que ci-dessus.

— La discussion précédente indique que la méthode Lalande-Pagel est affectée de *défaillances* inhérentes à son *essence* même, et dont l'inconvénient est d'autant plus marqué que la délimitation de ces défaillances est en général complexe.

Ceci, joint à l'existence *toujours inévitable* de l'erreur absolue importante susmentionnée, qui affecte le résultat des calculs, lors d'une valeur élevée pour l'erreur ΔL_e de la latitude estimée, caractérise nettement l'infériorité de la méthode en question sur la méthode Marcq (n° 42) pour la détermination du point observé.

* **N° 45. Perfectionnement applicable à la méthode Lalande-Pagel.** — C'est ici le moment d'indiquer l'usage de la parabole osculatrice de M. Boitard, que nous avons définie au n° 25. Cet usage a pour objet de trouver une position du navire plus rapprochée du véritable point Z, *fig.* 13, que ne l'est le point de rencontre N des deux droites de hauteur employées avec la méthode Lalande-Pagel. En d'autres termes, M. Boitard s'est proposé de substituer à l'intersection des deux sécantes BN et B'N' celles de deux paraboles osculatrices passant sur la sphère, par les points B et B'.

On est ainsi conduit à substituer à deux équations de l'espèce (28) du n° 43, les relations :

$$G = G_1 + \frac{dP}{dL}\Delta L_e + \frac{d^2P}{dL^2}\frac{\sin 1'}{1.2}(\Delta L_e)^2.$$

$$G = G'_1 + \frac{dP'}{dL}\Delta L_e + \frac{d^2P'}{dL^2}\frac{\sin 1'}{1.2}(\Delta L_e)^2.$$

Dans ces relations, $\frac{dP}{dL}, \frac{d^2P}{dL^2}, \frac{dP'}{dL}, \frac{d^2P'}{dL^2}$ s'obtiennent comme il a été expliqué au n° 25. Il importe d'ailleurs de remarquer, en passant, que la valeur absolue de $\frac{dP}{dL}$ n'est pas égale à la valeur absolue de g_1, mais à la moyenne entre cette dernière valeur et la quantité correspondant à une variation de ΔL égale à $-1'$, encore en faisant abstraction des termes au delà du second ordre dans le développement *complet* de ΔP. Ce n'est donc que par approximation qu'on pourrait poser au besoin $\frac{dP}{dL} = -g_1 = \frac{15\varpi_1}{60}$.

En tout état de cause, on a présentement à résoudre l'équation du second degré en ΔL_e :

$$\left(\frac{d^2P'}{dL^2} - \frac{d^2P}{dL^2}\right)\frac{\sin 1'}{1.2}(\Delta L_e)^2 + \left(\frac{dP'}{dL} - \frac{dP}{dL}\right)\Delta L_e + G'_e - G_e = 0.$$

Le rapport du coefficient de $(\Delta L_e)^2$ au coefficient de ΔL_e se trouve être très-petit, dans les circonstances ordinaires. On peut alors

résoudre l'équation par approximations successives (*). A cet effet, on néglige d'abord le terme en $(\Delta L_e)^2$ pour avoir une première valeur $\Delta_1 L_e$ de l'inconnue. On remplace ensuite $(\Delta L_e)^2$ par $(\Delta_1 L_e)^2$, ce qui permet d'obtenir une nouvelle valeur de ΔL_e plus approchée que la première.

Mais ce mode de résolution cesse d'être licite quand le rapport en question n'est plus très-petit, ce qui a lieu quand une des hauteurs a été prise aux environs du méridien, et aussi à un moment quelconque par les latitudes très-élevées.—Il suit de là que le mode de rectification de M. Boitard s'évanouit dans le cas principal où la méthode Lalande-Pagel fait défaut (n° 44). Mais, en revanche, il évite la défaillance de cette méthode quand, g_1 et g'_1 étant de même signe, l'écart azimutal des deux astres se rapproche de 0° ou de 180°. Du reste, ce mode de rectification un peu long et complexe n'a pas reçu d'application courante dans la pratique.

✳ N° 46. Détermination indirecte par le calcul du point observé : méthode par la longitude estimée. — Arrivons maintenant à la solution par le *calcul* de la détermination de la position du navire dans le cas de deux droites de hauteur obtenues par des

(*) Les racines de l'équation générale du second degré $ax^2+bx+c=0$ peuvent s'écrire sous la forme :

$$x = \frac{2c}{b\left(-1 \pm \sqrt{1-\frac{4ac}{b^2}}\right)}.$$

Sous cette forme, on voit tout de suite que, quand le rapport $\frac{4ac}{b^2}$ est très-faible (ce pour quoi il suffit, en particulier, que a soit très-petit par rapport à b), une des racines tend vers $-\frac{c}{b}$, et l'autre vers l'∞. En pareil cas, on peut obtenir facilement la racine *finie*, qui d'ordinaire alors est la seule racine utile à connaître.

A cet effet, on prend comme première approximation $-\frac{c}{b}$, ce qui revient à considérer d'abord l'équation donnée, $ax^2+bx+c=0$, comme réduite à l'équation du premier degré $bx+c=0$. — En faisant $x^2=\frac{c^2}{b^2}$, dans ladite équation donnée, on obtient une nouvelle équation du premier degré, à savoir :

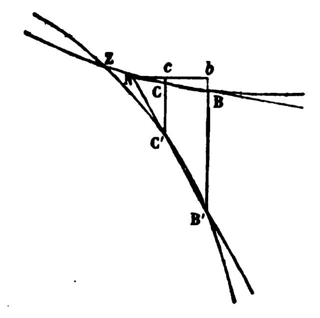
$$\frac{ac^2}{b^2}+bx+c=0,$$

dont la résolution donne une nouvelle valeur de la racine *finie* plus approchée que la première.

Mais il est manifeste que ce mode de résolution ne fournit plus rien qui vaille quand $\frac{4ac}{b^2}$ cesse d'être très-faible. Car on ne sait plus alors vers laquelle des deux racines on court; on peut même s'écarter des deux racines à la fois.

sécantes NCB et N'C'B', *fig.* 14, déterminées l'une et l'autre sur les cercles de hauteur ZB et ZB' à l'aide de points de l'espèce G (n° 3), c'est-à-dire déduits de la longitude estimée G_e.

Fig. 14, relative à la détermination du point observé, à l'aide de la méthode par la longitude estimée.



Tous les raisonnements employés dans la méthode Lalande-Pagel pour la recherche des coordonnées L et G de la position L du navire, sont ici applicables, en changeant la latitude en longitude et *vice versâ*, et en substituant à la formule d'angle horaire les relations logarithmiques (2) et (3) du n° 3.

Appelons l_1 et l'_1 les changements en latitude correspondant à $+1'$ de différence sur la longitude estimée dans les deux calculs de latitude exécutés avec cette longitude. Nous aurons sur la figure :

$$bc = 1' \times \cos L_e; \qquad bN = \Delta G_e \times \cos L_e;$$
$$Bb - Cc = l_1; \qquad Bb = \Delta L_1 = L - L_1,$$
$$B'b - C'c = l'_1; \qquad B'b = \Delta L'_1 = L - L'_1.$$

On trouvera dès lors les deux relations :

$$L = L_1 + l_1 \frac{\Delta G_e}{1'};$$
$$L = L'_1 + l'_1 \frac{\Delta G_e}{1'}.$$

D'où l'on tire :

$$\frac{\Delta G_e}{1'} = \frac{(L'_1 - L_1)}{(l_1 - l'_1)}; \qquad G = G_e + \Delta G_e = G_e + 1' \times \frac{(L'_1 - L_1)}{(l_1 - l'_1)};$$

Puis :

$$\Delta L'_1 = l'_1 \times \frac{(L'_1 - L_1)}{(l'_1 - l_1)}; \qquad L = L'_1 + \Delta L'_1 = L'_1 + l'_1 \times \frac{(L'_1 - L_1)}{(l_1 - l'_1)}.$$

Il y a ici à faire des remarques analogues à celles du n° 43 sur la possibilité de déduire ces formules de l'équation (10) du n° 15, en y calculant le coefficient par *voie indirecte*, et sur leur généralité eu égard aux signes conventionnels à donner aux éléments.

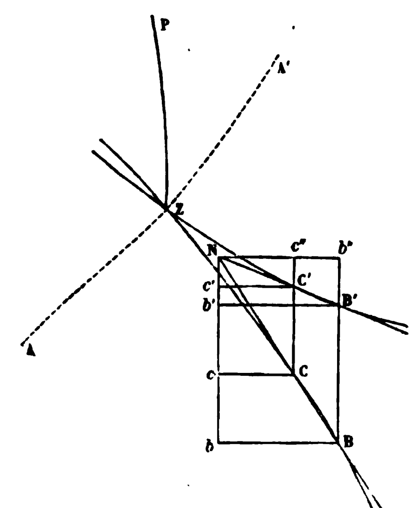
—Par des raisonnements semblables à ceux du n° 44, on démontre que : — 1° La méthode *fait défaut* du moment que l'une des observations est prise aux environs du premier vertical ; — 2° Elle donne de mauvais résultats par de très-grandes latitudes ; — 3° Enfin elle exige, dans le cas de l_1 et l'_1 de même signe, que l'écart azimutal des deux astres ne se rapproche pas de 0° ou 180°, circonstance qui

doit, d'ailleurs, être exclue au point de vue général de l'atténuation des erreurs d'observation (n° 55).

∗ **N° 47. Détermination indirecte par le calcul du point observé : méthode Borda et son inverse.** — A la suite des deux méthodes précédentes, il s'en présente naturellement deux autres résultant de la combinaison des deux premières entre elles.

Ainsi, après avoir déterminé le point B, *fig.* 15, sur le premier cercle de hauteur à l'aide de la latitude (ou de la longitude) estimée, il semble plus exact, au lieu de trouver B' sur le deuxième cercle avec le même élément, de le déterminer à l'aide de la longitude (ou de la latitude) déduite du premier calcul. Ceci revient à mener par le point B un méridien (ou un parallèle) jusqu'à sa rencontre avec le deuxième cercle de hauteur.

Fig. 15. relative à la détermination du point observé, par la méthode Borda.



— Pour mieux fixer les idées, considérons spécialement le cas où l'élément de départ est la latitude estimée L_e, en laissant au lecteur le soin d'en déduire, par analogie, la solution qui convient au cas où cet élément est la longitude estimée, c'est-à-dire au cas *inverse*.

Le premier calcul à faire est ici un calcul d'angle horaire avec L_e, d'où l'on tire G_1 pour la longitude du point B. A l'aide de G_1, on trouve la latitude L'_1 du point B' par les formules logarithmiques du n° 3; et on a ainsi les coordonnées L'_1 et G_1 du point B'. — En faisant varier la latitude estimée L_e de $+1'$, on obtient deux nouveaux points C et C', dont les coordonnées sont (L_e+1'), (G_1+g_1), et $(L'_1+l'_1)$, (G_1+g_1). Ces points déterminent avec B et B' deux *sécantes de hauteur* BCN et B'C'N, et la rencontre N de celles-ci fournit la position cherchée, dont les coordonnées inconnues sont L et G.

— Pour déterminer ladite rencontre par le calcul, nous remarquerons d'abord que $bc = +1'$, $b'c' = l'_1$, $(Bb - Cc) = g_1 \times \cos L_e$; et que les inconnues sont : $bN = \Delta L_e$; $Bb = B'b' = \Delta G_1 \times \cos L_e$; $b'N = \Delta L'_1$.

Les triangles N*b*B, N*c*C; N*b''*B', N*c''*C'; et N*b'*B', N*c'*C', donnent :

$$\frac{bN}{bc} = \frac{Bb}{Bb - Cc} = \left(\frac{b''N}{b''c''}\right) = \frac{b'N}{b'c'} = \frac{bN - b'N}{bc - b'c'}.$$

On tire de là d'une manière évidente :

$$\frac{\Delta L_e}{1'} = \frac{\Delta G_1}{g_1} = \frac{\Delta L'_1}{l'_1} = \frac{(\Delta L_e - \Delta L'_1)}{(1' - l'_1)}.$$

En écrivant la latitude L de N sous deux formes, on a :

$$L = L_e + \Delta L_e = L'_1 + \Delta L'_1.$$

D'où :

$$(\Delta L_e - \Delta L'_1) = (L'_1 - L_e).$$

Et par suite :

$$\frac{\Delta L_e}{1'} = \frac{(L'_1 - L_e)}{(1' - l'_1)}; \quad L = L_e + 1' \times \frac{(L'_1 - L_e)}{(1' - l'_1)};$$

$$\Delta G_1 = g_1 \times \frac{(L'_1 - L_e)}{(1' - l'_1)}; \quad G = G_1 + g_1 \times \frac{(L'_1 - L_e)}{(1' - l'_1)}.$$

— Pour que cette méthode soit plus avantageuse que l'une ou l'autre des précédentes, il est nécessaire que les points B' et C' aillent en se rapprochant de N.

Ainsi que le montre la *fig.* 15, cette condition exige que l'élément ZB du cercle de hauteur appartenant à l'observation qui sert de point de départ au calcul, ou le prolongement de cet élément, fasse avec le méridien PZ un angle aigu plus petit que l'angle analogue de la deuxième observation. — Comme les verticaux ZA et ZA' sont respectivement perpendiculaires aux éléments de cercle de hauteur dont il s'agit, ce qui précède revient à dire que l'observation de départ doit être faite avec l'astre observé le plus éloigné du méridien, et cela que les deux astres soient de part et d'autre de ce cercle ou d'un même côté. Rien n'empêche de choisir comme point de départ du calcul celle des deux observations que l'on veut. Il y a donc toujours moyen de s'arranger de façon à rendre la méthode efficace.

Il va de soi que la condition voulue serait renversée, si on employait le problème *inverse*, c'est-à-dire si on faisait reposer les calculs sur la longitude estimée au lieu de les baser sur la latitude estimée.

— La solution que nous venons d'indiquer n'est autre que celle employée par Borda, dans son célèbre voyage avec Verdun et Pingré. Il l'avait toutefois établie en s'appuyant sur un calcul de fausse position, comme il est expliqué ci-après (n° 49). Par ailleurs, Borda

avait aussi indiqué la condition d'efficacité que nous venons de signaler. Mais l'illustre navigateur ne semble pas avoir envisagé cette condition au point de vue de l'*essence* même du procédé. — Son idée dominante était de faire dépendre la latitude de l'observation la plus voisine du méridien, et la longitude de l'observation la plus éloignée, de façon à atténuer le plus possible, sur chaque calcul considéré en particulier, l'influence des erreurs même d'observation. C'est là un autre ordre de considérations qui ne fait que confirmer la nécessité de la condition qui nous occupe. Si cette condition n'était pas remplie, la méthode Borda, au lieu d'être, au moins théoriquement, supérieure à la méthode Lalande-Pagel, lui deviendrait inférieure.

Dans tous les cas, on est exposé ici à des *défaillances* analogues à celles inhérentes à l'essence même de cette dernière méthode (n° 44), quand l'observation qui entre dans le calcul de départ a été faite trop près du méridien (ou quand l'autre observation a été prise trop près du premier vertical).

✱ **N° 48. Détermination indirecte du point observé, par la théorie de la fausse position : premier genre.** — Au lieu de regarder toutes les solutions précédentes de la détermination du point observé comme dérivant de *l'emploi des droites de hauteur*, on peut les considérer comme une *application de la théorie générale des calculs de fausse position.*

On se trouve, en effet, ici en présence des deux équations (22) et (23) du n° 38. Or on peut résoudre ces équations à l'aide de la *fausse position* par rapport aux deux inconnues L et G, en s'aidant d'une valeur approchée L_e de L, ou G_e de G, valeur qui forme ce qu'on appelle l'*élément de départ.* — Le mode d'opérer se présente sous cinq *genres* distincts expliqués ci-après, et qui d'ailleurs se dédoublent chacun en deux *manières*, suivant qu'on prend L_e ou G_e pour ledit élément de départ. On verra dans ce qui suit, et comme nous le ferons ressortir explicitement aux endroits voulus, que ce mode a au fond, une entière connexité avec l'ordre d'idées développé aux n°s 14 et 15, eu égard aux explications, fournies à la fin du dernier de ces numéros, sur le calcul par *voie indirecte* des coefficients des diverses formules qui y sont données, et sur les deux *manières* dont se présente chaque fois ce calcul.

— Le *premier genre* de calcul de fausse position comporte, dans sa *première manière*, L_e comme élément de départ. On fait, en conséquence, $L = L_e$ dans les deux équations (22) et (23). Ces équations

donnent alors chacune une racine pour la deuxième inconnue G. Si les deux valeurs ainsi obtenues sont égales, ce qui ne saurait être que très-exceptionnel, on a la longitude cherchée, en même temps que la valeur L_e de la première inconnue se trouve être exacte. — Mais d'ordinaire, on obtient deux valeurs différentes G_1 et G'_1 pour la longitude. On recommence alors les calculs avec $(L_e + 1')$, ce qui donne deux nouvelles valeurs de G, savoir : $(G_1 + g_1)$, $(G'_1 + g'_1)$. En appelant ΔL_e, ΔG_1 et $\Delta G'_1$ les corrections à faire subir à L_e, G_1 et G'_1 pour avoir les valeurs de L et G qui satisfont aux deux équations, on se trouve en présence des quantités suivantes :

$$\begin{array}{lll} L_e, & G_1, & G'_1; \\ L_e + 1', & G_1 + g_1, & G'_1 + g'_1; \\ L_e + \Delta L_e, & G_1 + \Delta G_1, & G' + \Delta G'_1; \end{array}$$

avec la condition : $G_1 + \Delta G_1 = G'_1 + \Delta G'_1 = G$.

Dès lors, en admettant que les variations de la longitude soient proportionnelles aux variations de L_e, on trouve :

$$\frac{\Delta L_e}{1'} = \frac{\Delta G_1}{g_1} = \frac{\Delta G'_1}{g'_1} = \frac{(\Delta G_1 - \Delta G'_1)}{(g_1 - g'_1)} = \frac{(G'_1 - G)_1}{(g_1 - g'_1)}.$$

On retombe donc sur la solution donnée au n° 43, constituant la méthode Lalande-Pagel.

Il importe d'ajouter que c'est conformément au dernier ordre d'idées que nous venons d'expliquer, c'est-à-dire par la *théorie de la fausse position*, que la méthode en question a été établie par Lalande. D'autre part, ladite théorie rentre elle-même, pour le cas dont il s'agit, dans la résolution de deux équations de l'espèce de l'équation (9) du n° 15, où l'on calculerait les coefficients par *voie indirecte*, ainsi que cela a été expliqué au n° 43.

— Si au lieu de prendre L_e comme élément de départ, on se donnait G_e pour appliquer la fausse position suivant la *deuxième manière* du premier genre, on arriverait à une solution identique à la solution trouvée au n° 46, dans la méthode de la détermination du point observé par des sécantes de hauteur déduites de la longitude estimée.

Cette même application rentre au reste dans la résolution de deux équations de l'espèce (10) du n° 15, où l'on calculerait les coefficients par *voie indirecte*.

* **N° 49. Détermination indirecte du point observé, par la théorie de la fausse position : deuxième genre.** —

Dans ce *deuxième genre*, on introduit l'élément de départ L_e pour la *première manière* (ou G_e pour la *deuxième manière*) dans l'équation (22) du n° 38; et on en déduit G_1 (ou L_1). On porte cette dernière valeur dans l'équation (23), d'où on tire L'_1 (ou G'_1). — On recommence les calculs en introduisant $(L_e + 1')$ [ou $(G_e + 1')$] dans (22), et en en déduisant $(G_1 + g_1)$ [ou $(L_1 + l_1)$] qu'on porte dans (23). Il en résulte une valeur $(L'_1 + l'_1)$ [ou $(G'_1 + g'_1)$], — Si l'on a pris L_e comme élément de départ, on se trouve ainsi en présence des quantités suivantes :

$$\begin{array}{lll} L_e, & G_1, & L'_1; \\ L_e + 1', & G_1 + g_1, & L'_1 + l'_1; \\ L_e + \Delta L_e, & G_1 + \Delta G_1, & L'_1 + \Delta L'_1 \end{array}$$

avec la condition : $L_e + \Delta L_e = L'_1 + \Delta L'_1$.

Si l'on a pris G_e comme élément de départ, on est en regard de :

$$\begin{array}{lll} G_e, & L_1, & G'_1; \\ G_e + 1', & L_1 + l_1, & G'_1 + g'_1; \\ G_e + \Delta G_e, & L_1 + \Delta L_1, & G'_1 + \Delta G'_1, \end{array}$$

avec la condition : $G_e + \Delta G_e = G'_1 + \Delta G'_1$.

On obtient alors les proportions :

$$\frac{\Delta L_e}{1'} = \frac{\Delta G_1}{g_1} = \frac{\Delta L'_1}{l'_1} = \frac{(\Delta L_e - \Delta L'_1)}{(1' - l'_1)} = \frac{(L'_1 - L_e)}{(1' - l'_1)};$$

ou :

$$\frac{\Delta G_e}{1'} = \frac{\Delta L_1}{l_1} = \frac{\Delta G'_1}{g'_1} = \frac{(\Delta G_e - \Delta G'_1)}{(1' - g'_1)} = \frac{(G'_1 - G_e)}{(1' - g'_1)}.$$

La première ligne correspond à la méthode Borda que nous avons exposée géométriquement au n° 47, mais que son auteur avait trouvée en employant la fausse position, suivant la manière que nous venons d'indiquer. — La seconde ligne se rapporte à l'*inverse* de cette méthode.

Par ailleurs, les diverses relations ci-dessus pourraient se déduire de deux équations, l'une de l'espèce (9) [ou (10)] du n° 15, l'autre de l'espèce (10) [ou (9)], dont on calculerait les coefficients par *voie indirecte.*

*** N° 50. Détermination indirecte du point observé, par la théorie de la fausse position : troisième genre.** — Dans le *troisième genre* de calcul de fausse position, on commence, comme toujours, par introduire L_e pour la *première manière* (ou

G_e pour la ***deuxième manière***) dans l'équation (22) du n° 38, et on en déduit G_1 (ou L_1). On porte alors L_e et G_1 (ou G_e et L_1) dans (23); et on résout cette équation par rapport à *la hauteur*. Si la valeur ainsi trouvée est justement égale à la valeur connue H', L_e et G_1 (ou G_e et L_1), sont les bonnes valeurs des inconnues. — Mais ce cas ne saurait être que tout à fait exceptionnel. D'ordinaire, la valeur trouvée H'_1 différera de la hauteur observée H'. On recommencera alors les opérations avec $(L_e + 1')$ [ou $(G_e + 1')$], ce qui donnera, à l'aide de l'équation (22), $(G_1 + g_1)$ [ou $L_1 + l_1$)], et, à l'aide de l'équation (23), $(H'_1 + h'_1)$. — Si l'on a pris L_e comme point de départ, on se trouve alors en présence des quantités suivantes :

$$\begin{array}{lll} L_e, & G_1, & H'_1; \\ L_e + 1', & G_1 + g_1, & H'_1 + h'_1; \\ L_e + \Delta L_e, & G_1 + \Delta G_1, & H'; \end{array}$$

Si l'on a pris G_e comme élément de départ, on est en regard de:

$$\begin{array}{lll} G_e, & L_1, & H'_1; \\ G_e + 1', & L_1 + l_1. & H'_1 + h'_1; \\ G_e + \Delta G_e, & L_1 + \Delta L_1, & H'. \end{array}$$

D'où l'on déduit les proportions :

$$\frac{\Delta L_e}{1'} = \frac{\Delta G_1}{g_1} = \frac{H' - H'_1}{h'_1};$$

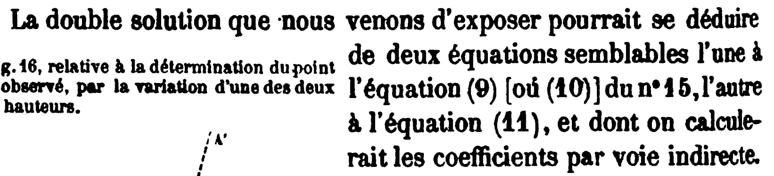
ou :

$$\frac{\Delta G_e}{1'} = \frac{\Delta L_1}{l_1} = \frac{H' - H'_1}{h'_1}.$$

La double solution que nous venons d'exposer pourrait se déduire de deux équations semblables l'une à l'équation (9) [ou (10)] du n° 15, l'autre à l'équation (11), et dont on calculerait les coefficients par voie indirecte.

— D'autre part, cette double solution, traduite ***graphiquement***, revient à ceci :

Fig. 16, relative à la détermination du point observé, par la variation d'une des deux hauteurs.



On a un cercle de hauteur NB, *fig.* 16, correspondant à un astre A. Avec la latitude estimée L_e (ou la longitude estimée G_e), on détermine le point β situé sur ce cercle. Du point A' représentant la position de l'astre lors de la seconde observation, on trace un cercle de hauteur Bβ avec A'B



pour rayon. En faisant varier L_e (ou G_e) de $+1'$, on trouve sur le cercle NB, un nouveau point C. Du point A' comme centre avec A'C comme rayon, on trace un nouveau cercle de hauteur Cγ. Enfin avec la seconde distance zénithale A'N observée, on trace le véritable cercle de hauteur Nν de cette observation. Il s'agit de trouver la position du point N à l'aide des cercles Bβ et Cγ.

Il suffit pour cela de considérer : 1° les deux triangles NnB et CcB, dans lesquels on a :

$$Bn = \Delta L_e,\ Nn = \Delta G_e \times \cos L_e; \quad Bc \text{ (ou } Cc) = 1'; \quad Cc = g_1 \times \cos L_e \text{ (ou } Bc = l_1);$$

2° les triangles NEB et NDC, où :

$$NE = (H' - H'_1); \qquad ED = h'_1.$$

On retombe alors sur les formules trouvées ci-dessus.

∗ **N° 51. Détermination indirecte du point observé, par la théorie de la fausse position : quatrième et cinquième genres.** — Pour le *quatrième genre* de calcul de fausse position, on opère absolument de la même façon que dans le numéro précédent, en substituant D' à H'. On trouve ainsi, pour les *deux manières* de ce genre, des relations entièrement analogues à celles qui conviennent à l'emploi de H'.

On peut voir par ailleurs que la solution rentre dans celle qu'on déduirait de deux équations de l'espèce (9) [ou (10)] du n° 15, l'autre de l'espèce (12), dont on calculerait les coefficients par *voie indirecte*. — Traduite graphiquement, cette nouvelle méthode revient à ceci :

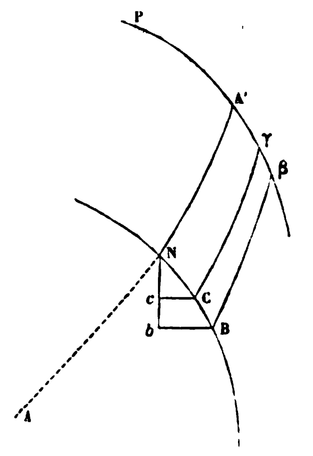


Fig. 17, relative à la détermination du point observé, par la variation d'une des deux déclinaisons.

Sur le cercle de hauteur NB, *fig.* 17, de l'astre A, on marque le point B, d'après la latitude estimée L_e (ou la longitude estimée G_e); puis le point C, à l'aide de ce même élément augmenté de 1'. Des points B et C comme centres avec Bβ = Cγ = la seconde distance zénithale observée comme rayon, on décrit des arcs de cercle, qui, dirigés du côté de la direction azimutale du deuxième astre, direction en principe connue, coupent en β et γ le cercle de déclinaison PA' de ce second astre. Il s'agit de trouver le point N de façon que NA' soit égal à Bβ et à Cγ. — A cet effet, on a

recours aux triangles NbB et NcC, où N$b = \Delta L_e$, bB $= \Delta G_e \times \cos L_e$, $bc = 1'$ (ou l_1), et (Bb—Cc)$= g_1 \cos L_e$ (ou $1'$). On remarque d'ailleurs que les arcs Bβ, Cγ et NA' sont très-voisins, et que, par suite, leurs cordes sont sensiblement parallèles. Comme, en outre, ces arcs sont égaux, on a sensiblement A'β ou la différence en déclinaison $(D' - D'_1) =$ NB, et $\gamma\beta$ ou d'_1, qui est la variation en déclinaison correspondant à $+1'$ de variation en latitude (ou en longitude estimée) $=$ CB. On se trouve ainsi à même d'obtenir les relations cherchées entre ΔL_e, $1'$ (ou l_1); ΔG_e, g_1 (ou $1'$); et $(D' - D_1')$, d'_1.

— Enfin, dans le *cinquième genre* de solution par la fausse position, c'est l'élément G'_a qui joue un rôle analogue à celui de H' et de D' dans les deux genres précédents. Par ailleurs, cette solution peut aussi, dans sa *première* (ou sa *deuxième*) *manière*, se déduire du n° 15 à l'aide de deux équations, l'une de l'espèce (9) [ou (10)], l'autre de l'espèce (13), dont on calculerait les coefficients par *voie indirecte*.

Au point de vue de son interprétation géométrique, le cinquième genre se rapproche du quatrième, sous la condition que, dans la *fig.* 17, l'arc A'$\gamma\beta$ du cercle de déclinaison de l'astre, soit remplacé par un arc de son parallèle.

Envisagées sous le rapport exclusif des calculs eux-mêmes, les deux manières du genre qui nous occupe rentrent, l'une dans la première manière du premier genre de solution par la fausse position (n° 48); l'autre dans la deuxième manière du second genre (n° 49).

* **N° 52. Considérations générales sur les déterminations indirectes par le calcul du point observé. Tableau synoptique de toutes les solutions possibles de la question.** — Considérons d'abord les divers modes d'opérer par la *fausse position* que nous venons d'expliquer. Ils donnent lieu à *douze* solutions approximatives de la détermination dont il s'agit. — Mais il faut remarquer pour cela que le nombre de solutions se *double* pour le troisième et le quatrième genres, en intervertissant entre elles les équations (22) et (23) du n° 38, c'est-à-dire en changeant l'observation dont les éléments entrent dans la formule de départ des calculs. En résolvant la question à l'aide des équations du n° 15, ceci revient à intervertir pour chacun des deux genres en question, l'ordre des espèces des équations propres à chacun d'eux.

Tout compte fait, on se trouve, du chef qui nous occupe, en présence du tableau suivant :

SOLUTIONS QUI RENTRENT DANS LA THÉORIE DE LA FAUSSE POSITION.

1er Genre.

- 1re *manière* = *solution* I : correspond à la rencontre de deux droites de hauteur ayant chacune leur point déterminatif de l'espèce L, et alors leur équation de la forme équation (9) du n° 15, quel que soit l'ordre dans lequel on se sert des deux observations.
- 2me *manière* = *solution* II : correspond à la rencontre de deux droites de hauteur ayant chacune leur point déterminatif de l'espèce G, et alors leur équation de la forme équation (10) du n° 15, quel que soit l'ordre dans lequel on se sert des deux observations.

2me Genre.

- 1re *manière* = *solution* III : correspond à la rencontre d'une 1re droite de hauteur ayant son point déterminatif de l'espèce L et relative à la 1re observation, avec une 2e droite de hauteur ayant son point déterminatif de l'espèce G et relative à la 2me observation.
- 2me *manière* = *solution* IV : correspond à la rencontre d'une 1re droite de hauteur ayant son point déterminatif de l'espèce G et relative à la 1re observation, avec une 2e droite de hauteur ayant son point déterminatif de l'espèce L et relative à la 2me observation.

3me Genre.

- 1re *manière*
  - = *solution* V : correspond à la rencontre d'une 1re droite de hauteur ayant son point déterminatif de l'espèce L et relative à la 1re observation, avec une 2e droite de hauteur ayant son point déterminatif de l'espèce Marcq, et alors son équation de la forme équation (11) du n° 15, cette 2e droite étant d'ailleurs relative à la 2me observation.
  - = *solution* VI : réciproque de la solution précédente, c'est-à-dire correspond à la rencontre d'une 1re droite de hauteur ayant son point déterminatif de l'espèce Marcq et relative à la 1re observation, avec une 2e droite de hauteur ayant son point déterminatif de l'espèce L et relative à la 2me observation.
- 2me *manière*
  - = *solution* VII : correspond à la rencontre d'une 1re droite de hauteur ayant son point déterminatif de l'espèce G et relative à la 1re observation, avec une 2e droite de hauteur ayant son point déterminatif de l'espèce Marcq et relative à la 2me observation.
  - = *solution* VIII : réciproque de la solution précédente.

4me Genre.

- 1re *manière*
  - = *solution* IX : correspond à la rencontre d'une 1re droite de hauteur ayant son point déterminatif de l'espèce L et relative à la 1re observation, avec une 2e droite de hauteur de l'espèce équation (12) du n° 15 et relative à la 2e observation.
  - = *solution* X : réciproque de la solution précédente.
- 2me *manière*
  - = *solution* XI : correspond à la rencontre d'une 1re droite de hauteur, ayant son point déterminatif de l'espèce G, et relative à la 1re observation, avec une 2e droite de hauteur de l'espèce équation (12) du n° 15 et relative à la 2me observation.
  - = *solution* XII : réciproque de la solution précédente.

5me Genre.

- 1re *manière* (rentre dans la *solution* I) : correspond à la rencontre d'une 1re droite de hauteur ayant son point déterminatif de l'espèce L et relative à la 1re observation, avec une 2e droite de hauteur de l'espèce équation (13) du n° 15, relative à la 2me observation, et qui se confond, du reste, avec une droite de hauteur ayant son point déterminatif de l'espèce L.
- 2me *manière* (rentre dans la *solution* IV) : correspond à la rencontre d'une 1re droite de hauteur ayant son point déterminatif de l'espèce G et relative à la 1re observation, avec une 2e droite de hauteur de l'espèce équation (13), relative à la 2me observation, et qui se confond, du reste, avec une droite ayant son point déterminatif de l'espèce L.

SOLUTIONS QUI **NE RENTRENT PAS** DANS LA THÉORIE DE LA FAUSSE POSITION.

Aux XII solutions distinctes précédentes, il faut joindre les solutions suivantes, qui ne rentrent pas dans la théorie de la fausse position :

Solution XIII : correspond à la rencontre de deux droites de hauteur ayant chacune leur point déterminatif de l'espèce Marcq, rencontre qui se calcule comme il est indiqué au n° 42.

Solution XIV : correspond à la rencontre de deux droites de hauteur de l'espèce équation (12) du n° 15, rencontre qui se calculerait à l'aide de la résolution de deux équations de ladite espèce.

Nous ne parlons pas des combinaisons analogues aux solutions XIII et XIV concernant les droites de hauteur de l'espèce équation (13) du n° 15; car ces droites se confondent avec des droites de hauteur ayant leur point déterminatif de l'espèce G. Mais il nous reste à ajouter aux solutions précédentes celle de Douwes et son *inverse* indiquées au n° 38, et qui forment les *solutions* XV et XVI.

— En résumé, le problème général de la détermination *indirecte* du point observé présente SEIZE solutions distinctes, et n'en offre aucune autre. Il était important de mettre ce résultat en évidence, afin de bien préciser le champ qui renferme non-seulement les solutions déjà usitées, mais encore toutes celles susceptibles d'être jamais proposées.

Au surplus, les quatorze premiers modes d'opération que nous venons d'énoncer, reposent sur l'hypothèse expresse qu'on soit en droit de regarder comme rectilignes les différentes portions de courbe que nous avons eu à considérer dans l'interprétation géométrique de chaque solution. — En outre, la plupart de ces modes sont exposés à des *défaillances* analogues à celles que nous avons signalées en détail au n° 44 à propos de la méthode Lalande-Pagel. Il est curieux d'ajouter que le manque de rigueur de l'hypothèse susmentionnée n'occasionne pas le même degré d'erreur dans les différents modes d'opération, et qu'en particulier il n'affecte d'ordinaire que modérément le mode qui correspond à la méthode Lalande-Pagel, à égal éloignement bien entendu des circonstances favorables à chaque solution, considérées au point de vue (n° 58) de l'*essence* même de celle-ci.

N° 53. Méthode allemande récente pour la détermination directe du point observé par calcul semi-logarithmique et semi-arithmétique. — Nous avons annoncé

cette méthode au n° 38. Nous avons indiqué en même temps ses avantages sur les autres procédés *directs* connus jusqu'ici, en bien spécifiant, en revanche, qu'elle demeurait inférieure aux *Nouvelles méthodes*, et que même, si l'on se bornait, pour la rapidité des calculs, à cinq décimales, elle fournissait une approximation moindre. Quoi qu'il en soit, avant d'en donner l'exposé, nous rappellerons les significations des diverses lettres dont nous allons faire usage. Ces significations demeurent conformes à la légende de la page 1, dont les conventions de signe sont d'ailleurs expressément applicables à tout ce qui suit. — Soient donc :

$T_{p,m}$, $T'_{p,m}$ heures, temps moyen de Paris déduites du chronomètre pour les deux observations ;
$T_{p,v}$, $T'_{p,v}$ heures temps vrai de Paris ;
$Æ_a$, $Æ'_a$ ascensions droites des deux astres, calculées respectivement pour les heures $T_{p,m}$ et $T'_{p,m}$;
$Æ_m$, $Æ'_m$ ascensions droites moyennes du Soleil, calculées aussi pour les heures $T_{p,m}$ et $T'_{p,m}$;
P, P' angles au pôle, comptés comme il a été dit dans la légende susmentionnée ;
T_a, T'_a heures ou angles horaires astronomiques des deux astres, se comptant de 0^h à 24 ;
$T_{p,a}$, $T'_{p,a}$ heures astronomiques des deux astres par rapport au méridien de Paris ;
H, H' hauteurs vraies ;
D, D' déclinaisons ;
L latitude cherchée du navire ;
G longitude d° d°.

Posons :

$$(P - P') = d.$$

Par une démonstration analogue à celle donnée au commencement du n° 38, on tirera de là :

$$d = (T_a - T'_a) \pm 24^h \text{ s'il est nécessaire.}$$

Comme on est libre d'ajouter G à T_a, et à T'_a ; et que $(T_a + G) = T_{p,a}$, et $(T'_a + G) = T'_{p,a}$, il viendra ainsi :

$$d = (T_{p,a} - T'_{p,a}) \pm 24^h \text{ s'il est nécessaire.}$$

Soit :

$$(29) \qquad d = (T_{p,m} + Æ_m - Æ_a) - (T'_{p,m} + Æ'_m - Æ'_a) \pm 24^h \text{ s'il est nécessaire.}$$

Dans cette relation, $T'_{p,m} = T_{p,m}$, et $Æ'_m = Æ_m$, si les deux observations sont simultanées.

Dans le cas du Soleil, ladite expression se transforme facilement en la suivante :

$$(29\ bis) \qquad d = (T_{p,v} - T'_{p,v}) \pm 24^h \text{ s'il est nécessaire.}$$

— Les triangles de position relatifs aux deux observations donnent, d'après les formules (1) du n° 1 :

$$\sin H = \sin D \sin L + \cos D \cos L \cos P; \quad \sin H' = \sin D' \sin L + \cos D' \cos L \cos (P-d).$$

Divisant respectivement par $\cos D$ et $\cos D'$, et posant :

(30) $$u = \frac{\sin H}{\cos D};$$ (31) $$v = \frac{\sin H'}{\cos D'};$$

on obtient :

(32) $$u = \frac{\sin H}{\cos D} = \operatorname{tg} D \sin L + \cos L \cos P;$$

(33) $$v = \frac{\sin H'}{\cos D'} = \operatorname{tg} D' \sin L + \cos L \cos (P-d)$$

Comme $\cos P + \cos (P-d) = 2\cos\left(P - \frac{d}{2}\right)\cos\frac{d}{2}$, et que $\cos P - \cos (P-d) = -2\sin\left(P-\frac{d}{2}\right)\sin\frac{d}{2}$, nous aurons en ajoutant et retranchant (32) et (33) :

$$(u+v) = (\operatorname{tg} D + \operatorname{tg} D')\sin L + 2\cos L \cos\left(P-\frac{d}{2}\right)\cos\frac{d}{2};$$

$$(u-v) = (\operatorname{tg} D - \operatorname{tg} D')\sin L - 2\cos L \sin\left(P-\frac{d}{2}\right)\sin\frac{d}{2}.$$

D'où :

(34) $$\frac{(u+v)}{2\cos\frac{d}{2}} = \frac{\operatorname{tg} D + \operatorname{tg} D'}{2\cos\frac{d}{2}}\sin L + \cos L \cos\left(P-\frac{d}{2}\right);$$

et

(35) $$\frac{(u-v)}{2\sin\frac{d}{2}} = \frac{\operatorname{tg} D - \operatorname{tg} D'}{2\sin\frac{d}{2}}\sin L - \cos L \sin\left(P-\frac{d}{2}\right).$$

Posons pour simplifier :

(36) $$a = \frac{(u+v)}{2\cos\frac{d}{2}};$$ (37) $$a' = \frac{(u-v)}{2\sin\frac{d}{2}}.$$

(38) $$b = \frac{(\operatorname{tg} D + \operatorname{tg} D')}{2\cos\frac{d}{2}} = \frac{\sin(D+D')}{2\cos\frac{d}{2}\cos D \cos D'}.$$

(39) $$b' = \frac{(\operatorname{tg} D - \operatorname{tg} D')}{2\sin\frac{d}{2}} = \frac{\sin(D-D')}{2\sin\frac{d}{2}\cos D \cos D'}.$$

Les expressions (34) et (35) deviendront alors :

(40) $$(a - b \sin L) = \cos L \cos\left(P - \frac{d}{2}\right).$$

(41) $$(a' - b' \sin L) = -\cos L \sin\left(P - \frac{d}{2}\right).$$

Élevant au carré ces deux dernières équations, et ajoutant les résultats, on trouve :

$$(a - b \sin L)^2 + (a' - b' \sin L)^2 = \cos^2 L = 1 - \sin^2 L.$$

D'où, en développant :

$$(1 + b^2 + b'^2) \sin^2 L - 2(ab + a'b') \sin L = (1 - a^2 - a'^2);$$

soit :

$$\sin^2 L - \frac{2(ab + a'b')}{(1 + b^2 + b'^2)} \times \sin L = \frac{(1 - a^2 - a'^2)}{(1 + b^2 + b'^2)}.$$

Posons enfin :

(42) $$Q = \frac{(ab + a'b')}{(1 + b^2 + b'^2)};$$ et (43) $$q = \frac{(1 - a^2 - a'^2)}{(1 + b^2 + b'^2)}.$$

Il viendra :

$$\sin^2 L - 2Q \times \sin L - q = 0.$$

D'où on tire évidemment :

(44) $$\sin L = Q \pm \sqrt{Q^2 + q},$$

équation qui se dédouble dans les deux suivantes :

$$\sin L_1 = Q + \sqrt{Q^2 + q},$$
$$\sin L_2 = Q - \sqrt{Q^2 + q}.$$

D'après la condition expresse, qui résulte des conventions de signes de la légende page 1, de regarder toujours la latitude comme *positive*, et de déduire de son nom comparé à celui des déclinaisons les signes de celles-ci, il faut, dans le problème qui nous occupe, commencer par fixer, dès le début, le *nom de la latitude* d'après l'estime. — Donc, en principe, la solution à choisir correspondra à une valeur positive de sin L. Lorsque les deux solutions satisfont à cette condition, on prendra celle qui se rapprochera le plus de l'estime. Si de plus, en pareil cas, ces solutions sont peu différentes entre elles, il faudra avoir égard, pour fixer son choix, aux présomptions de l'influence des courants et des erreurs de loch et de route sur la position du navire. — Lorsque des deux solutions il y en a une de négative, le choix à faire n'est pas douteux, à

moins qu'on ne se trouve aux environs de l'équateur; car alors le nom de la latitude prise comme point de départ du calcul est susceptible d'être faux. En semblable occurrence, on peut être conduit à prendre la valeur négative en changeant alors le nom de la latitude. Si de plus les deux valeurs sont alors peu différentes entre elles, on agira comme plus haut. — Enfin, si, par hasard, les deux solutions étaient *négatives*, cela prouverait qu'on s'est trompé au début du calcul sur le nom de la latitude. Une pareille circonstance ne peut évidemment se présenter qu'aux environs de l'équateur; et ce qui précède indique comment on devra alors procéder.

— En tout état de cause, une fois la *latitude fixée*, on déterminera P par la formule :

$$(45) \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{d}{2} - P\right) = \frac{(a' - b' \sin L)}{(a - b \sin L)},$$

qu'on obtient en divisant (41) par (40).

Puis avec P, on calculera par les moyens connus l'heure de l'astre considéré sur le méridien. Enfin la comparaison de cette heure avec l'heure de Paris déduite du chronomètre, fournira la *longitude*.

— Dans le cas où la déclinaison D est la même, ou à très-peu près, pour les deux observations, les formules générales précédentes deviennent les suivantes, abstraction faite des relations intermédiaires :

$$(30\ bis) \quad u = \frac{\sin H}{\cos D}; \qquad (31\ bis) \quad v = \frac{\sin H'}{\cos D};$$

$$(36\ bis) \quad a = \frac{(u+v)}{2\cos\frac{d}{2}}; \qquad (37\ bis) \quad a' = \frac{(u-v)}{2\sin\frac{d}{2}};$$

$$(38\ bis) \quad b = \frac{\operatorname{tg} D}{\cos\frac{d}{2}}; \qquad (39\ bis) \quad b' = 0;$$

$$(42\ bis) \quad Q = \frac{ab}{(1+b^2)}; \qquad (43\ bis) \quad q = \frac{(1+a^2+a'^2)}{(1+b^2)};$$

$$(44\ bis) \qquad \sin L = Q \pm \sqrt{Q^2 + q};$$

$$(45\ bis) \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{d}{2} - P\right) = \frac{a'}{(a - b \sin L)}.$$

— On trouvera à la fin du texte, aux DEUX TYPES DE CALCUL Nos 5 et 6, des applications de la méthode que nous venons de développer : l'un de ces types concerne le cas de deux astres quelconques; le second se rapporte à deux observations du Soleil.

1re PARTIE. — § VII. Cas de deux observations : circonstances favorables a la détermination du point observé.

N° 54. Classification à divers points de vue des circonstances favorables à la détermination du point observé. — Les circonstances favorables dont il s'agit doivent être classées à cinq points de vue distincts, à savoir :

1° Au point de vue de l'influence des erreurs d'observation sur l'intersection rigoureuse des cercles de hauteur ;

2° Au point de vue des erreurs de l'estime dans l'intervalle des deux observations ;

3° Au point de vue des erreurs dues à la substitution des droites de hauteur aux cercles de hauteur, substitution qui existe *explicitement* dans les méthodes graphiques, et *implicitement* dans les méthodes par le calcul ;

4° Au point de vue de l'influence des erreurs tant des hauteurs que du point estimé sur les positions des points déterminatifs des droites de hauteur, et sur la détermination de ces droites elles-mêmes ;

5° Au point de vue des erreurs provenant, avec l'usage des *sécantes* pour droites de hauteur, de l'erreur même des procédés employés pour trouver par le calcul l'intersection de ces sécantes ;

6° Au point de vue du degré d'approximation des calculs, point de vue dont l'objet a été mis en évidence au n° 33, et corroboré en même temps que le point de vue qui concerne l'abréviation du problème considéré lui-même, par les remarques générales terminant ledit numéro, et auxquelles on ne saurait trop se reporter.

Au surplus, ainsi qu'à ce même numéro, il n'existe pas ici de circonstances favorables concernant les erreurs afférentes aux chronomètres eux-mêmes.

— D'autre part, les deux premiers points de vue conviennent aussi bien à la détermination rigoureuse du point observé, c'est-à-dire à sa détermination par la résolution du quadrilatère sphérique (n° 38), qu'à la détermination approximative dudit point.

N° 55. Circonstances favorables à la détermination du point observé, eu égard aux erreurs d'observation. — Remarquons d'abord que les erreurs d'observation, tout en portant principalement sur les hauteurs, comprennent aussi les

erreurs sur l'appréciation de l'intervalle entre les deux moments où on a pris celles-ci.

Cela compris, considérons la formule générale (1) du n° 1, appliquée aux deux observations faites, celles-ci étant d'ailleurs supposées ramenées au même horizon. Nous aurons de la sorte :

$$\sin H = \sin L \sin D + \cos L \cos D \cos P,$$
$$\sin H' = \sin L \sin D' + \cos L \cos D' \cos P'.$$

Différentions ces équations par rapport à L, P, H et H'; et substituons ensuite aux différentielles des différences. Nous nous rappellerons d'ailleurs (n° 38) que :

$$P = (G_a - G);$$
$$P' = (G'_a - G) = (G_a + I - G), \quad \text{ou} \quad (G_a + Æ'_a - Æ'_{a,1} + I - G),$$

suivant qu'on a observé un même astre ou deux astres différents.

On a d'abord :

$$\Delta P = -\Delta G; \quad \Delta P' = \Delta I - \Delta G.$$

Puis, en tenant compte, après les différentiations, des relations de l'espèce $\text{tg}\, D \cos L = \text{cotg}\, Z \sin P + \sin L \cos P$, et $\frac{\cos H}{\cos D} = \frac{\sin P}{\sin Z}$, déduites des deux triangles de position, il viendra :

$$\Delta H = \cos L \sin Z \times \Delta G + \cos Z \times \Delta L,$$
$$\Delta H' = \cos L \sin Z' \times (\Delta G - \Delta I) + \cos Z' \times \Delta L.$$

Il est intéressant de remarquer que ces deux relations rentrent dans l'équation (11) du n° 15, en y faisant $(H - H_1) = \Delta H$. Ce résultat s'explique naturellement en remarquant que la série de relations invoquées est identiquement la même dans les deux cas; il n'y a que les points de vue auxquels on s'est placé qui diffèrent. On pourrait d'ailleurs établir géométriquement lesdites relations en suivant la marche indiquée au n° 42 pour les formules qui y sont démontrées. — En tout état de cause, ces relations sont générales sous la seule réserve de donner à leurs éléments les signes conventionnels de la légende page 1. Par ailleurs, on y substitue *ad libitum* à l'erreur en longitude ΔG, l'erreur en chemin E.O : $\Delta E = \Delta G \cos L$. On a alors :

$$(46) \qquad \Delta L = \frac{\sin Z' \times \Delta H - \sin Z \times \Delta H'}{\sin(Z' - Z)} - \frac{\cos L \sin Z \sin Z' \times \Delta I}{\sin(Z' - Z)}.$$

$$(47) \quad \Delta G \cos L, \text{ ou } \Delta E = -\frac{\cos Z' \times \Delta H - \cos Z \times \Delta H'}{\sin(Z' - Z)} + \frac{\cos L \cos Z \sin Z' \times \Delta I}{\sin(Z' - Z)}.$$

D'après ces équations, il est manifeste qu'on se trouve dans des

circonstances favorables à l'atténuation de l'influence des erreurs de H, H' et I sur le point observé, quand $(Z' - Z) = 90°$, c'est-à-dire quand les deux hauteurs ont été prises dans deux verticaux à angle droit. — Toutefois, ces circonstances favorables n'ont pas ici un caractère ***absolu***, comme celles, par exemple, qui concernent le calcul d'angle horaire. Car, suivant les valeurs particulières de Z et de Z', et les signes respectifs des erreurs, il peut y avoir d'autres moments où ladite atténuation se présente dans des conditions non moins avantageuses.

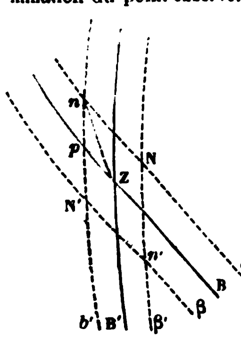
— Si l'on tenait compte des termes du ***second ordre*** dans les développements ci-dessus, on trouverait comme nouvelle circonstance favorable que les deux hauteurs observées doivent être égales à 0°. Ces deux conditions se traduisent en une seule, à savoir : ***le triangle formé par les deux distances zénithales observées et par le grand cercle qui joint les deux astres doit être un triangle sphérique tri-rectangle.***

Il y a au surplus une grande importance à ce que chacune des distances zénithales ne soit pas trop petite. Sans cela, les points d'intersection des deux cercles sont très-rapprochés ; et on se trouve, comme nous l'avons déjà dit au n° 41, en présence de deux solutions dont la véritable demeure en général indéterminée.

— On peut arriver par de simples considérations géométriques aux résultats précédents, abstraction faite des erreurs sur l'intervalle I, erreurs qui sont en principe négligeables, ou que tout simplement on peut regarder comme comprises dans les erreurs sur les hauteurs.

Soient ZB et ZB', *fig.* 18, les deux cercles de hauteur dont l'intersection Z est la position rigoureuse du navire. Si nous supposons des erreurs tant positives que négatives sur les hauteurs, nous obtiendrons pour chaque observation deux cercles de hauteur erronés N*b*, N'β d'une part, et Nβ', N'*b*' d'autre part. Les rencontres des deux paires de cercles erronés, donnent naissance à un parallélogramme curviligne *n*N*n*'N', dont les sommets représentent les positions limites erronées du navire. La plus grande distance, telle que Z*n*, de l'intersection Z à ces quatre sommets, figure l'erreur maximum sur le point observé. Il est dès lors manifeste que les circonstances favorables auront lieu quand cette erreur sera aussi

Fig. 18, relative aux circonstances favorables à la détermination du point observé.



restreinte que possible pour de mêmes erreurs sur les hauteurs, c'est-à-dire pour de mêmes écarts respectifs entre les cercles de hauteur erronés. Or, ceci a lieu quand le parallélogramme $nNn'N'$ tend vers un rectangle, et que, par suite, l'angle de ses diagonales devient droit; en d'autres termes, quand les deux cercles de hauteur et conséquemment les deux verticaux des astres se coupent rectangulairement.

D'autre part, toutes choses égales d'ailleurs, la plus grande distance du point central Z dudit parallélogramme à ses sommets, c'est-à-dire le maximum d'erreur sur le point observé résultant d'erreurs données sur les hauteurs, augmente de longueur avec la courbure des côtés, de sorte que, sous ce rapport, il y a avantage à ce que les rayons des cercles de hauteur, c'est-à-dire les distances zénithales se rapprochent de 90°. Nous retombons donc bien dans la condition sus-énoncée d'un triangle sphérique tri-rectangle.

— Ce qu'il importe aussi de considérer, à côté de l'erreur en latitude et en longitude, c'est la valeur de distance même dont nous venons de parler entre le point observé et le point réel. Nous allons donc calculer quelle est cette valeur pour des limites fixées d'erreur sur les hauteurs. D'après ce qui est dit quelques lignes plus haut, nous ferons abstraction des erreurs sur l'intervalle I. — On a évidemment :

$$nZ = \sqrt{\Delta L^2 + \Delta \text{E}^2},$$

nZ, *fig.* 18, représentant la distance entre le point Z et le sommet le plus *éloigné du parallélogramme* $NnN'n'$.

En remplaçant ΔL et ΔE par leurs expressions (46) et (47), il vient :

$$nZ = \frac{\sqrt{\Delta H^2 + \Delta H'^2 + 2\Delta H \times \Delta H' \times \cos(Z' - Z)}}{\sin(Z' - Z)}.$$

Cette relation peut également s'établir par la géométrie; car le triangle Zpn donne :

$$\overline{nZ}^2 = \overline{pZ}^2 + \overline{pn}^2 - 2pZ \times pn \cos npZ;$$

soit :

$$\overline{nZ}^2 = \overline{pZ}^2 + \overline{pn}^2 + 2pZ \times pn \cos(Z' - Z).$$

Or, on a évidemment : $pZ = \dfrac{\Delta H}{\sin(Z' - Z)}$; de même $pn = \dfrac{\Delta H'}{\sin(Z' - Z)}$.

On trouve donc comme plus haut :

$$nZ = \frac{\sqrt{\Delta H^2 + \Delta H'^2 + 2\Delta H \times \Delta H' \times \cos(Z' - Z)}}{\sin(Z' - Z)}.$$

Cette relation montre que, pour rendre nZ minimum, il faut prendre $(Z'-Z)=90^\circ$.

Si l'on suppose :

$$\Delta H=\Delta H'=1'.$$

on trouve que, pour $(Z'-Z)=90^\circ$:

$$nZ=\sqrt{2}=1',4;$$

pour $(Z'-Z)=60^\circ$:

$$nZ=\frac{\sqrt{2+1}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=2',0;$$

enfin, pour $(Z'-Z)=30^\circ$:

$$nZ=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\left(\frac{1}{2}\right)}=3',9.$$

En résumé, on doit, autant que possible, prendre $(Z'-Z)$ supérieur à 45°, qui correspond à $nZ=2',6$, pour une erreur de $1'$ sur chaque hauteur.

N° 56. Corollaire du n° 55 : Règle importante pour apprécier, suivant les circonstances des observations, le degré de confiance à accorder d'une part à la latitude, d'autre part à la longitude, fournies par un calcul du point observé. — Pour tirer tout le parti possible des équations (46) et (47), abstraction faite de ΔI d'après les motifs donnés au numéro précédent, il faut prendre en considération le *plus petit* SINUS (ou COSINUS) AZIMUTAL, qui ne doit pas, en général, être confondu avec le sinus (ou cosinus) du plus petit azimut. — Soit, par exemple, $\sin Z$ (ou $\cos Z$), ce plus petit sinus (ou cosinus) azimutal. Comme on a évidemment :

$$Z'=Z+(Z'-Z),$$

lesdites équations peuvent s'écrire :

$$\Delta L=\cos Z\times\Delta H+\frac{\sin Z}{\sin(Z'-Z)}\left[\cos(Z'-Z)\times\Delta H-\Delta H'\right];$$

$$\Delta \textsc{e}=\sin Z\times\Delta H-\frac{\cos Z}{\sin(Z'-Z)}\left[\cos(Z'-Z)\times\Delta H-\Delta H'\right].$$

Ces deux nouvelles relations montrent que les erreurs ΔL et $\Delta \textsc{e}$ seront, en principe, de même ordre de grandeur que ΔH et $\Delta H'$, tant que les valeurs absolues de $\frac{\sin Z}{\sin(Z'-Z)}$ et de $\frac{\cos Z}{\sin(Z'-Z)}$ s'écarteront peu de l'unité. On arrive ainsi à la règle importante suivante, due à M. Crévost :

Pour que la position du navire en latitude (ou en longitude) soit déterminée avec une approximation acceptable, IL FAUT ET IL SUFFIT *que, en valeur absolue, le* SINUS DE LA DIFFÉRENCE AZIMUTALE *soit supérieur au* PLUS PETIT SINUS (*ou* COSINUS) AZIMUTAL, *ou au moins en diffère très-peu.*

Nous verrons plus tard (nos 60 à 62) tout le profit qu'on peut tirer de cette règle, aussi élégante que simple, dans l'appréciation de la valeur des méthodes proposées pour déterminer la position du navire, par deux observations faites en dehors des conditions habituelles.

N° 57. Circonstances favorables à la détermination du point observé, eu égard aux erreurs de l'estime dans l'intervalle des observations. — Que l'on tienne compte du changement de zénith en introduisant dans les formules les changements en latitude et en longitude, ou en ramenant l'une des hauteurs à l'horizon de l'autre, l'influence des erreurs de l'estime sera évidemment la même dans l'un et l'autre cas. Or, dans le second cas, lesdites erreurs se traduisent par une erreur sur la hauteur dont on change l'horizon. Les circonstances favorables qui nous occupent rentrent donc dans les précédentes. — Seulement, elles exigent en plus que l'intervalle des deux observations ne soit pas trop étendu, puisque les erreurs de l'estime croissent avec cet intervalle.

Les erreurs de l'estime dans l'intervalle des observations ont une influence beaucoup plus considérable qu'on ne pourrait le supposer tout d'abord. On vient de voir que ces erreurs se traduisent par une erreur sur la hauteur dont on change l'horizon. Or la formule du n° 39 est :

$$\Delta H = \text{M} \cos \omega.$$

Différentions cette équation par rapport à ΔH, M et ω; puis substituons aux différentielles des différences. Nous aurons :

$$\Delta(\Delta H) = \Delta \text{M} \cos \omega - \text{M} \sin \omega \Delta\omega.$$

Comme on ne connaît pas dans quel sens se produit l'erreur sur la route, autrement dit le signe de ΔM, il faut évidemment, pour avoir une valeur maximum de l'erreur cherchée, écrire la relation précédente sous la forme :

$$\Delta(\Delta H) = \Delta \text{M} \cos \omega + \text{M} \sin \omega \Delta\omega.$$

Supposons, ce qui est généralement licite, que les erreurs sur les résultats du loch soient proportionnelles à la vitesse du navire, et que le courant, s'il y en a, demeure sensiblement constant en rapidité et en direction. Dès lors ΔM sera proportionnel au chemin par-

couru M ; et on pourra poser $\Delta M = \frac{M}{q}$. De son côté, l'erreur $\Delta\omega$ provenant de l'angle de route correspondra à un certain nombre constant de degrés $r°$; et à la différence d'arc $\Delta\omega$, on sera en droit de substituer sin $r°$. Nous aurons ainsi en définitive :

$$\Delta(\Delta H) = \frac{M}{q} \cos\omega + M \sin\omega \sin r°.$$

Cette formule, soit dit en passant, peut se trouver aisément par la géométrie.

Quoi qu'il en soit, supposons, par exemple, qu'on estime la vitesse à $\frac{1}{20}$ près $= \frac{1}{q}$; et l'angle de route à 3° près $= r°$. Si l'on a $\omega = 50°$ et $M = 30$ milles, on trouvera :

$$\Delta(\Delta H) = \frac{30}{20} \times \cos 50° + 30 \times \sin 50° \sin 3° = 0',96 + 1',19 = 2',15.$$

Ainsi, l'erreur sur une hauteur *ramenée* à un autre zénith peut s'élever à 2',15, en admettant que les erreurs de vitesse et de direction se soient tenues dans les limites données, lesquelles seront rarement dépassées en pratique.

Appelons maintenant :

$2\varepsilon = \Delta(\Delta H)$ l'erreur sur la première hauteur due à l'estime ;
E l'erreur maximum sur le point observé, provenant des erreurs propres sur les hauteurs et des erreurs de l'estime.

On aura, d'après la formule en nZ de la fin du n° 55 :

$$E = \frac{\sqrt{(\Delta H + 2\varepsilon)^2 + \Delta H'^2 + 2(\Delta H + 2\varepsilon)\Delta H' \times \cos(Z' - Z)}}{\sin(Z' - Z)}.$$

Telle est la limite de l'erreur que l'on peut avoir à craindre sur le point observé, eu égard seulement aux erreurs d'estime et d'observation.

* — La formule précédente peut servir à démontrer, par *curiosité*, que le point calculé pour *l'heure moyenne intermédiaire* entre les deux observations, est *plus exact* que le point calculé pour l'heure de la deuxième observation. En effet, si l'on ramène les deux hauteurs à ce qu'elles devraient être pour l'heure milieu, les erreurs sur ces deux hauteurs provenant des erreurs d'estime seront toutes deux égales à la moitié de la limite trouvée, c'est-à-dire à ε. La limite d'erreur E' à craindre sur le point moyen sera donc :

$$E' = \frac{\sqrt{(\Delta H + \varepsilon)^2 + (\Delta H' + \varepsilon)^2 + 2(\Delta H + \varepsilon)(\Delta H' + \varepsilon)\cos(Z' - Z)}}{\sin(Z' - Z)}.$$

Développons la quantité placée sous le radical dans le numérateur de E'; il viendra :

$$\overline{\Delta H}^2 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \times \Delta H + \overline{\Delta H'}^2 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \times \Delta H' + 2\Delta H \times \Delta H' \cos(Z'-Z) + 2\varepsilon(\Delta H + \Delta H')\cos(Z'-Z) + 2\varepsilon^2 \cos(Z'-Z);$$

ce que l'on peut écrire :

$$\overline{\Delta H}^2 + \overline{\Delta H'}^2 + 2\Delta H \times \Delta H' \cos(Z'-Z) + 2\varepsilon\left[1 + \cos(Z'-Z)\right]\left[\varepsilon + \Delta H + \Delta H'\right].$$

Développons de la même façon la quantité placée sous le radical dans le numérateur de E; nous aurons, toutes réductions faites :

$$\overline{\Delta H}^2 + \overline{\Delta H'}^2 + 2\Delta H \times \Delta H' \cos(Z'-Z) + 4\varepsilon\left[\varepsilon + \Delta H + \Delta H' \cos(Z'-Z)\right].$$

On voit sans peine que cette dernière expression est plus grande que le développement précédent de E', ce qui démontre bien l'assertion susénoncée.

On trouve d'ailleurs que la différence des carrés des deux numérateurs, est :

$$2\varepsilon\left[1 - \cos(Z'-Z)\right]\left[\varepsilon + \Delta H - \Delta H'\right].$$

Par suite, la différence entre les deux limites E et E' vaut :

$$E - E' = \frac{2\varepsilon\left[1 - \cos(Z'-Z)\right]\left[\varepsilon + \Delta H - \Delta H'\right]}{(E + E')\sin^2(Z'-Z)}$$

N° 58. Circonstances favorables à la détermination du point observé aux points de vue 3°, 4°, 5° et 6° du n° 54. — Aux points de vue de la substitution (*explicite* lors des méthodes *graphiques*, ou implicite lors des méthodes chiffrées) des droites de hauteur aux cercles de hauteur, et de l'influence des erreurs tant de la hauteur que du point estimé sur les positions des points déterminatifs desdites droites, les circonstances favorables sont évidemment les mêmes pour le point complet que celles expliquées antérieurement (n°s 34 à 36) pour une seule droite de hauteur. — D'après ces divers points de vue, on peut être amené, si l'on se trouve dans des conditions trop désavantageuses, à recommencer toutes les opérations avec les éléments qu'on vient de calculer. Mais ce mode d'approximations successives ne se prête guère à un usage rationnel qu'avec le procédé Marcq Saint-Hilaire, et encore selon la marche indiquée au n° 42.

D'autre part, avec l'usage (explicite ou implicite) de *sécantes* pour droites de hauteur, les circonstances favorables à l'*essence* même des procédés employés pour trouver par le calcul l'intersection de ces

sécantes, ressortent des exigences signalées aux nᵒˢ 44 et 46 de la méthode Lalande-Pagel, et de la méthode y analogue dérivant de la substitution de la longitude estimée à la latitude estimée.

Enfin, en ce qui concerne le point de vue du degré d'approximation adopté pour l'effectuation même des opérations, tout ce qui a été dit au nᵒˢ 33 et 36 est entièrement applicable à la détermination du point complet.

N° 59. Ensemble des meilleures conditions propres à la détermination du point observé. — En résumant les nᵒˢ 54 à 58, on est amené aux conclusions suivantes, abstraction faite, bien entendu, des précautions connues à prendre dans l'observation des heures et plus particulièrement des hauteurs, pour éviter les erreurs de comparaison, de réfraction, etc.

Pour TOUTES les méthodes, les deux astres observés sont soumis à deux *conditions communes*, à savoir : leurs hauteurs ne doivent pas trop approcher de 90° et, d'autre part, leur écart azimutal doit être aussi près que possible de 90°.

La méthode *Marcq Saint-Hilaire* (n° 42) n'exige que ces deux conditions communes.

La méthode *Lalande-Pagel* (n° 43) demande en outre : 1° qu'aucune des deux observations ne soit faite aux environs du méridien; 2° qu'on ne se trouve pas par des latitudes trop élevées; 3° que l'astre ou les astres observés ne possèdent pas une trop forte déclinaison.

La méthode *par la longitude estimée* (n° 46) exige, outre les deux *conditions communes* : 1° qu'aucune des deux observations ne soit faite aux environs du premier vertical; 2° qu'on ne se trouve pas par des latitudes trop élevées.

Les conditions précédentes sont, au moins pour la plupart, connues depuis longtemps. Mais leur raison d'être n'avait pas été établie avec toute la généralité qui leur appartient.

Les autres méthodes (n° 47 et nᵒˢ 49 à 51) ont à remplir, outre les deux *conditions communes*, des conditions particulières analogues aux précédentes. Nous n'insisterons pas sur ces conditions, eu égard au non-emploi des méthodes dont il s'agit.

— Il est à peine besoin d'ajouter que les prescriptions précédentes ne s'appliquent pas à la recherche du point observé provenant d'une latitude et d'une longitude déterminées chacune isolément. En pareil cas, les circonstances favorables sont propres à chacun des calculs qui a fourni un des deux éléments en question. Mais comme alors

l'observation de longitude doit avoir été faite le plus près possible du premier vertical, et celle de la latitude aux environs du méridien, on retombe implicitement comme condition fondamentale sur l'obligation de deux hauteurs à angle droit.

1re PARTIE, § VIII. — CAS DE DEUX OBSERVATIONS : EXAMEN DES MÉTHODES DONNANT LA LATITUDE OU LA LONGITUDE, OU LES DEUX A LA FOIS, A L'AIDE DE DEUX HAUTEURS NE REMPLISSANT PAS LES CONDITIONS HABITUELLES.

✻ **N° 60. Appréciation du calcul de la latitude à l'aide de deux hauteurs d'un même astre, très-rapprochées.**—Nous avons prévenu au n° 56 que la règle de M. Crévost était un *criterium* précieux qu'on pouvait utiliser avantageusement. Elle permet, en effet, d'apprécier la validité des méthodes proposées pour avoir la position du navire, par deux hauteurs d'un même astre prises *à court intervalle.*

Les méthodes dont il s'agit comprennent en particulier un mode de détermination de la *latitude* préconisé par les anciens hydrographes. Ce mode rentre au fond dans les relations suivantes proposées par M. Caillet, et qui sont une abréviation des formules générales de son père rappelées au n° 38 :

$$\sin y = \frac{(H'-H)\cos\frac{1}{2}(H'+H)}{I\times\sin D}\,;\quad \cos z = \frac{\sin\frac{1}{2}(H'+H)}{\cos y}\,;\quad \sin L = \cos y \sin(D\pm z);$$

I étant ici l'intervalle des observations évalué en temps de l'astre, puis converti en degrés, et dans tous les cas supposé assez petit pour que son sinus puisse être remplacé par l'arc correspondant.

De son côté, le double signe de la dernière formule correspond aux deux intersections des cercles de hauteur. Eu égard au grand écartement actuel de ces deux intersections, la bonne solution est toujours celle qui se trouve le plus près du point estimé.

Le mode dont il s'agit semble surtout s'être recommandé par la simplicité des relations auxquelles il conduit, pour fournir une latitude à un instant presque quelconque. Mais aucun des auteurs qui le citent ne s'est préoccupé d'estimer logiquement son degré d'exactitude. — La règle de M. Crévost indique tout de suite que ce mode fournira une *latitude acceptable* si les deux observations ont été faites de part et d'autre du méridien. Dans le cas contraire, il faudra avoir soin que la hauteur la plus rapprochée du méridien ait son

azimut ou le supplément de celui-ci, plus petit que l'intervalle azimutal des deux observations.

*** N° 61. Appréciation de la méthode Littrow donnant la longitude à l'aide de deux hauteurs circumméridiennes.** — La méthode de M. Littrow, pour la détermination de la longitude *à l'aide de la latitude méridienne* OBSERVÉE, *et de deux hauteurs d'un même astre prises de part et d'autre du méridien, ou au moins aux environs de celui-ci à un faible intervalle de temps l'une de l'autre*, n'est également susceptible d'être appréciée à sa juste valeur que par la règle de M. Crévost (n° 56).

Cette méthode, qui a paru vers 1864, a été fort prisée à son début. Elle rentre exactement dans la méthode de Douwes, formule (24) du n° 38. En somme, à l'aide de cette formule, où on introduit une latitude *exacte*, on déduit la moyenne P_m des angles au pôle relatifs aux deux observations, et par suite l'heure du lieu correspondant à la moyenne des deux heures du chronomètre, ce qui permet d'avoir la longitude.

Là encore, on s'était laissé séduire par la simplicité de la formule, sans se rendre un compte précis des circonstances favorables à son application. En différentiant directement cette relation par rapport à P_m, H et H', pour apprécier d'une manière immédiate l'influence des erreurs d'observation, on démontre bien que dans les conditions voulues par l'auteur, la formule est à peu près acceptable. Mais on n'a pas assez remarqué que cette conclusion suppose expressément que les erreurs commises sur les deux hauteurs sont sensiblement égales et de même signe.

Aussi les résultats obtenus avec la méthode Littrow ont-ils été en général très-mauvais. On a cherché à expliquer un pareil insuccès en remarquant notamment que la formule proposée négligeait les changements en latitude et en déclinaison dans l'intervalle des observations, et que dès lors on devrait préalablement ramener au même zénith les deux hauteurs ainsi que la latitude méridienne. — La véritable cause de l'insuffisance de la méthode qui nous occupe ne gît dans ce détail que secondairement. Elle ressort tout naturellement de la règle de M. Crévost. Car, d'après cette règle, pour avoir une *longitude acceptable*, il faut ici que le plus grand complément pris en valeur absolue des deux azimuts, $\pm (90° - Z')$, par exemple, soit plus petit que $\pm (Z' - Z)$. Or, en général, cette condition n'est pas remplie avec des observations faites aux environs du méridien ; et dès lors

la longitude fournie par la méthode de Littrow se trouve notablement affectée par les moindres erreurs sur les observations.

N° 62. Appréciation de l'emploi des circumméridiennes pour obtenir le point complet à midi. — En examinant comment on peut obtenir la latitude par les circumméridiennes, quand on ne connaît pas l'état du chronomètre sur l'heure du lieu aux environs de midi, on est conduit à voir que deux hauteurs circumméridiennes se suffisent à elles-mêmes, pour trouver la latitude indépendamment de toute donnée antérieure, et même pour déterminer du même coup la longitude. Il n'y a pour cela qu'à avoir recours à la formule générale (15 *bis*) du n° 20, en bien se rappelant d'ailleurs la signification expresse de ses différents termes.

On a ainsi, pour deux stations dont la différence en latitude déduite de l'estime vaut l :

$$L = L_0' - \alpha p^2;$$
$$L + l = L'_0 - \alpha' p'^2.$$

Comme α diffère toujours extrêmement peu de α', on pourra supposer ces deux quantités égales chacune à leur moyenne $\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')$. Cette supposition sera, du reste, d'autant plus permise, que les deux hauteurs seront plus près d'être correspondantes. Dès lors nous tirerons des deux équations précédentes :

$$p'^2 - p^2 = \frac{L_0' - L_0 - l}{\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')}.$$

Désignons maintenant par C et C' les heures du chronomètre au moment de chaque hauteur. En considérant le temps du chronomètre comme se confondant avec celui de l'astre pendant le petit intervalle des observations, et de plus en tenant compte du changement en longitude g avec le signe inhérent à son sens pendant cet intervalle, il vient :

$$C' - C = p' - p + g;$$

soit :

$$p' - p = C' - C - g.$$

Dès lors, on obtient à l'aide de la dernière relation ci-dessus :

$$p' + p = \frac{L_0' - L_0 - l}{\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')} \times \frac{1}{C' - C - g}.$$

On se trouve ainsi en présence de deux équations en p et p'. On

est donc à même de trouver chacune de ces inconnues, et, par suite, d'achever comme à l'ordinaire le calcul des circumméridiennes.

Mais, en outre, la valeur de p ou de p' permettra de connaître l'heure du lieu au moment même de l'une des observations; on pourra donc, du même coup, en comparant cette heure avec celle de Paris déduite de C ou de C', déterminer *la longitude.*—Il importe de noter qu'en raison des explications du n° 20, cette longitude correspondra au moment même où on a lu à bord l'heure chronométrique considérée, et non à l'instant du passage simultané de l'astre et du navire au même méridien.

La détermination précédente de la longitude rentre, au fond, dans la méthode de Littrow. Mais, de même que cette méthode, elle ne peut donner de longitude acceptable, eu égard aux erreurs d'observation, qu'en tant que les deux hauteurs sont prises de part et d'autre du méridien, et, d'ailleurs, dans les conditions azimutales déterminées par la règle de M. Crévost.—En ce qui concerne la latitude, la valeur obtenue est suffisamment exacte dès que les hauteurs sont correspondantes ou à peu près, ainsi qu'il a été expliqué au n° 60.

— On pourrait, dans ce qui précède, substituer à l'équation (15 *bis*) précitée du n° 20 l'équation analogue $L=L_0-\alpha_1 p_1^2$ du n° 21. D'après la manière même dont a été établie cette dernière formule, il n'y aurait pas cette fois à faire entrer en ligne de compte les changements en latitude et en longitude l et g. De plus, on n'aurait à considérer qu'une même valeur pour α_1. Ce cas particulier éviterait de prendre une moyenne, ce qui semblerait plus rigoureux. Mais, d'après les considérations du n° 22, cet avantage n'est qu'apparent; et même dans le cas où on a une valeur méridienne *directe* de la latitude, ainsi qu'on le suppose dans la méthode Littrow, ce qui permet de calculer α_1 rigoureusement, les choses reviennent en fait au même sous le rapport de l'approximation, à cause des termes négligés dans les deux sortes de formules considérées.—Toutefois avec α_1 les équations à employer se présentent un peu plus simplement; car elles deviennent :

$$p'_1-p_1=C'-C; \quad p'_1-p_1=\frac{L'_0-L_0}{\alpha_1}\times\frac{1}{C'-C}.$$

Il importe d'ajouter que la longitude obtenue correspond cette fois à l'instant du passage simultané de l'astre et du navire au même méridien.

— M. Pagel a beaucoup préconisé, dans une brochure parue en 1869, l'usage des circumméridiennes pour avoir la longitude. La méthode qu'il propose rentre au fond dans celles que nous venons de citer, comme se déduisant de la formule générale des circumméridiennes. Selon lui, *il y aurait, avec une pareille méthode, compensation parfaite sur l'heure, entre les erreurs provenant de la hauteur et celle provenant de la latitude.* Dès lors on obtiendrait ainsi des résultats inespérés.

Mais en étudiant la manière dont l'auteur démontre ladite compensation, on s'aperçoit qu'il invoque la proportionnalité des erreurs en longitude aux erreurs en latitude d'une part, et aux erreurs en hauteur, de l'autre. Or nous avons vu (n°s 4 et 44) que ces proportionnalités, sur la première desquelles est justement basé le procédé Lalande-Pagel pour la recherche du point observé, cessent d'être exactes aux environs du méridien. Il s'ensuit que les résultats soi-disant inespérés de M. Pagel sont demeurés lettre morte ; et que les navigateurs qui se sont fiés à ses promesses, n'ont pas tardé à abandonner la méthode, faute d'avoir connu les conditions susmentionnées, où elle est au besoin acceptable.

1re PARTIE. — § IX. Cas de plus de deux observations : point le plus probable.

N° 62. Meilleur parti à tirer de plus de deux observations. Du point le plus probable du navire correspondant à n droites de hauteur. Propriété importante de ce point. Cas où les observations n'ont pas même poids. — On a ici autant de droites de hauteur que d'observations. Mais généralement le manque d'identité complet de ces droites avec les véritables lieux géométriques du navire, et surtout les erreurs de hauteur et celles de l'estime dans l'intervalle des stations, ont pour résultat que les diverses droites, ramenées d'ailleurs à une même station (n° 39), ne se croisent pas en un point unique.

Si on trace les bandes de certitude (n° 37) propres auxdites droites, la partie commune de ces polygones représentera une région relativement très-limitée, où se trouvera le navire. Dans les régions provenant des bandes combinées deux à deux, la position *la plus probable* (n° 122) du navire correspond à l'intersection deux à deux des droites de hauteur. On est naturellement conduit à chercher la position la plus probable de ces positions les plus probables.

— Pour résoudre cette question, il suffit de remarquer qu'on se trouve en présence de n droites de hauteur qui, au lieu de se couper en un seul point, comme elles le devraient s'il n'y avait pas eu d'erreurs commises sur les observations ayant servi à les déterminer, se rencontrent, par suite de ces erreurs, en un certain nombre de points distincts, qui peut s'élever à $\frac{n(n-1)}{2}$. Il faut alors chercher le point ***le plus probable***, c'est-à-dire un point (n° 122) qui jouisse de la propriété suivante : ses deux coordonnées x' et y', introduites dans l'équation de chacune des droites, devront satisfaire à ces équations, non pas rigoureusement, ce qui est impossible d'après ce que nous venons de dire, mais approximativement, avec des erreurs ε, ε',..., telles, que l'***erreur moyenne***, dite aussi l'***erreur à craindre*** (n° 125), et par suite ***l'erreur probable***, qui lui est proportionnelle (n° 126), se trouve ***un minimum***. — D'après la théorie des probabilités, on résout la question en appliquant la méthode des moindres carrés (n° 133). Mais cette application exige expressément, par son essence même, que toutes les observations soient également ***précises***, et par suite aient ***même poids*** (n° 129). Nous supposerons d'abord qu'il en est ainsi. — Dès lors, pour procéder à ladite application, nous remarquerons que l'équation de toute droite peut s'écrire sous la forme :

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - q = 0,$$

α étant l'angle de la droite avec l'axe des x,
q la distance de la droite à l'origine des coordonnées, laquelle origine demeure du reste arbitraire.

La question consiste à trouver deux coordonnées, l'une en x', l'autre en y', qui rendent minimum la quantité :

$$\Sigma(x'\cos\alpha + y'\sin\alpha - q)^2 = \Sigma\varepsilon^2.$$

Nous verrons aux n°s 65 et 66 comment on peut achever la question soit ***graphiquement***, soit ***analytiquement***. Ce dernier mode n'offre aucune difficulté. Mais le procédé ***graphique*** exige qu'on établisse préalablement une propriété importante, dont nous allons nous occuper.

— On sait que le carré h^2 de la perpendiculaire abaissée d'un point (x', y') sur une droite de la forme ci-dessus, a pour expression :

$$h^2 = \frac{(x'\cos\alpha + y'\sin\alpha - q)^2}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = (x'\cos\alpha + y'\sin\alpha - q)^2.$$

Donc chacun des carrés des perpendiculaires en question vaut ici ε^2. Conséquemment on a :

$$\Sigma h^2 \text{ minimum } (^*).$$

En d'autres termes, le point le plus probable cherché jouit de la propriété que la somme des carrés des normales abaissées de ce point sur les droites de hauteur considérées, est un minimum.

D'autre part, dans tout système matériel rigide, la somme des carrés des distances r, r', r'', de n points différents supposés d'égale masse à un point donné (a, b, c) est minimum, quand ce point se confond avec le centre de gravité. On a, en effet :

$$\Sigma r^2 = \Sigma\left[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\right],$$

x, y, z, étant les coordonnées d'un quelconque des points matériels.

Or, le minimum de cette somme correspond évidemment aux équations :

$$\Sigma(x-a) = \Sigma x - na = 0,$$
$$\Sigma(y-b) = \Sigma y - nb = 0,$$
$$\Sigma(z-c) = \Sigma z - nc = 0;$$

et par conséquent a, b et c ne sont autres que les coordonnées du centre de gravité.

De ce fait, résulte la PROPRIÉTÉ IMPORTANTE que nous avions en vue, à savoir : *le point le plus probable cherché se confond avec le centre de gravité du pied des normales abaissées de ce point sur les différentes droites considérées.*

Il est intéressant d'ajouter que les résultats ci-dessus sont évidemment indépendants des écartements respectifs des points de rencontre des droites considérées, écartements susceptibles de prendre des valeurs aussi grandes qu'on voudra.

— Dans ce qui précède, nous avons supposé expressément que les diverses observations avaient *même poids*. On doit donc, en pratique, s'arranger de façon qu'il en soit ainsi, en ne combinant entre

(*) Il est intéressant de remarquer que si l'on avait employé, au lieu de la forme sus-adoptée, la forme habituelle de l'équation de la ligne droite : $Ax + By + C = 0$, on aurait trouvé pour condition :

$$\Sigma\varepsilon^2, \quad \text{et par suite} \quad \Sigma h^2 (A^2 + B^2) \text{ minimum.}$$

Or $A = \cos\alpha \times \frac{C}{q}$; et $B = \sin\alpha \times \frac{C}{q}$. On est donc amené à conclure que $\Sigma\left(h^2 \times \frac{C^2}{q^2}\right)$ est *minimum* en même temps que Σh^2, ce qui constitue une concomitance intéressante.



eux que les résultats correspondant à des observations sur lesquelles on peut *également* compter comme degré d'exactitude. Avec des hauteurs de jour, il y a d'ordinaire moyen d'agir de la sorte, pourvu que la mer ne soit pas grosse, et qu'entre les observations prises à diverses stations, il n'y ait que de faibles erreurs sur l'estime. Mais avec des hauteurs de nuit, la question devient plus difficile à résoudre; car alors, même par belle mer, les conditions de chaque observation sont souvent très-différentes, à cause des changements incessants de visibilité de l'horizon.

— En cas de hauteurs d'inégale précision, il faudrait, avant d'appliquer le théorème des moindres carrés, multiplier chacune des diverses équations de la forme $(x \cos\alpha + y \sin\alpha - q = 0)$, par la racine carrée du poids qui lui conviendrait (n° 130). Mais en pareille conjoncture, on n'arriverait plus à *la propriété intéressante* sus-mentionnée; et, d'autre part, les formules du n° 66 cesseraient d'offrir le degré de simplicité et d'élégance qui les caractérisent.

✳ **N° 64. Condition pour que le point précédent soit la position la plus probable du navire. Objection capitale au sujet de cette position.** — Il y a une *restriction* à apporter à tout ce qui a été établi dans le numéro précédent, eu égard à ce qu'il s'agit de *droites* qui ne correspondent pas à un lieu géométrique *rigoureux* du bâtiment. C'est que le point le plus probable convenant à ces droites, n'est susceptible d'être considéré comme la position la plus probable du navire qu'autant que les droites de hauteur employées peuvent être regardées comme contenant l'observateur à un très-petit près du premier ordre (n° 7). Sans cette condition, le point le plus probable déterminé ainsi qu'il a été expliqué ci-dessus, perd manifestement toute signification. — En revanche, quand ladite condition est remplie, le point obtenu convient quel que soit le *mode adopté* pour mener les droites de hauteur, et quand bien même ce mode varierait d'une droite à l'autre.

Le mode qui donne, sous le rapport qui nous occupe, le plus de garantie, est le procédé *Marcq*, à cause de la propriété qu'il a de fournir, en principe, le point déterminatif le plus avantageux (n° 5) de chaque droite de hauteur. — Toutefois, il y a, d'après le n° 8, un cas exceptionnel qui atteint aussi bien ledit mode que les autres procédés, c'est lorsqu'on a affaire à des distances zénithales très-faibles, ou pour parler avec plus de précision, à des distances zénithales qui rentrent dans les très-petits du premier ordre.

— Il nous reste, pour terminer ce qui concerne l'*essence* même du point le plus probable, à examiner une *objection capitale*, qui a

été soulevée à son sujet, à savoir : que la recherche, en navigation, du point *le plus probable* est purement *spéculative*. On base cette objection sur les remarques suivantes : 1° Les hauteurs sont entachées d'erreurs *systématiques* (n° 118) et d'erreurs *accidentelles* (n° 119); or l'application du théorème des moindres carrés suppose expressément qu'on a corrigé les éléments du problème des premières de ces erreurs. — 2° Ladite application exige qu'on opère avec un grand nombre de données (n° 133), et de plus qu'on fasse un *choix sévère* des observations à employer, comme cela résulte d'une importante discussion soulevée par M. Le Verrier à l'Académie des sciences (voir les *Comptes rendus* du 1er février 1875, page 291). — 3° De la propriété importante établie au numéro précédent, on conclut, ainsi que l'a fait remarquer le premier M. Bertot, que la somme algébrique des projections sur un même axe quelconque des distances entre le *point le plus probable* et les diverses droites de hauteur, est nulle. Or ces distances ne seraient autres que les erreurs commises sur les observations, si le point en question se confondait avec la position exacte du navire. Dès lors, le degré de confiance à accorder au point défini *le plus probable* d'après la théorie des erreurs d'observation, dépend de la réalisation plus ou moins complète de la condition tout à fait fortuite que voici, qui est, au fond, la traduction géométrique de la condition d'égale précision des observations mentionnée au n° 63 : *Les projections sur un même axe quelconque des erreurs de hauteur considérées dans leurs directions azimutales respectives, doivent se compenser.*

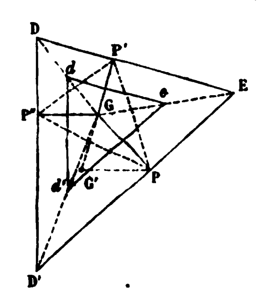
Les erreurs systématiques afférentes au problème dont il s'agit, sont d'ordinaire très-faibles, et du reste assez facilement déterminables (nos 181 à 187) pour des officiers intelligents et soigneux. — Quand les données de la question demeurent affectées de pareilles erreurs, l'application du théorème des moindres carrés conduit à *une sorte de résultat le plus probable*. Seulement, ce résultat se trouve entaché de l'effet dû à l'ensemble des erreurs de l'espèce. Nous ajouterons que ces erreurs se présentent ici sous leurs plus mauvaises conditions. Car, d'après les nos 181 à 187 précités, elles varient avec la hauteur; et comme celle-ci change en général dans ledit problème d'une observation à une autre, l'influence qu'exercent sur le résultat les erreurs systématiques, *si on ne les a pas éliminées*, devient complexe et absolument inappréciable.

Les considérations que nous venons d'énoncer, jointes surtout aux parties 2e et 3e de l'objection qui nous occupe, ainsi qu'aux réserves du commencement de ce numéro et de la fin du numéro précédent,

forcent à reconnaître que la détermination du point le plus probable par la méthode en discussion, qui est due à M. Villarceau, ne laisse pas que d'être fort aléatoire, et ne saurait être recommandée tout au plus qu'aux observateurs habiles et instruits, en possession d'ailleurs d'un nombre suffisant de données. Conséquemment, les navigateurs qui ne se sentiront pas en mesure de prendre toutes les précautions voulues, devront se contenter du procédé graphico-pratique indiqué à la fin du n° 65.

N° 65. Détermination graphique du point le plus probable relatif à plus de deux observations. Procédé le plus pratiquement recommandable. — Le problème, ramené aux termes de la *propriété* établie au n° 63, se résout facilement, quand il n'y a que trois droites de hauteur, telles que DE, D'E et DD', *fig.* 19. On est, en effet, ramené ici à trouver dans le triangle DED' un second triangle PP'P'' ayant ses médianes respectivement perpendiculaires aux côtés du premier triangle, et dont le centre de gravité G représente alors le point le plus probable.

Fig. 19. — Détermination graphique du point le plus probable relatif à trois observations.



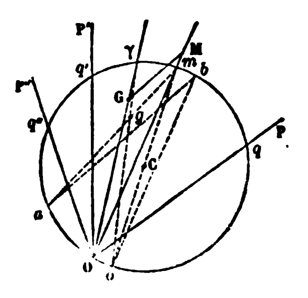
Pour traiter cette question de géométrie, supposons-la résolue; et prolongeons la ligne P'G d'une quantité GG' égale à elle-même. Joignons les points P et G'. La droite PG' sera parallèle et égale à P''G; et les triangles GG'P et DD'E seront semblables comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires. — Dès lors, les longueurs GG' ou son égale GP', GP, et G'P ou son égale GP'', sont respectivement proportionnelles aux trois côtés de DD'E. Par conséquent, après avoir mené des parallèles *de*, *d'e* et *dd'* à ces trois côtés à des distances qui leur soient respectivement proportionnelles, on joindra deux à deux les sommets homologues D, *d*; E, *e*; et D', *d'*. Les trois lignes ainsi tracées iront se couper au point cherché G.

— Quand il y a plus de trois droites de hauteur, la solution géométrique de la question qui nous occupe devient beaucoup plus compliquée. Elle a été donnée très-élégamment pour un nombre quelconque de points par M. Bertot, dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences* du 20 mars 1876. Nous nous bornerons à citer la règle pratique suivante, par laquelle il conclut :

Les droites de hauteur étant données, on abaisse d'un point quelconque O, les perpendiculaires OP, OP', OP'', *fig.* 19 *bis*, sur ces droites (qu'on n'a pas tracées pour simplifier la figure). On détermine

ensuite la position du centre de gravité G des pieds P, P′, P″.... Puis on tire la droite OG. — D'un point quelconque C avec CO pour rayon, on trace un cercle qui coupe les perpendiculaires OP, OP′, OP″..., en des points q, q', q''..., et la droite OG en γ. On détermine la position du centre de gravité g des points q, q', q''.... On trace la ligne γg, qui, prolongée, coupe la circonférence en o. On tire le diamètre oCm; et l'on achève le triangle ogm, en joignant m et g. — Enfin, sur OG, homologue de og, on construit le triangle OGM semblable à ogm. Pour construire ce triangle, on opère comme voici : 1° On fait en O un angle GOM $= gom$; ce pour quoi il suffit évidemment de joindre O et m. 2° On mène par G une droite faisant avec OM un angle GMO $= gmo$; ce pour quoi il suffit de prolonger la droite mg jusqu'en a, à la rencontre de la circonférence du cercle tracé; de tirer ob parallèle à OM; de tracer la droite ab, qui fait évidemment avec ob, et par suite avec sa parallèle OM, un angle $abo = gmo$, et enfin de mener, par le centre de gravité G, la ligne GM parallèle à ab, jusqu'à la rencontre de la droite Om en M. — Le point M ainsi déterminé représentera la position la plus probable du navire, sous la réserve, bien entendu, que les conditions du n° 64 soient satisfaites.

Fig. 19 *bis*. — Détermination graphique du point le plus probable relatif à un nombre quelconque d'observations.



La recherche des centres de gravité G et g des deux groupes de points P, P′, P″ et q, q', q'', ne laisse pas que d'être un peu longue, quand il y a plus de trois points à considérer, et qu'on emploie la méthode de la composition des forces parallèles. Mais on peut abréger ces deux opérations en traçant deux axes rectangulaires, et en prenant, par rapport à chacun de ces axes, la moyenne arithmétique des coordonnées, évaluées en chiffres, des divers points appartenant à un même groupe.

D'après le n° 64, la solution de M. Bertot convient quel que soit le mode employé pour mener les droites de hauteur; et quand bien même ce mode varierait d'une droite à l'autre.

— En pratique, qu'il s'agisse de trois droites de hauteur ou plus, les officiers se sont bornés jusqu'ici à déterminer la position la *plus probable* du navire, en prenant *de sentiment* un point plus ou moins central du réseau formé par les intersections des diverses droites en question. Ils choisissent ce point en se laissant guider par la connaissance de

telle hauteur plus ou moins bien observée, et en rapprochant alors plus ou moins le point de la droite correspondant à ladite hauteur.

D'après les conclusions du n° 64, ce moyen *grosso modo* donnera, en général, des résultats plus acceptables que le procédé mathématique précédent. — Une fois que, par le point ainsi obtenu, on aura tracé sur la carte la route à suivre, il faudra, pour plus de sécurité, mener deux parallèles à cette route tangentant la *région de certitude* dont il est parlé au commencement du n° 63, et déterminant une zone où on ne devra tolérer aucun danger.

N° 66. Détermination par le calcul du point le plus probable relatif à plus de deux observations. — Malgré ce qu'il y a de *spéculatif* dans cette détermination, nous croyons cependant utile de l'exposer, afin de n'omettre aucun des nouveaux problèmes ayant trait à la navigation. Cela entendu, on pourrait, pour résoudre la question, partir des équations de la forme $\Sigma(x' \cos\alpha + y' \sin\alpha - q)$ du n° 63. Mais il est plus simple de considérer l'un quelconque des cinq lieux géométriques du navire représentés par les équations en ΔL_e et ΔG_e (9) à (13) du n° 15, et d'appliquer l'équation choisie à *n* observations ramenées toutes au même zénith. Nous aurons de la sorte *n* équations, représentant *n* droites de hauteur par rapport à des axes rectangulaires passant par le point estimé et dirigés suivant le méridien et le parallèle estimés du navire.

D'après le n° 63, on traitera les *n* équations par la théorie des moindres carrés, pour en tirer les valeurs de ΔL_e et de ΔG_e qui, faute de satisfaire rigoureusement aux équations, sont aptes à rendre minimum l'erreur *moyenne* et par suite aussi l'erreur *probable*.

Nous nous bornerons à appliquer les indications précédentes à des équations de l'espèce (11), qui conviennent à des droites de hauteur ayant pour point déterminatif le point *rapproché*, c'est-à-dire à des droites de hauteur menées suivant le procédé Marcq (n° 4). Mais nous n'oublierons pas qu'on pourrait, en suivant la même marche, trouver des relations propres aux autres sortes de droites de hauteur. Bien plus, ainsi que pour la méthode graphique du n° 65, les droites de hauteur considérées pourraient être, également ici, d'espèces différentes; mais il est évident que cela entraînerait à des relations complexes, et qui n'offriraient rien d'homogène. — Dans tous les cas, les droites de hauteur considérées doivent toutes relever d'un même point estimé, puisque c'est ce point qui forme l'origine des coordonnées, à partir de laquelle on compte les ΔL_e et les ΔG_e.

Pour en revenir au cas spécial que nous nous proposons de traiter,

nous nous reporterons à l'équation (11) du n° 15, en nous rappelant d'ailleurs que H_t y représente la hauteur *estimée* H_e calculée comme il est indiqué au n° 4. Nous aurons dès lors à appliquer la théorie des moindres carrés à une série de *n* équations de la forme :

$$\Delta L_e + \Delta G_e \cos L_e \operatorname{tg} Z_e - (H - H_e) \times \frac{1}{\cos Z_e} = 0,$$

$$\Delta L_e + \Delta G_e \cos L_e \operatorname{tg} Z'_e - (H' - H'_e) \times \frac{1}{\cos Z'_e} = 0,$$

. . . .

Posons :

$$u = \frac{1}{n} \Sigma \sin 2Z_e; \quad v = \frac{1}{n} \Sigma \cos 2Z_e; \quad \Big| \quad X = \frac{1}{n} \Sigma (H - H_e) \sin Z_e; \quad Y = \frac{1}{n} \Sigma (H - H_e) \cos Z_e.$$

L'application de ladite théorie mène aisément aux formules suivantes, proposées par M. Villarceau dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences* du 6 mars 1876 :

$$\left(\frac{\Delta L_e}{\cos L_e}\right) \times \left(\frac{1 - u^2 - v^2}{2}\right) = (1 - u)\, Y - vX,$$

$$\Delta G_e \times \left(\frac{1 - u^2 - v^2}{2}\right) = (1 + u)\, X - vY.$$

On trouvera une application de ces formules dans le TYPE DE CALCUL N° 7, donné à la fin de l'ouvrage.

1re PARTIE. — § X. DU RÔLE ACTUEL DES DISTANCES LUNAIRES (*).

N° 67. Nécessité de conserver l'usage des distances lunaires. — La détermination des longitudes en mer par le moyen des *chronomètres*, est incontestablement la plus courte et la plus facile des méthodes susceptibles d'être employées. Mais il est certain aussi que le degré de précision de cette détermination, dépend uniquement de la perfection plus ou moins complète des montres que l'on a entre les mains. — Comme nous le faisons voir dans la seconde partie de notre travail, les chronomètres actuels sont assez perfectionnés pour qu'il y ait possibilité de tenir compte par des formules, ou, plus pratiquement, par des procédés graphiques, des variations *normales* des marches (n° 100). Mais les variations anormales, soit les perturbations de celles-ci (nos 101 à 104), ne sont pas de nature, en général, à être fixées avec une certitude absolue.

D'abord si l'on n'a qu'un ou même deux chronomètres, de pareils

(*) Ce paragraphe a été rédigé *en partie* d'après des notes que nous ont fournies M. le lieutenant de vaisseau Beuf, directeur de l'Observatoire de Toulon, et M. Perrin, qui ont fait une étude spéciale et très-approfondie des distances lunaires. Mais la forme même de la rédaction, ainsi que les diverses conclusions demeurent entièrement notre œuvre.

effets laissent le navigateur complétement désarmé; et le recours aux distances lunaires devient une *nécessité absolue.*

Quand on a trois chronomètres, ce qui est le cas général pour les longues navigations, si l'un des trois accuse une brusque variation dans ses comparaisons journalières avec les autres, on le laisse d'ordinaire de côté; et on suit exclusivement les deux autres. Cependant il n'est pas mathématiquement certain que ce ne soit pas celui-là qui demeure le bon; car les deux derniers ont pu varier tous deux dans le même sens. La probabilité, il est vrai, est que les choses se passent telles qu'on les suppose. Mais ce n'est jamais qu'une probabilité; et si on a été trompé par les apparences, les conséquences que cette erreur entraîne peuvent être de la dernière gravité. Parfois même, il survient un désaccord complet, plus ou moins transitoire, entre toutes les montres. — Nous montrerons, aux nᵒˢ 158 à 162, qu'avec trois chronomètres, on est à même, dans une certaine mesure, de découvrir le ou les instruments qui ont été perturbés, et de reconnaître en outre la valeur de la perturbation. Mais la solution de ce problème comporte toujours avec elle un certain *aléa*, et demande d'ailleurs beaucoup de tact et d'instinct. Il y a donc encore ici *nécessité* ou au moins extrême utilité pour un navigateur consciencieux, de contrôler le point déduit des montres par des distances lunaires.

En résumé, à tous égards, l'emploi des distances est une méthode à conserver, surtout en apportant aux observations et aux opérations les soins méticuleux indiqués aux nᵒˢ 76 et 77.

N° 68. Degré d'exactitude que comporte la détermination de la longitude par les distances lunaires. Valeurs extrêmes des distances dans la Connaissance des temps. Considérations sur les occultations d'étoiles. — Avant de parler des méthodes qui permettent d'opérer la réduction des distances lunaires pour en déduire la longitude, il importe de faire ressortir le *degré d'exactitude* que ce genre d'observation comporte.

Il y a ici à envisager deux causes d'erreur; l'une tient à l'observation elle-même, et l'autre à la théorie encore incomplète de la Lune, et conséquemment à l'imperfection des tables basées sur cette théorie, et dont les meilleures sont présentement celles de Hansen. De cette dernière circonstance, il suit que les éléments lunaires, tels qu'on les trouve tout calculés dans la *Connaissance des temps*, sont affectés de petites erreurs; et il faut même prévenir qu'en comparant lesdits éléments calculés avec leurs valeurs déduites d'observations *directes*, on a remarqué que les erreurs dont il s'agit,

ont des périodes d'*accentuation*, qui heureusement ne durent pas, mais dont on ne saurait prévoir ni le retour ni le degré d'anomalie.

Quoi qu'il en soit, on peut en principe considérer l'erreur d'observation sur la distance, ainsi que l'erreur des tables, comme se reportant en totalité sur la distance réduite. Parfois ces deux sortes d'erreur sont de sens contraire et tendent à se détruire l'une par l'autre, tandis que d'autres fois elles s'ajoutent; mais comme rien ne peut faire supposer que l'observateur est à cet égard favorisé par les circonstances, nous allons mettre les choses au pis, en supposant que l'erreur d'observation s'ajoute à l'erreur des tables.

Or les observations *directes* sus-mentionnées de la Lune, comparées avec les positions consignées à l'avance dans les recueils astronomiques, ont fait reconnaître que l'erreur en ascension droite ne dépasse guère $0^s,7$, soit $10'',5$ en angle; et on peut affirmer que très-rarement elle atteint ce chiffre. D'autre part, un observateur exercé peut répondre de chacune de ses observations à $20''$ près, en comprenant dans ce nombre l'erreur de lecture et de pointé. Enfin, il y aurait encore à tenir compte des erreurs dues, dans la réduction de la distance observée à la distance vraie, tant à l'effectuation plus ou moins approchée des calculs qu'au manque de rigueur des formules abréviatives susceptibles d'être employées. Mais d'après les indications du nº 76, on est à même de s'affranchir au besoin de ces erreurs; et il n'y a pas lieu de les considérer. En résumé, nous pouvons admettre un *total* de $30''$. — Or on sait que dans les éphémérides la différence pour 3^h entre deux distances consécutives, est toujours plus grande que $1°,28$ et inférieure à $1°,92$. On tire facilement de là que l'erreur en degrés sur la longitude sera comprise entre 36 fois et 24 fois l'erreur en degrés sur la distance lunaire. En d'autres termes, l'erreur sur la longitude est, en moyenne, 30 fois celle commise sur la distance. Dès lors, dans la supposition qui nous occupe, nous arrivons en définitive à $15'$ d'erreur totale sur cet élément. Nous ne faisons aucune difficulté de convenir qu'une erreur de $15'$ est considérable. Toutefois c'est là un maximum; et c'est déjà beaucoup de prévoir la limite extrême de l'erreur que l'on est susceptible de commettre (*).

(*) A propos de la publication des tables de Mendoza pour la prompte réduction des distances lunaires, Biot, pour montrer la valeur de l'emploi des distances lunaires à la mer, écrivait dans le *Journal des savants* (août et septembre 1844) : « Un navire est jeté sur l'Océan à mille lieues de toutes côtes, ne voyant que l'eau et le ciel. L'homme qui le monte va déterminer sur cette immensité uniforme, le point imperceptible où il se trouve; et la *précision* du résultat sera telle, que du haut des mâts de son navire, l'horizon que sa vue embrasse s'étendra plus loin que ne pourrait s'étendre son erreur. »



— Hâtons-nous de dire que les marins qui sont familiarisés avec ce genre d'observations et qui les font avec méthode et discernement, peuvent répondre de la longitude à 8′ ou 10′ environ. En effet, conformément aux indications du n° 77, on peut prendre une suite de 10 à 12 séries de distances; et éliminer à la fin du calcul les séries douteuses, à l'aide du *criterium* de Chauvenet (n° 124). Or s'il reste, somme toute, ainsi 9 bonnes distances, par exemple, l'*erreur probable* (n° 122) de la moyenne des observations se réduira (n° 128) à $\frac{20''}{\sqrt{9}} = 6'',7$. Ce chiffre ajouté à l'erreur maximum 10″,5 sus-mentionnée des tables, donnera 17″,2 d'erreur totale sur la distance, soit $17'',2 \times 30 = 8',6$.

Les considérations précédentes viennent confirmer la conclusion du n° 67, de ne pas abandonner l'observation et le calcul des distances, pour contrôler, au moins de temps à autre, le point par les montres, surtout quand on en a moins de trois.

— La *Connaissance des temps* ne donne pas les distances de la Lune au Soleil au-dessous de 20° ou 25°, parce que le faible croissant du bord éclairé de la Lune rendrait l'observation presque impossible : les distances de 30° ou 35° sont déjà bien difficiles à observer par suite de l'inégalité d'éclat entre les deux astres. On peut d'ailleurs se rendre compte du fait, en remarquant que la plus grande largeur du croissant, mesurée par sa projection sur le diamètre *réel* de la Lune dont le prolongement passe par le centre du Soleil, est le sinus verse d'un angle manifestement égal à la distance angulaire des deux astres. Pour une distance de 20°, cette largeur vaut à peu près $\frac{1}{32}$ du diamètre *réel* de la Lune, soit 1′ d'angle aperçue de la Terre, *quantité presque insensible à la vue*. Cette largeur atteint 2′ pour une distance de 29° environ; 3′ pour une distance de 36°, et enfin 4′, c'est-à-dire le huitième du diamètre, pour une distance de 41°. — Comme la Lune parcourt à peu près 13° par jour dans son orbite, on peut dire que les distances *luni-solaires* ne sont pas observables pendant les deux premiers jours qui précèdent ou qui suivent la nouvelle lune.

De même, la *Connaissance des temps* ne donne pas les distances supérieures à 135° ou 140°. Car le sextant et le cercle ne permettent guère de mesurer des angles plus grands ; en outre l'observation de pareilles distances est très-pénible à la mer, par suite de la difficulté que l'on éprouve à maintenir les deux astres dans le champ de la lunette.

— Avant de terminer ce numéro, il y a lieu de signaler la détermi-

nation de l'heure de Paris, et conséquemment de la longitude, au moyen des *occultations d'étoiles par la Lune.*

Dans l'opinion de quelques marins, cette méthode paraît appelée à un certain avenir. Car elle fournirait manifestement de bons résultats à la mer, si l'on observait le phénomène avec des jumelles légères (en aluminium, par exemple), ayant les qualités, non pas des jumelles *ordinaires*, qui ont beaucoup de clarté et peu de grossissement, mais des lunettes *astronomiques*, et par suite donnant un fort grossissement (15 à 20) sans forte clarté. Avec un pareil instrument, et grâce d'ailleurs à sa légèreté, qui mettrait l'observateur tout à fait à l'aise pour s'en servir, on arriverait à réduire à très-peu de chose les erreurs d'observation, *ce qui est de la dernière importance.*

Malheureusement, le calcul inhérent au procédé est long, non-seulement pour ce qui concerne l'heure exacte de l'occultation sur Paris, mais encore pour la recherche préalable de l'heure approchée du phénomène sur le méridien du bord, heure qu'il est nécessaire de connaître afin de pouvoir se mettre en observation quelques minutes avant la disparition de l'étoile derrière le disque de la Lune. Il est donc à désirer, pour la pratique, que l'on arrive à simplifier les formules et à abréger les opérations auxquelles conduit la méthode des occultations. Toutefois, la longueur du calcul n'est pas un inconvénient capital, parce que les occultations n'étant pas destinées à fournir la longitude d'une manière courante, mais simplement à contrôler l'état absolu du chronomètre étalon, il n'y aurait lieu de les observer que de temps à autre, le plus souvent une seule fois vers la fin d'une longue traversée. On ne saurait donc ne pas se soumettre à un calcul qui présente ce caractère de rareté, et qui d'ailleurs n'a de rebutant que son manque de familiarité.

Mais il existe un empêchement auquel il n'y a guère moyen de remédier, c'est que la plupart des étoiles occultées sont en général de quatrième, cinquième ou sixième grandeur. Or, c'est à peine si l'on compte dans chaque lunaison huit à dix occultations d'étoiles comprises entre la première et la troisième grandeur. Ce genre d'observations ne pourrait donc être que rarement substitué à la mer à la méthode des distances lunaires. De plus, quand il serait possible, le moment de l'observation se trouverait imposé. Ladite méthode, au contraire, soit avec le Soleil, soit avec une étoile, est toujours applicable quand la Lune est sur l'horizon, sauf pendant les deux ou trois jours qui précèdent et suivent la nouvelle Lune.

Il nous reste à aller au-devant d'une objection que bien des officiers

tendront à se poser à propos de la longueur du calcul d'occultation, à savoir : pourquoi on n'applique pas à la recherche de l'heure de Paris correspondant à une occultation, les formules ordinaires des distances lunaires, en y faisant *nulle* la distance observée. — Nous répondrons à cela qu'on s'exposerait ainsi à des erreurs prodigieuses. En effet, nous avons vu plus haut que l'erreur sur la longitude est comprise entre 36 fois et 24 fois l'erreur sur la distance lunaire. Or, ces nombres reposent sur ce que la différence, en 3 heures, entre deux distances lunaires a pour limite 1°,28 et 1°,92 ; et ces derniers chiffres correspondent eux-mêmes à l'hypothèse expresse qu'il s'agit d'astres, y compris le Soleil, situés dans le plan de l'*orbite lunaire*, et justement choisis comme les astres par rapport auxquels la Lune a le mouvement *relatif* le plus rapide. Chacun de ces astres est tel, en définitive, que le plan passant par son centre et par ceux de la Terre et de la Lune se confond avec l'orbite lunaire. Mais les étoiles qui s'occultent peuvent avoir le plan en question, plus ou moins incliné sur ledit orbite; et alors la variation en 3 heures de la distance des centres pourrait tomber considérablement au-dessous de 1° 28'. En pareil cas, l'erreur sur la longitude provenant de l'erreur sur l'*occultation* assimilée à une distance lunaire observée *valant zéro*, pourrait atteindre, au lieu de 36 fois, 100 fois l'erreur d'observation et au delà. —Nous avons à noter que la conclusion précédente suppose que l'erreur sur la distance vraie est la même que l'erreur sur la distance apparente. Or, dans le cas où ces quantités deviennent très-petites, il peut cesser d'en être ainsi (n° 73) ; et il peut arriver que l'une des erreurs devienne trois fois moindre que l'autre, et même plus, ce qui modifie d'autant ladite conclusion.

En tout état de cause, on comprend qu'il faut calculer l'heure du phénomène sans passer par l'intermédiaire de la distance de l'étoile au centre de la Lune. C'est pourquoi, prenant la question à un autre point de vue, on s'attache à déduire des observations la différence entre les ascensions droites des deux astres, ce qui conduit aux calculs *spéciaux* dont nous avons parlé plus haut. — Il est intéressant d'ajouter que la *méthode des occultations* est excellente, quand la trajectoire relative de l'étoile par rapport à la Lune est normale au disque de celle-ci. Cette méthode se trouve, au contraire, très-mauvaise aux environs de l'*appulse*, c'est-à-dire quand ladite trajectoire se rapproche d'être tangente au disque lunaire.

N° 69. Classification des méthodes proposées pour la réduction des distances lunaires. Méthodes directes par

le calcul; exposé des méthodes de Borda, Garnett et Mendoza. — Plus de cent méthodes ont été proposées pour la réduction des distances lunaires, c'est-à-dire pour déduire de la distance observée et des hauteurs des deux astres au même instant, la distance des centres telle qu'elle serait vue du centre de la Terre. On peut ranger ces méthodes en trois classes :

1° *Celles qui permettent de calculer* DIRECTEMENT *la distance vraie;*

2° *Celles qui ont pour objet de faire connaître la différence entre la distance vraie et la distance apparente des centres, et qui sont à proprement parler des* MÉTHODES INDIRECTES ;

3° *Enfin, les procédés* GRAPHIQUES.

— Parmi les nombreuses formules qui ont été proposées pour résoudre le problème dans les conditions de la première classe, les plus répandues et les seules usitées aujourd'hui sont celles de Borda, de Garnett et de Mendoza.

Tout le monde connaît la méthode de Borda, qui, en somme, est redevenue, pour le moment, la plus en usage, après des péripéties diverses. — En employant les notations données dans la légende générale page 1, et reproduites sur la *fig.* 20 du n° 71, les formules afférentes à cette méthode sont :

$$\sin \tfrac{1}{2} \Delta_0 = \cos \tfrac{1}{2}(a' + b') \cos \varphi;$$

φ étant un angle auxiliaire déterminé par la relation :

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{\cos S \cos (S - \Delta_0) \dfrac{\cos a' \cos b'}{\cos a \cos b}}}{\cos \frac{1}{2}(a' + b')}, \text{ avec } S = \frac{a + b + \Delta_0}{2}.$$

Le calcul des relations précédentes exige, pour être suffisamment exact (n° 76), la recherche de dix logarithmes à sept décimales; il est donc très-long. On doit toutefois se rappeler qu'il y a moyen de l'abréger : 1° en *arrondissant* les arcs a, b et Δ_0 de façon à éviter les parties proportionnelles dans la recherche des logarithmes; et en reportant d'ailleurs avec soin sur Δ_0 les secondes enlevées ou ajoutées à Δ_0; sans d'ailleurs se préoccuper d'en faire autant pour a' et b', déduits de a et b arrondis; car, on le sait, là il n'y a besoin de rigueur que pour les différences mêmes $(a' - a) = da$, $(b - b') = db$ (cette abréviation est du reste applicable à toutes les méthodes); 2° en prenant tout calculé, dans les tables IX et X de la *Connaissance des temps*, log. $\dfrac{\cos b'}{\cos b}$, qui diffère toujours très-peu de l'unité pour le Soleil, ainsi que pour les étoiles, et pour les planètes dont la parallaxe est insensible.

⁎ — Guépratte donne dans son « *Recueil de problèmes d'astronomie nautique* » plusieurs méthodes qui ne sont que des modifications de la formule de Borda, et dont on peut résumer l'esprit comme il suit :

Prenons les deux équations fondamentales :

$$\cos \Delta_0 = \sin a \sin b + \cos a \cos b \cos z,$$
$$\cos \Delta_v = \sin a' \sin b' + \cos a' \cos b' \cos z;$$

z étant l'angle des deux verticaux.

Si l'on tire de la première la valeur de $\cos z$ et qu'on la porte dans la seconde, on arrive, par des transformations trigonométriques assez faciles, à une équation générale de la forme :

$$\cos \Delta_v = \mp \cos \sigma' + \frac{\cos a' \cos b'}{\cos a \cos b}\left[\cos \Delta_0 \pm \cos \sigma\right];$$

où on représente par :

σ la somme ou la différence des hauteurs apparentes a et b;
σ' la somme ou la différence des hauteurs vraies a' et b';
Les signes supérieurs conviennent d'ailleurs au cas où l'on prend des sommes pour σ et σ', et les signes inférieurs au cas où l'on prend des différences.

L'équation ci-dessus permet donc de calculer $\cos \Delta_v$ de deux manières différentes, qui peuvent également se subdiviser en plusieurs cas particuliers, comme il est aisé de le voir. Supposons, pour fixer les idées, que l'on prenne pour σ et σ' les sommes des hauteurs, et par suite les signes supérieurs, nous aurons :

$$\cos \Delta_v = -\cos \sigma' + \frac{\cos a' \cos b'}{\cos a \cos b}\left(\cos \Delta_0 + \cos \sigma\right).$$

Cette combinaison peut donner naissance à deux autres, suivant que l'on substituera à $\cos \Delta_v$, $(1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \Delta_v)$, ou $(2 \cos^2 \frac{1}{2} \Delta_v - 1)$. Admettons que l'on suive la première de ces transformations. On remplacera alors $-\cos \sigma'$ par $\left(1 - 2 \cos^2 \frac{\sigma'}{2}\right)$ pour faire disparaître 1 des deux membres de l'équation. Il viendra ainsi :

$$\sin^2 \frac{1}{2} \Delta_v = \cos^2 \frac{1}{2} \sigma' - \frac{\cos a' \cos b'}{\cos a \cos b} \cos \frac{1}{2}\left(\sigma + \Delta_0\right) \cos \frac{1}{2}\left(\sigma - \Delta_0\right).$$

Arrivé à ce point, le procédé se subdivise encore en deux autres, suivant que l'on pose :

$$\left.\begin{array}{r} \sin^2 \Psi \\ \text{ou} \quad \cos^2 \Psi \end{array}\right\} = \frac{\cos a' \cos b'}{\cos a \cos b} \cos \frac{1}{2}\left(\sigma + \Delta_0\right) \cos \frac{1}{2}\left(\sigma - \Delta_0\right).$$

Dans le premier cas, on a :

$$\sin^2 \frac{1}{2} \Delta_v = \cos^2 \frac{1}{2} \sigma' - \sin^2 \Psi = \cos\left(\frac{1}{2} \sigma' + \Psi\right) \cos\left(\frac{1}{2} \sigma' - \Psi\right);$$

et dans le second :

$$\sin^2\frac{1}{2}\Delta_v = \cos^2\frac{1}{2}\sigma' - \cos^2\Psi = \sin\left(\frac{1}{2}\sigma' + \Psi\right)\sin\left(\frac{1}{2}\sigma' - \Psi\right).$$

Guépratte augmente encore le nombre des transformations précédentes, en remplaçant les angles σ et σ' par leurs compléments. Mais aucun de ces procédés ne présente de supériorité réelle sur la méthode de Borda. — Au surplus, cette méthode elle-même est complétement en dehors des types de calculs journaliers de la navigation; et nous ne craignons pas d'affirmer que sa longueur est la principale cause à laquelle il faut attribuer le discrédit qui a frappé dans ces dernières années l'emploi des distances lunaires à la mer, particulièrement parmi les jeunes officiers de marine.

* — Il était loin d'en être ainsi chez les navigateurs plus anciens, qui avaient pour guide l'excellent *Recueil* précité de M. Guépratte. Ils usaient largement des distances lunaires; car ils trouvaient une grande facilité de calculs dans l'emploi de la méthode sus-mentionnée de Garnett, que ledit recueil renferme. Ils tiraient ainsi des observations de distances un excellent parti pour la navigation, à une époque cependant où les tables lunaires étaient bien moins perfectionnées qu'elles ne le sont aujourd'hui.

La méthode Garnett est basée sur l'emploi des sinus verses. En voici la démonstration :

Soient :

N_a et N_b les distances zénithales apparentes des deux astres;
N'_a et N'_b leurs distances zénithales vraies;
z l'angle au zénith commun aux deux triangles vrai et apparent.

Le triangle ZAB, *fig.* 20 du n° 71, des positions apparentes donne:

$$\cos\Delta_0 = \cos N_a \cos N_b + \sin N_a \sin N_b \cos z.$$

D'où :

$$\cos z = \frac{\cos\Delta_0 - \cos N_a \cos N_b}{\sin N_a \sin N_b};$$

$$\sin v.z = 1 - \frac{\cos\Delta_0 - \cos N_a \cos N_b}{\sin N_a \sin N_b} = \frac{\cos(N_a - N_b) - \cos\Delta_0}{\sin N_a \sin N_b} = \frac{\sin v.\Delta_0 - \sin v.(N_a - N_b)}{\sin N_a \sin N_b}.$$

On aurait de même dans le triangle des positions vraies :

$$\sin v.z = \frac{\sin v.\Delta_v - \sin v.(N'_a - N'_b)}{\sin N'_a \sin N'_b}.$$

D'où :

$$\frac{\sin v.\Delta_v - \sin v.(N'_a - N'_b)}{\sin N'_a \sin N'_b} = \frac{\sin v.\Delta_0 - \sin v.(N_a - N_b)}{\sin N_a \sin N_b};$$

$$\sin v.\Delta_v - \sin v.(N'_a - N'_b) = \left[(\sin v.\Delta_0 - \sin v.(N_a - N_b)\right]\frac{\sin N'_a \sin N'}{\sin N_a \sin N_b}.$$

Si on fait :

$$\frac{\sin N'_a \sin N'_b}{\sin N_a \sin N_b} = 1 - F,$$

on a en définitive :

$$\sin v.\Delta_v = \sin v.\Delta_0 - \sin v.(N_a - N_b) - F\left[\sin v.\Delta_0 - \sin v.(N_a - N_b)\right] + \sin v.(N'_a - N'_b) \quad (*).$$

Telle est la formule qui donne la distance vraie au moyen de son sinus verse. Ce calcul est extrêmement court, le facteur F se prend dans la *table* LVI de la 3e édition des TABLES de Guépratte. La différence des hauteurs étant la même, au signe près, que la différence des distances zénithales, et les sinus verses des angles négatifs étant les mêmes que ceux des angles positifs de même grandeur, on prend pour $(N_a - N_b)$ et $(N'_a - N'_b)$ les différences des hauteurs.

Toutefois, l'application de cette méthode donne des résultats moins rigoureux que celle de Borda; et l'erreur due à l'*essence* même du procédé, peut atteindre quelquefois 3 à 4 secondes. Cela dépend du degré de précision plus ou moins grand avec lequel le facteur F est déterminé. Si on le prend dans les tables, il y a toujours une petite incertitude; et si on le calcule directement, l'opération est alors allongée d'une manière sensible. — Malgré son imperfection, c'est une méthode que les marins les plus habitués aux observations de distance emploient de préférence. Il suffit d'avoir une *table de sinus verses* et la *table* précitée de Guépratte qui donne F, pour effectuer le calcul en quelques minutes.

— Au point de vue de la brièveté, la méthode Garnett est préférable à celle bien connue de Mendoza, qui, comme elle, consiste dans une formule basée sur l'emploi des sinus verses et des susinus verses, et qui peut s'écrire ainsi :

$$\sin v.\Delta_v = \left[\sin v.(\Delta_0 + \varphi) + \sin v.(\Delta_0 - \varphi)\right] + \left[\text{susinv}.(a' + b')\right] + \left[\sin v.(a + b + \varphi) + \sin v.(a + b - \varphi)\right] - 1;$$

avec :

$$2 \cos \varphi = \frac{\cos a' \cos b'}{\cos a \cos b}.$$

(*) Conformément à la note du bas de la page 8, on voit aisément que la formule de Garnett en *lignes verses* demeurerait tout aussi simple si on la transformait en une relation de *lignes naturelles*. De son côté, la formule de Mendoza, donnée plus loin, deviendrait même plus simple après une semblable transformation. Or les tables de *lignes naturelles* nécessaires à l'emploi des formules ainsi transformées, offriraient l'avantage d'avoir un usage moins spécial et bien plus répandu que celles des tables de *lignes verses*. Toutefois, nous répéterons, comme dans ladite note, que ces dernières lignes ont l'avantage d'être toujours positives, et d'éviter ainsi les erreurs de signe.



Le calcul s'effectue au moyen des TABLES dites de Mendoza, revues et corrigées par M. Richard, et qui donnent, d'une part, l'angle auxiliaire φ (*table* XI), et, d'autre part (*table* XIII), les trois termes entre crochets du second membre de la formule générale, ainsi que l'angle correspondant au premier membre.

La *Connaissance des temps* publie chaque année un type de calcul d'après la méthode de Mendoza. — Cette méthode est notablement plus courte que celle de Borda; mais elle l'est moins, venons-nous de dire, que celle de Garnett. D'ailleurs, elle demande beaucoup de parties proportionnelles. Enfin les *tables* elles-mêmes sont le résultat de calculs assez compliqués, de sorte que beaucoup d'erreurs ont pu se glisser dans leur rédaction (*).

— On trouvera, dans les traités d'astronomie et de navigation, bien d'autres formules encore donnant *directement* la distance vraie. On peut consulter, à cet égard, outre Guépratte, Lalande et Delambre. Mais les trois procédés que nous venons de citer suffisent à donner une idée complète de l'esprit des méthodes *directes*.

✳ N° 70. Méthodes indirectes pour la réduction des distances lunaires : 1re voie. Exposé des méthodes de Bremicker et de Chauvenet. — La recherche d'une formule commode donnant la différence entre la distance apparente et la distance vraie, a particulièrement exercé la sagacité des astronomes et des calculateurs. Mais parmi le grand nombre de relations qui ont été proposées, aucune n'est entrée jusqu'ici dans la pratique journalière de la navigation, principalement à cause des tables variées qu'il aurait fallu calculer pour simplifier leur emploi, du moins quand on désire un certain degré d'exactitude. Cependant le principe qui consiste à rechercher la différence, toujours assez petite, entre deux arcs qui sont généralement grands, est très-fécond, en ce sens que le calcul peut être exécuté avec des valeurs approchées des éléments, sans que la précision du résultat s'en ressente d'une manière sensible.

Deux VOIES différentes se présentent à cet effet. Dans la première, on a exclusivement recours à des transformations trigonométriques. Dans la seconde, on se sert des développements résultant de la série de Taylor.

(*) Biot raconte, dans le mémoire déjà cité à la note, page 136, que Mendoza s'est tué à Londres en 1813, désespéré d'une faute de calcul qu'on avait découverte dans une de ses tables, succombant ainsi misérablement à la tyrannie de ce fol orgueil des gens qui s'imaginent qu'en dehors de leur système, tout est perdu.



Nous allons exposer la première de ces voies dans le présent numéro sur deux méthodes différentes. La seconde voie sera traitée dans le numéro suivant.

— Nous débuterons par la méthode de réduction qu'a imaginée Bremicker, et que renferme le *Traité d'astronomie sphérique* de Brünnow. Elle est ingénieuse et suffisamment exacte.

On a dans le triangle apparent AZB, *fig.* 20 du n° 71 :

$$\cos \Delta_0 = \sin a \sin b + \cos a \cos b \cos z;$$

d'où :

$$\cos \Delta_0 = \cos (a - b) - 2 \cos a \cos b \sin^2 \frac{1}{2} z.$$

De même dans le triangle vrai A'Z'B', il vient :

$$\cos \Delta_v = \cos (a' - b') - 2 \cos a' \cos b' \sin^2 \frac{1}{2} z;$$

d'où :

$$\cos \Delta_v = \cos (a' - b') + \frac{\cos a' \cos b'}{\cos a \cos b} \left[\cos \Delta_0 - \cos (a - b)\right].$$

Faisons :

$$\frac{\cos a' \cos b'}{\cos a \cos b} = \frac{1}{C}; \qquad (a - b) = d; \qquad (a' - b') = d';$$
$$\cos d = C \cos d''; \qquad \cos \Delta_0 = C \cos \Delta'.$$

Alors, l'équation générale précédente en Δ_v pourra s'écrire :

$$\cos \Delta_v - \cos \Delta' = \cos d' - \cos d'';$$

ou bien :

$$2 \sin \frac{(\Delta_v + \Delta')}{2} \sin \frac{(\Delta' - \Delta_v)}{2} = 2 \sin \frac{(d'' + d')}{2} \sin \frac{(d'' - d')}{2}.$$

Les différences $(\Delta' - \Delta_v)$ et $(d'' - d')$ étant de petits arcs, substituons aux sinus les arcs eux-mêmes; et il viendra, en changeant d'ailleurs les signes :

$$(\Delta_v - \Delta') = (d' - d'') \frac{\sin \frac{(d' + d'')}{2}}{\sin \frac{(\Delta_v + \Delta')}{2}}.$$

Remplaçons enfin $\sin \frac{(\Delta_v + \Delta')}{2}$ par $\sin \frac{(\Delta_0 + \Delta')}{2}$ qui d'ordinaire en diffère peu; et posons :

$$x = (d' - d'') \frac{\sin \frac{(d' + d'')}{2}}{\sin \frac{(\Delta_0 + \Delta')}{2}}.$$

Nous aurons en définitive :

$$\Delta_v = \Delta' + x.$$

Il est facile de voir que ce n'est que dans le cas où Δ_v différera beaucoup de Δ_0 qu'on sera obligé de recommencer le calcul de la quantité x, en remplaçant, dans l'expression de cette quantité, Δ_0 par la première valeur obtenue de Δ_v. Mais dans les nombreuses applications que M. Beuf a faites de cette formule, il lui a toujours été inutile de recommencer le calcul : la valeur de la correction fournie par l'équation en x s'est toujours trouvée exacte à moins d'une seconde.

— Nous remarquerons que, dans la méthode précédente, il faut, pour obtenir Δ_v, passer par la valeur intermédiaire Δ', et que c'est à cette quantité que s'applique la correction x, et non à la distance apparente Δ_0. Mais, en général, les autres auteurs de formules *indirectes* par voie *exclusive* de transformations trigonométriques, se sont proposé de trouver, sans aucun intermédiaire, la correction à faire subir à la distance observée elle-même, pour en déduire la distance vraie. Il suffit à cet effet de considérer la formule du triangle apparent AZB, *fig.* 20 du n° 71 : $\cos \Delta_0 = \sin a \sin b + \cos a \cos b \cos z$; et d'y remplacer Δ_0 par $(\Delta_0 + y)$, et a et b par $(a + da)$ et $(b - db)$, da et db étant les *corrections* ARITHMÉTIQUES à faire subir aux hauteurs apparentes a et b pour les convertir en hauteurs vraies. On obtient de la sorte :

$$(48) \qquad \cos(\Delta_0 + y) = \sin(a + da)\sin(b - db) + \cos(a + da)\cos(b - db)\cos z,$$

$$\text{avec } y = (\Delta_v - \Delta_0).$$

En développant trigonométriquement les divers termes des deux membres de cette expression, après avoir d'ailleurs exprimé z en fonction des hauteurs et de la distance apparente des astres, on arrive, toutes réductions faites, à des expressions, plus ou moins compliquées, qui donnent les valeurs de la correction y.

C'est en suivant une pareille marche que M. Chauvenet a trouvé, vers 1855, une méthode que nous croyons devoir exposer, au moins brièvement, à cause du renom de son auteur. — Partons de la relation (48) ci-dessus ; et remplaçons, dans cette relation, $\cos z$ par sa valeur tirée du triangle apparent AZB précité, à savoir :

$$\cos z = \frac{\cos \Delta_0 - \sin a \sin b}{\cos a \cos b}.$$

On obtient :

$$\cos(\Delta_0 + y) = \sin(a + da)\sin(b - db) + \cos(a + da)\cos(b - db)\,\frac{\cos\Delta_0 - \sin a \sin b}{\cos a \cos b}.$$

Cette équation peut s'écrire :

$$(48\ bis)\ \left\{\begin{aligned} \cos\Delta_0 - \cos(\Delta_0 + y) = \left[1 - \frac{\cos(a+da)\cos(b-db)}{\cos a \cos b}\right]\cos\Delta_0 \\ + \left[\frac{\cos(a+da)\cos(b-db)}{\cos a\cos b} - \frac{\sin(a+da)\sin(b-db)}{\sin a \sin b}\right]\sin a \sin b. \end{aligned}\right.$$

Or on a d'abord :

$$\cos\Delta_0 - \cos(\Delta_0 + y) = 2\sin\frac{y}{2}\sin\left(\Delta_0 + \frac{y}{2}\right).$$

D'autre part :

$$\frac{\cos(a+da)}{\cos a} = \frac{\cos a - \cos a + \cos(a+da)}{\cos a} = 1 - \frac{2\sin\frac{da}{2}\sin\left(a + \frac{da}{2}\right)}{\cos a}.$$

De même :

$$\frac{\cos(b-db)}{\cos b} = 1 + \frac{2\sin\frac{db}{2}\sin\left(b - \frac{db}{2}\right)}{\cos b}.$$

Par suite, il vient :

$$\left[1 - \frac{\cos(a+da)\cos(b-db)}{\cos a\cos b}\right] = \frac{2\sin\frac{da}{2}\sin\left(a + \frac{da}{2}\right)}{\cos a} - \frac{2\sin\frac{db}{2}\sin\left(b - \frac{db}{2}\right)}{\cos b}$$
$$+ \frac{4\sin\frac{da}{2}\sin\frac{db}{2}\sin\left(a + \frac{da}{2}\right)\sin\left(b - \frac{db}{2}\right)}{\cos a \cos b}.$$

On trouve semblablement :

$$\left[\frac{\cos(a+da)\cos(b-db)}{\cos a\cos b} - \frac{\sin(a+da)\sin(b-db)}{\sin a\sin b}\right] = \frac{\sin db \sin(2a+da) - \sin da \sin(2b - db)}{2\sin a\cos a\sin b\cos b}.$$

La correction y à faire subir à la distance étant toujours plus petite qu'un degré, et da ainsi que db étant encore moindres, nous pouvons écrire $\frac{y}{2}\sin 1''$, $\frac{da}{2}\sin 1''$, $\frac{db}{2}\sin 1''$, au lieu de $\sin\frac{y}{2}$, $\sin\frac{da}{2}$, $\sin\frac{db}{2}$, sans avoir à craindre plus de 0″,1 d'erreur. — Cela admis,

posons :

$$A_1 = \frac{da}{\cos a} \sin\left(a + \frac{da}{2}\right),$$
$$B_1 = -\frac{da}{\cos a} \frac{\sin(2b - db)}{2\cos b},$$
$$C_1 = -\frac{db}{\cos b} \sin\left(b - \frac{db}{2}\right),$$
$$D_1 = \frac{db}{\cos b} \frac{\sin(2a + da)}{2\cos a}.$$

En introduisant toutes les transformations précédentes dans la formule (48 *bis*), il vient :

$$(48\ ter) \qquad y \sin\left(\Delta_0 + \frac{y}{2}\right) = A_1 \cos\Delta_0 + B_1 + C_1 \cos\Delta_0 + D_1 - A_1 C_1 \sin 1'' \cos\Delta_0.$$

Au lieu des corrections *arithmétiques* da et db des hauteurs apparentes, M. Chauvenet introduit maintenant la parallaxe horizontale du lieu Π et la réfraction R pour la Lune, ainsi que la parallaxe p_1 et la réfraction R_1 pour le second astre. A cet effet, il suffit de remarquer qu'on a d'abord sensiblement pour la Lune :

$$da = \Pi \cos(a - R) - R = \Pi \cos a + \Pi \sin a \sin R - R = (\Pi \cos a - R)(1 + k),$$

avec $k = \operatorname{tg} a \sin R$. La quantité k est à peu près constante, et égale à 0,00029, comme le démontre l'auteur. De cette constance, il résulte qu'on a aussi $k = \operatorname{tg} b \sin R_1$, relation dont nous aurons besoin dans un instant.

Pour le second astre, on a :

$$db = (R_1 - p_1 \cos b).$$

Si l'on pose $R' = \frac{R}{\cos a}$, et $R'_1 = \frac{R_1}{\cos b}$, il vient :

$$\frac{da}{\cos a} = (\Pi - R')(1 + k); \qquad \frac{db}{\cos b} = (R'_1 - p_1).$$

Seulement, il faut prendre les réfractions *transformées* R′ et R'_1 dans une *table spéciale* calculée par l'auteur.

Par ailleurs, dans la formule (48 *ter*), le terme $A_1 C_1 \sin 1'' \cos\Delta_0$ étant très-petit (il n'atteint pas 1″), on a très-approximativement

$$C_1 \sin 1'' = -R'_1 \sin 1'' \sin b = -\operatorname{tg} b \sin R_1 = -k.$$

On peut alors le combiner avec le premier terme, ce qui donnera :

$$A_1 \cos\Delta_0 - A_1 C_1 \sin 1'' \cos\Delta_0 = A_1 \cos\Delta_0 (1 + k).$$

En introduisant dans la formule (48 *ter*) cette dernière relation d'une part, et, d'autre part, dans les valeurs des termes A_1, B_1, C_1, D_1 de cette formule, les expressions ci-dessus de $\frac{da}{\cos a}$ et $\frac{db}{\cos b}$, on

obtient une nouvelle relation, que M. Chauvenet simplifie en posant d'abord :

$$(49)\quad \begin{cases} A=(1+k)^2\dfrac{\sin\left(a+\dfrac{da}{2}\right)}{\sin a}, \\ B=(1+k)\dfrac{\sin(2b-db)}{\sin 2b}, \\ C=\dfrac{\sin\left(b-\dfrac{db}{2}\right)}{\sin b}, \\ D=\dfrac{\sin(2a+da)}{\sin 2a}; \end{cases}$$

puis :

$$(49\ bis)\quad \begin{cases} A'=+(\Pi-R')A\sin a\cot g\,\Delta_0, \\ B'=-(\Pi-R')B\dfrac{\sin b}{\sin\Delta_0}, \\ C'=-(R'_1-p_1)C\sin b\cot g\,\Delta_0, \\ D'=+(R'_1-p_1)D\dfrac{\sin a}{\sin\Delta_0}. \end{cases}$$

La formule (48 *ter*), simplifiée suivant la manière que nous venons d'expliquer, devient, après avoir été divisée par $\sin\Delta_0$:

$$y\frac{\sin\left(\Delta_0+\dfrac{y}{2}\right)}{\sin\Delta_0}=A'+B'+C'+D'.$$

En développant $\sin\left(\Delta_0+\dfrac{y}{2}\right)$, et en posant :

$$x=-\frac{y^2\sin 1''\cos\left(\Delta_0+\dfrac{y}{4}\right)}{2\sin\Delta_0}=-\frac{1}{2}y^2\sin 1''\cot g\,\Delta_0.$$

on parvient à la formule définitive :

$$y=(\Delta_v-\Delta_0)=A'+B'+C'+D'+x.$$

Des *tables* calculées par l'auteur donnent les logarithmes des quantités A, B, C, D des formules (49). Les termes A', B', C', D' se déterminent ensuite d'après les relations (49 *bis*) au moyen de A, B, C et D, de la distance apparente Δ_0 et des hauteurs apparentes a et b; on ne prend d'ailleurs les logarithmes qu'avec quatre décimales. Enfin une *table supplémentaire* fournit le terme correctif x.

La méthode de M. Chauvenet est très-ingénieuse ; mais elle a le grave défaut d'exiger six tables *spéciales*, c'est-à-dire inhérentes à la méthode elle-même. En outre, bien que les logarithmes ne soient pris partout qu'avec quatre décimales, comme il faut en employer *seize*, le calcul finit par être un peu long. Enfin, de l'avis de l'auteur, il se peut que la distance calculée soit erronée de quelques secondes par

suite des quantités négligées dans les transformations; cette erreur est, du reste, d'autant plus sensible que la distance est plus petite.

N° 71. Méthodes indirectes pour la réduction des distances lunaires : 2° voie. Exposé de la méthode de MM. Beuf et Perrin. — La DEUXIÈME VOIE annoncée au numéro précédent concernant l'établissement des méthodes *indirectes* pour la réduction des distances lunaires, consiste dans le calcul de la différence entre la distance vraie et la distance apparente, au moyen du développement du deuxième membre de la relation (48) dudit numéro, par la série de Taylor, en fonction des *corrections* ARITHMÉTIQUES *da* et *db* à faire subir aux hauteurs apparentes pour les convertir en hauteurs vraies.

C'est sur l'emploi de ce mode d'opérer que repose la méthode ci-après de réduction. Cette méthode, dont les bases ont été jetées par M. Beuf, a été élucidée et complétée par M. Perrin, qui a su donner au second terme de la correction une forme très-élégante et très-facile à mettre en tables.

Pour établir les formules voulues, nous considérerons le triangle apparent AZB, *fig.* 20, en employant les notations déjà convenues au n° 69, et de plus en nommant A et B les angles à la Lune et au second astre. — On tire évidemment du théorème de Taylor à deux variables, en s'arrêtant aux termes du second ordre :

$$\Delta_v = \Delta_0 + d\Delta_0 + \frac{d^2\Delta_0}{1.2};$$

soit :

$$(\Delta_v - \Delta_0) = d\Delta_0 + \frac{d^2\Delta_0}{1.2};$$

en représentant par :

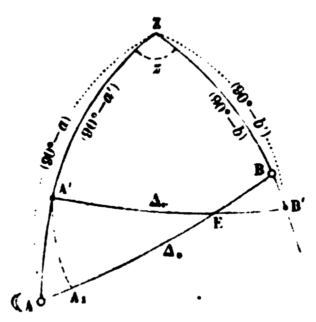


Fig. 20, relative à la réduction des distances lunaires.

$d\Delta_0$ et $d^2\Delta_0$ d'abord les différentielles totales du premier et du deuxième ordre de Δ_0 par rapport à a, b, et, une fois la différentiation terminée, les *différences* du 1er et du 2e ordre par rapport aux mêmes quantités.

Cela posé, le triangle apparent AZB donne :

$$(50) \qquad \cos\Delta_0 = \sin a \sin b + \cos a \cos b \cos z.$$

Différentions cette relation par rapport à Δ_0, a et b. Puis, comme il vient d'être convenu, regardons, une fois la différentiation terminée, les

différentielles comme des *différences;* rappelons-nous, en outre, que la *différence* relative à b est égale et de signe contraire à la correction *arithmétique* db sus-mentionnée. Nous trouverons ainsi :

(51) $$-\sin\Delta_0 d\Delta_0 = (\sin b\cos a - \sin a\cos b\cos z)da - (\sin a\cos b - \sin b\cos a\cos z)db.$$

Mais d'après une formule connue de la trigonométrie sphérique entre cinq éléments consécutifs d'un triangle, on a :

$$\operatorname{tg} b\cos a = \cot A\sin z + \sin a\cos z.$$

Multiplions les deux membres de cette équation par $\cos b$; puis remplaçons $\frac{\sin z}{\sin A}$ par $\frac{\sin\Delta_0}{\cos b}$. Il viendra :

$$\sin b\cos a = \left(\cos A\frac{\sin z}{\sin A} + \sin a\cos z\right)\cos b = \left(\cos A\frac{\sin\Delta_0}{\cos b} + \sin a\cos z\right)\cos b$$
$$= \cos A\sin\Delta_0 + \sin a\cos b\cos z.$$

En rapprochant le premier et le dernier membre de cette triple égalité, on tire de l'équation simple qui en résulte :

$$\cos A\sin\Delta_0 = \sin b\cos a - \sin a\cos b\cos z.$$

On arriverait de même à :

$$\cos B\sin\Delta_0 = \sin a\cos b - \sin b\cos a\cos z.$$

Substituant ces deux dernières relations dans l'équation (51), et divisant par sin Δ_0, on obtient :

$$d\Delta_0 = -da\cos A + db\cos B \text{ (*)}.$$

(*) Cette relation peut s'établir géométriquement d'une manière très-simple. Il suffit, en effet, de décrire du point E, *fig.* 20, comme centre, un arc de cercle $A'A_1$, avec EA' pour rayon. On forme ainsi un petit triangle $A'AA_1$, qui, considéré comme rectiligne, donne :

$$AA_1 = AE - A'E = AA'\cos A = da\cos A.$$

On trouverait de même, en faisant bien attention à ce que l'angle représenté par B est ZBA :

$$BE - B'E = -db\cos B.$$

En combinant convenablement les deux équations précédentes, on en tire :

$$(A'E + B'E) - (AE + BE) = -da\cos A + db\cos B;$$

soit :

$$(\Delta_v - \Delta_0) = d\Delta_0 = -da\cos A + db\cos B.$$

En revanche, la valeur de la différence du second ordre $d^2\Delta_0$ ne saurait se trouver géométriquement qu'avec les plus grandes difficultés; et la voie analytique indiquée dans le texte est seule recommandable.

— Cherchons maintenant la *différence* du deuxième ordre $d^2\Delta_0$. A cet effet, différentions l'équation immédiatement ci-dessus, en remarquant que d^2a et d^2b sont nulles, attendu que da et db sont des quantités *constantes*. Nous aurons :

$$d^2\Delta_0 = da \sin A\, dA - db \sin B\, dB.$$

Pour exprimer dA et dB en fonction de da et de db, nous nous reporterons, en l'écrivant différemment, à la formule sus-mentionnée entre cinq éléments consécutifs du triangle apparent, soit à la relation :

$$\cot A \sin z = \operatorname{tg} b \cos a - \sin a \cos z.$$

En différentiant, nous obtiendrons :

$$-\sin z \frac{dA}{\sin^2 A} = -\cos a \frac{db}{\cos^2 b} - (\operatorname{tg} b \sin a + \cos a \cos z) da.$$

Or l'équation (50) peut s'écrire :

$$\frac{\cos \Delta_0}{\cos b} = \operatorname{tg} b \sin a + \cos a \cos z.$$

En combinant cette relation avec la précédente, il vient :

$$-\sin z \frac{dA}{\sin^2 A} = -\cos a \frac{db}{\cos^2 b} - \frac{\cos \Delta_0}{\cos b} da;$$

et en multipliant par sin A,

$$-\frac{\sin z}{\sin A} dA = -\frac{\cos a}{\cos b} \frac{\sin A}{\cos b} db - \frac{\cos \Delta_0}{\cos b} \sin A\, da.$$

Mais d'après la proportionnalité des sinus des côtés et des angles opposés, on a :

$$\frac{\sin z}{\sin A} = \frac{\sin \Delta_0}{\cos b}; \quad \text{et} \quad \frac{\cos a}{\cos b} = \frac{\sin B}{\sin A}.$$

Remplaçant dans la dernière formule, et simplifiant, on aura :

$$dA = \frac{\sin B}{\sin \Delta_0} db + \operatorname{cotg} \Delta_0 \sin A\, da.$$

On trouverait de même :

$$dB = -\frac{\sin A}{\sin \Delta_0} da - \operatorname{cotg} \Delta_0 \sin B\, db.$$

Portant ces valeurs dans la valeur de $d^2\Delta_0$, nous aurons, après toutes réductions faites :

$$d^2\Delta_0 = \operatorname{cotg} \Delta_0 \left[(da \sin A)^2 + (db \sin B)^2\right] + 2da\, db \frac{\sin A \sin B}{\sin \Delta_0}.$$

Nous allons transformer le deuxième membre de cette équation de

manière à le rendre plus simple. A cet effet, remarquons qu'on a :

$$\operatorname{cotg}\Delta_0 = \frac{\cos\Delta_0}{\sin\Delta_0} = \frac{\cos^2\frac{\Delta_0}{2} - \sin^2\frac{\Delta_0}{2}}{2\sin\frac{\Delta_0}{2}\cos\frac{\Delta_0}{2}} = \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\Delta_0}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\Delta_0}{2};$$

De même :

$$\frac{1}{\sin\Delta_0} = \frac{\cos^2\frac{\Delta_0}{2} + \sin^2\frac{\Delta_0}{2}}{2\sin\frac{\Delta_0}{2}\cos\frac{\Delta_0}{2}} = \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\Delta_0}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\Delta_0}{2}.$$

En remplaçant $\operatorname{cotg}\Delta_0$ et $\frac{1}{\sin\Delta_0}$ par ces expressions, et en introduisant d'ailleurs le dénominateur 2, on obtient :

$$\frac{d^2\Delta_0}{2} = \frac{1}{4}\operatorname{cotg}\frac{\Delta_0}{2}\left[(da\sin A)^2 + (db\sin B)^2\right] - \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\Delta_0}{2}\left[(da\sin A)^2 + (db\sin B)^2\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\Delta_0}{2}\, da\, db\sin A\sin B + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\Delta_0}{2}\, da\, db\sin A\sin B.$$

L'expression précédente peut évidemment s'écrire :

$$\frac{d^2\Delta_0}{2} = \frac{1}{4}\operatorname{cotg}\frac{\Delta_0}{2}(da\sin A + db\sin B)^2 - \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\Delta_0}{2}(da\sin A - db\sin B)^2.$$

Dès lors la correction totale $(\Delta_v - \Delta_0)$ à faire subir à la distance apparente Δ_0 pour avoir la distance vraie Δ_v, après avoir d'ailleurs substitué les *angles* aux *arcs*, devient :

$$) = \left\{\overbrace{-da\cos A + db\cos B}^{1}\right\} + \left\{\overbrace{\frac{1}{4}\operatorname{cotg}\frac{\Delta_0}{2}\sin 1''(da\sin A + db\sin B)^2 - \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\Delta_0}{2}\sin 1''(da\sin A - db\sin B)^2}^{2}\right\}.$$

Il importe de noter que ce qui constitue le *caractère* et l'*originalité* de la relation à laquelle nous venons d'arriver, c'est la transformation du terme du second ordre, SANS RIEN NÉGLIGER ABSOLUMENT, en *une différence de deux carrés* facilement calculables au moyen de tables spéciales.

— Le calcul de la *correction* 1 du premier ordre est des plus faciles. Pour l'effectuer, on détermine d'abord les angles aux astres A et B au moyen des deux formules ci-après, qui n'exigent que l'emploi de cinq logarithmes à cinq décimales, et l'évaluation des angles à la minute seulement :

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}A = \frac{\sin(S-b)\cos S}{\sin(S-a)\cos(S-\Delta_0)}; \quad \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}B = \frac{\sin(S-a)\cos S}{\sin(S-b)\cos(S-\Delta_0)}, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\cos S}{\cos(S-\Delta_0)\operatorname{tg}\frac{1}{2}A}\right)^2$$

$$\text{avec} \quad S = \frac{\Delta_0 + a + b}{2}.$$

Puis, on convertit *da* et *db* en fraction décimale de minute. Une *table* (*) particulière dressée par M. Beuf, et qui n'est autre qu'une table de point perfectionnée, donne immédiatement les valeurs exactes de *da* cos A et *db* cos B; et on a par suite le premier terme de la valeur de $(\Delta_v - \Delta_a)$.

Cela terminé, on s'occupe de la *correction* **2** du second ordre. A cet effet, on prend dans la même table, et à vue, les valeurs de *da* sin A et *db* sin B; puis on en fait successivement la somme et la différence. Avec ces deux arguments et la distance apparente Δ_a, on entre dans une *autre table* (*) calculée par M. Perrin; et on trouve, à vue, les deux parties de ladite correction **2**. On les retranche l'une de l'autre; et le résultat s'ajoute à la valeur déjà trouvée pour la correction **1**.

Rien de plus aisé dans la pratique que ces diverses opérations. Nous pouvons affirmer que le calcul tout entier n'est pas deux fois plus long qu'un calcul d'angle horaire; et le TYPE n° 8, que nous en donnons à la fin du texte, montre l'extrême simplicité de la méthode, même dans les conditions les plus complexes où elle puisse, comme dans ledit type, être appliquée pour conduire à une grande rigueur.

Il importe d'ajouter que les erreurs dues à l'*essence* même de la méthode ne dépassent jamais 1″. — Par ailleurs la connaissance des angles A et B aux astres permet de calculer avec toute l'exactitude désirable l'accourcissement du demi-diamètre, pour passer de la distance observée des bords à la distance apparente des centres. Or cela constitue (n° 73) un nouvel avantage, qui a une incontestable importance.

* **72. Méthodes graphiques pour la réduction des distances lunaires.** — La première idée de ces méthodes appartient à La Caille, qui construisit, en 1759, un châssis de réduction, au moyen duquel, en tirant quelques lignes, on obtenait la correction de la distance. Lalande fit graver le modèle de ce châssis dans les *Connaissances des temps* des années 1761 et 1762. Le système servait en même temps à trouver l'angle horaire par la hauteur du Soleil; il aurait pu servir également à obtenir l'azimut.

Plus tard, Richer, constructeur d'instruments de mathématiques, composa un appareil de projections, où les triangles sphériques

---

(*) La *table* de M. Beuf et *celle* de M. Perrin forment le complément d'un mémoire intitulé : « *Nouvelle méthode de réduction des distances lunaires, avec tables spéciales* » par ces deux auteurs.

étaient représentés par des lignes droites. L'Académie adjugea à cet artiste, le 4 mai 1790, le prix qu'elle avait fondé pour la réduction des distances. — La description et l'usage de l'instrument de Richer nous entraîneraient trop loin ; on peut consulter à cet égard le *Traité de navigation* de Lalande. Il nous suffira de dire qu'on obtenait par son moyen la réduction de la distance à moins de 30″.

— Dans ces derniers temps, M. Hue a fait construire et adopter par la Marine un planisphère plus perfectionné, qui ne donne pas immédiatement la distance vraie, mais qui fait connaître très-rapidement des éléments à l'aide desquels on calcule les corrections à apporter à la distance apparente pour la convertir en distance vraie.

Le 7ᵉ cahier des *Recherches sur les chronomètres, etc.*, publiées par le Dépôt des cartes et plans de la marine, donne les formules qui renferment les éléments en question, et qui sont en fait calculées graphiquement par le procédé de M. Hue. Ces formules s'obtiennent en partant de la relation fondamentale déjà invoquée plusieurs fois dans les numéros précédents, à savoir :

$$\cos \Delta_0 = \sin a \sin b + \cos a \cos b \cos z.$$

En traitant cette relation par la série de Taylor de la même manière d'ailleurs qu'au nº 71, il vient :

$$\Delta_v = \Delta_0 - da \cos A + db \cos B + \frac{(da \sin A)^2 + (db \sin B)^2}{2} \cot \Delta_0 \sin 1'' + \frac{da\, db \sin A \sin B}{\sin \Delta_0} \sin 1'' + \ldots..$$

Cette expression est la même que celle par laquelle on passe implicitement dans la méthode de MM. Beuf et Perrin, pour parvenir à leur formule définitive ; et le terme du deuxième ordre y est complet. Arrivé là, M. Hue a simplifié, lui aussi, ledit terme, mais suivant une toute autre manière. Sa simplification consiste à négliger certaines quantités. Il pose à cet effet :

$$x_1 = db \cos B - da \cos A,$$

$$x_2 = \frac{(da \sin A)^2 + (db \sin B)^2}{2} \cot \Delta_0 \sin 1'' + \frac{da\, db \sin A \sin B}{\sin \Delta_0} \sin 1'';$$

ce qui donne :

$$\Delta_v = \Delta_0 + x_1 + x_2.$$

Puis, il transforme la valeur de x_2 de la façon suivante :

$$x_2 = \frac{(da)^2 + (db)^2}{2} \cot \Delta_0 \sin 1'' - \frac{(da \cos A)^2 + (db \cos B)^2}{2} \cot \Delta_0 \sin 1'' + \frac{da\, db \sin A \sin B}{\sin \Delta_0} \sin 1'';$$

ou bien :

$$x_2 = \frac{(da)^2 + (db)^2}{2} \cot \Delta_0 \sin 1'' - \frac{(db \cos B - da \cos A)^2}{2} \cot \Delta_0 \sin 1'' + da\, db \frac{(\sin A \sin B - \cos A \cos B \cos \Delta)}{\sin \Delta_0} \sin 1'';$$

ce que l'on peut écrire :

$$x_2 = \frac{(da)^2 + (db)^2}{2} \cot \Delta_0 \sin 1'' - \frac{1}{2} x_1^2 \cot \Delta_0 \sin 1'' + da\, db \frac{(\sin A \sin B - \cos A \cos B \cos \Delta)}{\sin \Delta_0} \sin 1''.$$

Le dernier terme de cette valeur de x_2 est plus petit que $\frac{da\, db \sin 1''}{\sin \Delta_0}$, quantité qui a pour valeur 6″, lorsque les hauteurs étant chacune de 15°, la distance apparente Δ_0 est de 30°. M. Hue néglige ce terme, ainsi que la partie $\frac{1}{2} (db)^2 \cot \Delta_0 \sin 1''$ du premier terme de ladite valeur, partie qui n'atteint pas 1″ pour les limites $db = 5'$ et $\Delta_0 = 20°$.

Avec ces simplifications, l'expression définitive proposée par M. Hue pour la distance vraie, devient :

$$\Delta_v = \Delta_0 - da \cos A + db \cos B + \frac{1}{2} (da)^2 \cot \Delta_0 \sin 1'' - \frac{1}{2} x_1^2 \cot \Delta_0 \sin 1''.$$

Cette relation présente à première vue une certaine analogie avec la formule *finale* du n° 71 de MM. Beuf et Perrin. Mais, avec un peu de réflexion, on reconnaît bien vite des différences essentielles entre les deux résultats, surtout en se reportant à la remarque faite à la suite de la formule finale en question, pour en spécifier le *caractère* et l'*originalité*.

En tout état de cause, l'instrument de M. Hue donne, à l'aide de quelques multiplications, les différents termes de la formule ci-dessus ; et, au fond, il remplace les tables au moyen desquelles on pourrait calculer une des nombreuses formules indirectes dont nous avons donné le principe au n° 70. Malheureusement, les imperfections de lecture sont presque inévitables avec un pareil instrument; et, en définitive, l'erreur commise ici dans la réduction de la distance peut être importante, eu égard d'ailleurs aux influences sus-

mentionnées ($6'' + 1'' = 7''$) du défaut même d'approximation de la formule sur laquelle le système est basé.

N° 72. Circonstances favorables à l'usage des distances lunaires. — Les erreurs à craindre ici sont celles de la distance apparente Δ_0 et celles des hauteurs. En se bornant aux termes du premier ordre, on peut étudier isolément l'influence respective de ces deux espèces d'erreurs.

En ce qui concerne l'influence de l'erreur $\delta(\Delta_0)$ de la distance apparente, on tire aisément de l'équation (50) du n° 71 :

$$\delta(\Delta_v) = \delta(\Delta_0) \times \frac{\sin\Delta_0 \cos a' \cos b'}{\sin\Delta_v \cos a \cos b}.$$

Le second membre est évidemment toujours positif. D'un autre côté, les quantités a, b, Δ_v diffèrent peu respectivement de a', b' et Δ_0. Les facteurs $\frac{\sin\Delta_0}{\sin\Delta_v}$, $\frac{\cos a'}{\cos a}$, $\frac{\cos b'}{\cos b}$ sont donc sensiblement égaux à 1; il en est de même de leur produit. Par conséquent, on aura à très-peu près :

$$\delta(\Delta_v) = \delta(\Delta_0).$$

Donc *l'erreur de la distance vraie due à l'erreur de la distance apparente est sensiblement égale à celle-ci, et possède même signe.* — Il est à remarquer que les conclusions précédentes sont en défaut quand la distance est très-petite, comme dans les occultations. Car, en pareil cas, les quantités Δ_0 et Δ_v, tout en continuant à ne différer entre elles que *peu* d'une manière *absolue*, sont susceptibles de devenir *relativement* assez inégales pour que leur rapport atteigne 3 et même au delà; ou tombe à 1/3 et même au-dessous. Il en est alors de même de la fraction $\frac{\sin\Delta_0}{\sin\Delta_v}$, et par suite de $\delta(\Delta_v)$ par rapport à $\delta(\Delta_0)$, ainsi que nous l'avons annoncé au n° 68, à propos des occultations considérées comme des distances observées valant *zéro*.

De la discussion précédente, on conclut que, dans les cas *ordinaires*, toute erreur commise sur la distance apparente Δ_0 se reporte intégralement sur la distance vraie Δ_v. — Les erreurs sur la distance *apparente* Δ_0 comprennent principalement les erreurs commises dans l'*observation* de la distance elle-même, qui devra dès lors être prise le plus exactement possible. Or cette dernière condition dépend, au moins en partie, du plus ou moins de facilité avec laquelle

la distance est susceptible d'être mesurée, et par suite de la clarté des deux astres, de la manière dont se trouve orienté le plan du limbe par rapport à la position la plus naturelle du corps de l'observateur, et aussi de la grandeur même de l'angle à prendre. Les circonstances *favorables* à la réalisation de ladite condition ne se trouvent pas d'habitude à la disposition du navigateur, pour le jour même où il a besoin d'une distance lunaire. — Par ailleurs, les erreurs de la distance apparente peuvent aussi provenir de la détermination du raccourcissement des demi-diamètres, pour passer de la distance observée des bords à la distance apparente des centres. Ces dernières erreurs, à leur tour, dépendent surtout du plus ou moins grand degré d'exactitude avec lequel on connaît les angles aux astres. Sous ce rapport, la méthode de réduction de MM. Beuf et Perrin (n° 71) offre, sans exiger aucun calcul auxiliaire *ad hoc*, un avantage que ne présente aucune des autres méthodes.

— Occupons-nous maintenant de l'erreur $\delta(\Delta_v)$ que les erreurs de hauteur δa et δb, *quelle que soit leur provenance*, produisent sur la distance vraie Δ_v. Il y a moyen d'obtenir cette quantité en ayant recours à la formule *finale* du n° 71 bornée à la première partie, dans son second membre, savoir :

$$(\Delta_v - \Delta_0) = - da \cos A + db \cos B.$$

Différentions cette relation par rapport aux éléments dont nous examinons les erreurs respectives, c'est-à-dire par rapport à Δ_v, a et b, en remarquant que A et B sont des fonctions implicites des variables indépendantes a et b; et changeons ensuite les différentielles en différences. Nous obtiendrons évidemment de la sorte :

$$\delta_1(\Delta_v) = - \delta(da) \cos A + \delta(db) \cos B + da\,\delta A \sin 1'' \sin A - db\,\delta B \sin 1'' \sin B.$$

Cette relation ne met en évidence aucun caractère pour spécifier les circonstances favorables concernant le cas d'erreurs qui nous occupe. Mais en faisant disparaître A et B, on reconnaît que $\sin \Delta_v$ entre en dénominateur dans le second membre, ce qui implique comme condition avantageuse d'observer autant que possible des distances voisines de 90°. — Toutefois, d'après ce qui suit, les circonstances favorables dont nous nous occupons sont en général accessoires. Par ailleurs, de même que plus haut, ces circonstances ne sont pas, en

général, à la disposition de l'observateur, le jour même où il a besoin d'une distance lunaire.

Pour comprendre le peu d'importance desdites circonstances, il suffit de se rendre compte de la proportion qui existe d'ordinaire entre $\delta_1(\Delta_v)$ et δa et δb. A cet effet, reportons-nous à la dernière relation obtenue. Nous voyons que $db\,\delta B \sin 1'' \sin B$ est toujours négligeable, eu égard à la petitesse de db. Il en est d'ordinaire de même de $da\,\delta A \sin 1'' \sin A$, tant que δA et par suite δa ne dépassent pas une certaine limite, ce qui n'aurait lieu qu'avec des hauteurs apparentes *très-erronées*. En second lieu, les quantités $\delta(da)$ et $\delta(db)$ et par suite les termes qui les renferment, ne sauraient avoir de valeur sensible que dans la dernière hypothèse que nous venons de faire. — Conséquemment, on doit admettre en principe que les hauteurs n'influent sur Δ_v que d'une façon secondaire. En d'autres termes, des erreurs restreintes sur leurs valeurs ont très-peu d'effet sur le résultat cherché, parce qu'elles changent à peine leurs corrections $da = +(p - R)$ et $db = +(R_1 - p_1)$, corrections qu'il importe seulement de calculer avec soin; et aussi parce que les deux derniers termes de l'expression ci-dessus de $\delta_1(\Delta_v)$ sont alors négligeables.

Les hauteurs les plus avantageuses au point de vue des inexactitudes susceptibles d'affecter lesdites corrections pour une cause ou pour une autre, sont les hauteurs avec lesquelles ces corrections varient le plus lentement. Pour la Lune, on a à peu près $p = 60' \cos a$, et $R = 60'' \operatorname{cotg} a$; si a s'accroît de $60''$, p varie de $-60'' \times 60 \sin a \times 60 \sin 1''$, et R de $-\dfrac{60''}{\sin^2 a} \times 60 \sin 1''$. La variation de $(p - R)$ est donc $60'' \times 60 \sin 1'' \left(\dfrac{1}{\sin^2 a} - 60 \sin a\right)$. Cette variation s'annule pour $a = 14°$ environ. Elle croît ensuite très-rapidement pour de plus faibles hauteurs, et assez lentement pour les plus grandes. Elle atteint $1''$ pour les hauteurs $6° 20'$ et $90°$; elle est moindre que $0'',5$ pour les hauteurs comprises entre $9°$ et $36°$. — En ce qui concerne le second astre, la parallaxe étant toujours ou nulle ou très-faible, la variation de $(R_1 - p_1)$ est la même que celle de la réfraction R_1. Elle diminue à mesure que la hauteur augmente; et, dans la même hypothèse que ci-dessus, elle est inférieure à $0'',5$ pour toutes les hauteurs supérieures à $10°$.

— Dans un autre ordre d'idées, on doit, toutes choses égales d'ail

leurs, observer de préférence les distances dont les variations en 3^h sont les plus grandes. Car pour une même erreur commise sur Δ_v, on a alors une moindre erreur sur l'heure de Paris calculée. Mais c'est encore là une circonstance qu'on n'a qu'exceptionnellement à sa disposition. D'ailleurs, en bénéficiant du chef dont nous venons de parler, on s'expose souvent à perdre plus qu'on ne gagne, si la distance employée est désavantageuse sous d'autres rapports, dépendant des autres circonstances favorables sus-mentionnées.

— Pour résumer d'une manière pratique ce qui concerne l'ensemble de toutes les circonstances favorables au calcul des distances lunaires, nous dirons que l'*objectif fondamental* du navigateur doit être de réaliser les conditions qui permettent d'observer le plus exactement possible la distance elle-même.

Les autres circonstances sont d'ordinaire accessoires; et on ne doit en tenir compte qu'autant qu'elles peuvent s'associer naturellement à l'*objectif fondamental* que nous venons de spécifier.

N° 74. Remarques sur la détermination de l'heure de Paris correspondant à la distance vraie calculée. — Il importe d'éviter ou au moins de restreindre dans les bornes voulues, et conformément aux recommandations du n° 76, les diverses erreurs susceptibles de provenir, dans tout le cours du calcul de la longitude par les distances lunaires, de l'emploi de formules n'ayant pas une rigueur suffisante. Nous devons donc aussi préciser comment il convient de déterminer l'heure de Paris correspondant à la distance vraie calculée. — Soient :

D_0 et D_1	les distances de la *Connaissance des temps* qui comprennent la distance vraie Δ_v;
T_0	l'époque de Paris qui correspond à la distance D_0;
$(T_0 + t)$	l'époque *inconnue* rigoureuse de Paris, qui correspond à la distance Δ_v;
I	l'intervalle constant (3^h) des éphémérides;
(T + I)	l'époque de Paris qui correspond à la distance D_1.

On sait qu'en supposant d'abord que les distances varient proportionnellement au temps, il vient :

$$t' = \frac{I}{(D_1 - D_0)} (\Delta_v - D_0).$$

Cette valeur de t' ajoutée à T_0 donne $(T_0 + t')$, et représente *approximativement* l'époque cherchée, dont la valeur rigoureuse demeure $(T_0 + t)$. — La *Connaissance des temps* donne avec *quatre* décimales

et sous le titre « log $\frac{3^h}{\textit{différence}}$ », le logarithme de $\frac{1}{(D_1 - D_0)}$. Il suffit donc d'ajouter à ce nombre le log $(\Delta_v - D_0)$, pris avec la même approximation ; et l'on obtient log t'. On détermine ainsi t' à 2^s près au moins ; car t' est toujours moindre que 3^h ou 10800^s, et les logarithmes de 10800^s et de $10798^s (= 10800^s - 2^s)$, diffèrent de 0,0001. Cette approximation de 2^s, due à l'emploi de *quatre* décimales seulement, correspond à 30″ d'erreur sur la longitude, tout en ne produisant le même effet qu'une erreur de 1″ en moyenne sur la distance observée. La plupart des navigateurs acceptent cette erreur. Nous verrons au n° 76 jusqu'à quel point on doit la tolérer, eu égard à la précision qu'il est nécessaire, en de certaines circonstances, d'apporter dans la détermination de la longitude par les distances. — En tout état de cause, si l'on veut plus d'exactitude, il faudra prendre les divers logarithmes avec *cinq* décimales.

— La supposition des variations proportionnelles des distances et du temps, est de nature à entraîner sur l'heure de Paris des erreurs bien autrement considérables que celle que nous venons de signaler ; car elles vont jusqu'à 10^s sur l'heure de Paris pour les distances luni-solaires et à 55^s pour les autres. Il faut donc, en général, avoir égard aux *différences secondes* des éléments, ce que l'on fait très-aisément à l'aide de la *table* XI de la *Connaissance des temps*. — Nous croyons utile d'indiquer ici, d'après M. Mas Saint-Guiral, la construction de cette table, qui intrigue souvent les officiers qui y ont recours.

Prenons la formule d'interpolation bien connue :

$$y = u_0 + \frac{(x - x_0)}{I} d_1 u_0 + \frac{(x - x_0)}{I}\left(\frac{(x - x_0)}{I} - 1\right)\frac{d_2 u_0}{2},$$

dans laquelle, on représente par :

- I le même intervalle que ci-dessus;
- y une fonction déterminée de x;
- $d_1 u_0$ et $d_2 u_0$ les différences *premières* et *secondes*, auxquelles donnent lieu les valeurs particulières connues u_0, u_1 et u_2, que prend y pour les valeurs de x équidistantes : x_0, $x_0 + I$ et $x_0 + 2I$.

Suivant nos notations précédentes, posons : $y = \Delta_v$, $u_0 = D_0$, $x_0 = T_0$, et $x = (T_0 + t)$. Nous aurons :

$$\Delta_v = D_0 + \frac{t}{I} d_1 D_0 + \frac{1}{2}\frac{t}{I}\left(\frac{t}{I} - 1\right) d_2 D_0.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme :

$$t = \frac{1}{d_1 D_0}(D_1 - D_0) + \frac{1}{2} t \left(1 - \frac{t}{I}\right) \frac{d_2 D_0}{d_1 D_0}.$$

Le premier terme du second membre n'est autre que la valeur t' approchée de t, calculée ainsi qu'il a été expliqué ci-dessus. Désignons par t'' le deuxième terme de ce même membre, après y avoir fait d'ailleurs la substitution suffisamment exacte en général de t' à t. Nous aurons évidemment les relations que voici :

$$t = t' + t''; \quad t'' = \frac{1}{2} t' \left(1 - \frac{t'}{I}\right) \frac{d_2 D_0}{d_1 D_0}.$$

Tout cela compris, pour arriver à la construction de la *Table* en question, où se prend justement t'', appelons :

l_0 et l_1 les logarithmes consécutifs donnés par la *Connaissance des temps*, et relatifs aux quantités $\frac{3^h}{d_1 D_0}$ et $\frac{3^h}{d_1 D_1}$.

On aura :

$$l_0 = \log \frac{3^h}{d_1 D_0}; \quad \text{d'où} \quad d_1 D_0 = \frac{3^h}{10^{l_0}}; \quad \text{et de même :} \quad d_1 D_1 = \frac{3^h}{10^{l_1}}.$$

On conclut de là :

$$d_1 D_1 - d_1 D_0 = d_2 D_0 = 3^h \left(\frac{1}{10^{l_1}} - \frac{1}{10^{l_0}}\right);$$

$$\frac{d_2 D_0}{d_1 D_0} = 10^{l_0} \left(\frac{1}{10^{l_1}} - \frac{1}{10^{l_0}}\right) = 10^{l_0 - l_1} - 1.$$

Or la formule de Mac Laurin donne :

$$10^z = (10^z)_0 + \left(\frac{d\,10^z}{dz}\right)_0 z + \left(\frac{d^2 10^z}{dz^2}\right)_0 \frac{z^2}{2} + \ldots\ldots = 1 + \frac{z}{\log e} + \frac{z^2}{2\log^2 e} + \ldots\ldots$$

On a donc, en faisant $z = (l_0 - l_1)$:

$$\frac{d_2 D_0}{d_1 D_0} = \frac{(l_0 - l_1)}{\log e} + \frac{(l_0 - l_1)^2}{2 \log^2 e} + \ldots\ldots$$

et par suite

$$t'' = \frac{1}{2} t' \left(1 - \frac{t'}{I}\right) \left(\frac{(l_0 - l_1)}{\log e} + \frac{(l_0 - l_1)^2}{2 \log^2 e} + \ldots\ldots\right).$$

Le facteur $\frac{1}{2} t' \left(1 - \frac{t'}{I}\right)$ atteint son maximum lorsque $t' = \frac{I}{2}$ $= 1^h\, 30^m = 5.400^s$. D'ailleurs, $(l_0 - l_1)$ ne dépasse pas 0,0176. Dès

lors, la partie du deuxième membre provenant du second terme de la parenthèse est moindre que $1^s,2$. Mais si on tient compte de l'influence des autres termes après le second, et du manque de rigueur absolue de la valeur de départ de t'', on arrive à une erreur possible de $2^s,3$, en se contentant de poser :

$$t''=\frac{1}{2}t'\left(1-\frac{t'}{I}\right)\frac{(l_0-l_1)}{\log e}.$$

C'est néanmoins cette valeur que se borne à donner la susdite *Table* XI de la *Connaissance des temps*. Les arguments sont l'intervalle *approché* t', et la différence $(l_0 - l_1)$ des log $\frac{3^h}{\textit{différence}}$. D'ailleurs t'' est additif si les logarithmes décroissent, et soustractif s'ils augmentent. — La valeur de t'' étant la même pour les deux intervalles t' et $(I - t')$, on a pu réduire de moitié l'étendue verticale de la table.

Si le chiffre obtenu par le procédé précédent n'est pas regardé comme suffisamment exact, il faudra appliquer rigoureusement la méthode générale d'interpolation en tenant compte des différences secondes.

— A propos de la question que nous venons d'étudier en détail, il est encore intéressant de noter qu'on peut, dans des circonstances exceptionnelles, observer une très-bonne distance entre la Lune et un astre pour lequel les distances vraies ne se trouvent pas dans les éphémérides dont on dispose, ni même parfois dans aucune, comme pour le Soleil aux environs de la nouvelle Lune.

En pareille occurrence, l'observateur dresserait lui-même un petit tableau des distances vraies, borné au nombre strictement nécessaire de celles-ci. Ces distances s'obtiendraient à l'aide des déclinaisons des deux astres et de leurs différences d'ascension droite.

*** N° 75. Influence de l'aplatissement de la terre sur la réduction des distances lunaires. Divers moyens d'en tenir compte.** — Dans le passage de la distance apparente Δ_0 à la distance vraie Δ_v, toutes les formules sus-mentionnées supposen la Terre sphérique. Mais, eu égard à l'ellipticité plus ou moins approchée du Globe, la quantité Δ_v ainsi obtenue se trouve rapportée, non au centre de celui-ci, mais à un autre point indiqué ci-après, et dont la spécification exige quelques explications préliminaires.

Par suite de la faible distance de la Lune à la Terre, cette ellipticité

oblige, quand on considère notre satellite, à distinguer le rayon terrestre qui passe par l'observateur et va aboutir au centre de l'ellipsoïde, d'avec la normale à la surface du Globe passant par le même lieu que ledit rayon. Celui-ci, prolongé jusqu'à la voûte céleste, s'appelle la *verticale géocentrique* du lieu, et la normale en question, soit la verticale ordinaire, s'appelle la *verticale astronomique* ou *apparente*. Ces deux droites forment avec la ligne des pôles un même plan, qui n'est autre que le méridien. Leur angle s'appelle *angle à la verticale*. Il ne dépend que de la latitude considérée et de la fraction 1/300, qui représente l'aplatissement de la Terre ; en d'autres termes, il vaut approximativement $1/300 \, \frac{\sin 2L}{\sin 1''}$ en secondes. Il devient nul au pôle et à l'équateur ; et son maximum a lieu à très-peu près pour $L = 45°$, auquel cas il atteint 11′,5.

Ceci entendu, si, comme on le fait d'habitude, on s'est servi dans le calcul de distance de la parallaxe équatoriale Π de la Lune corrigée en raison de la *latitude* du lieu, le rayon terrestre correspondant à cette parallaxe sera égal à celui du lieu ; et le point auquel la distance Δ_v sera rapportée, se confondra sensiblement avec le point de la verticale *astronomique* le plus voisin du centre de la Terre, c'est-à-dire avec le *pied* de la perpendiculaire abaissée de ce centre sur ladite verticale. Ce fait établi, on calcule aisément que la différence entre la distance vraie géocentrique Δ'_v, que l'on devrait *réellement* employer pour trouver l'heure de Paris, et la distance Δ_v qu'on aura trouvée, ne dépassera jamais 12″. Cette limite ne serait d'ailleurs atteinte que dans les conditions très-particulières, où la latitude du lieu étant de 45°, et la Lune se trouvant dans le premier vertical, le plan d'observation de la distance couperait l'horizon suivant la ligne Nord et Sud. — La différence $(\Delta'_v - \Delta_v)$ est donc en général de quelques secondes. Cependant elle n'est pas à négliger en principe, eu égard aux recommandations du n° 76 pour le degré de précision avec lequel il est nécessaire en certains cas de se procurer la longitude par les distances.

Bien que jusqu'ici il n'ait pas été tenu compte à la mer de la différence en question, les motifs que nous venons d'exposer nous conduisent à en donner la valeur. Cette valeur peut être fournie par les diverses expressions indiquées ci-après. Nous commencerons par signaler la suivante proposée par M. Mas Saint-Guiral, et qui est presque identipne avec une formule de même but qu'on trouve citée

sans démonstration dans les ouvrages de Guépratte :

$$(\Delta'_v - \Delta_v) = -\alpha\Pi \sin 2L \cos Z \cos a' \operatorname{cotg} \Delta_v + \alpha\Pi \sin 2L \frac{\cos Z_1 \cos b'}{\sin \Delta_v}.$$

Dans cette formule, les différentes lettres employées ont les significations suivantes :

L latitude du lieu;

α aplatissement de la Terre $= \frac{1}{300}$:

Π parallaxe horizontale de la Lune relative au lieu de l'observation; Π_0 étant la parallaxe horizontale équatoriale de la Lune, on a : $\Pi = \Pi_0(1 - \alpha \sin^2 L) = \Pi_0 - \Pi_0\alpha \sin^2 L$; toutes les tables nautiques donnent la correction pour passer de Π_0 à Π;

Z et a' azimut et hauteur vraie de la Lune;

Z_1 et b' azimut et hauteur vraie du second astre.

Il faut du reste, dans la mise en nombres de la relation ci-dessus, compter les angles Z et Z_1 à partir du pôle élevé, et avoir égard aux signes des lignes trigonométriques. Heureusement que deux ou trois décimales suffisent dans les logarithmes, ce qui permet, somme toute, de calculer assez rapidement la correction en vue.

— Dans son *Traité d'astronomie sphérique*, Brünnow tient compte d'une autre façon de l'aplatissement de la Terre. Il trouve pour la correction cherchée :

$$(\Delta'_v - \Delta_v) = -\rho \frac{\Pi_0 \cos b' \sin Z \sin (Z - Z_1)}{\sin \Delta_v} \sin V.$$

Dans cette formule :

les lettres b', Z, Z_1 et Δ_v conservent la même signification que ci-dessus; mais b' se calcule ici avec la parallaxe en hauteur *complète*, définie ci-après ; de leur côté, les azimuts Z et Z_1 se comptent comme en astronomie de 0° à 360°, toujours à partir du S[d] en allant vers l'O[t], quel que soit d'ailleurs l'hémisphère où on se trouve;

ρ est la longueur du rayon qui va du lieu de l'observateur au centre de la Terre, cette longueur étant évaluée en fonction du rayon de l'équateur;

Π_0 représente la parallaxe horizontale *équatoriale* de la Lune;

V vaut l'angle à la verticale, considéré comme *positif* ou négatif suivant que la latitude est *Nord* ou Sud.

Si l'on remarque que ρ est égal à $(1 - \alpha \sin^2 L)$, α étant, comme plus haut, la valeur de l'*aplatissement*, on voit que $\rho\Pi_0$ n'est autre chose que la parallaxe horizontale Π de la Lune relative au *lieu* de l'observation. D'autre part, d'après la valeur donnée ci-dessus pour l'angle V, on a $\sin V = \alpha \sin 2L$. Dès lors, la correction précédente peut s'écrire :

$$(\Delta'_v - \Delta_v) = -\alpha\Pi \sin 2L \frac{\cos b' \sin Z \sin (Z - Z_1)}{\sin \Delta_v}.$$

Il importe d'ajouter que, pour avoir le droit de calculer par cette formule la correction relative à l'aplatissement, il faut employer, dans la correction de la hauteur de la Lune, la parallaxe en hauteur *com-*

plète, c'est-à-dire la parallaxe nécessaire pour ramener la hauteur du lieu de l'observation à l'horizon mené par le centre même de la Terre, perpendiculairement à la verticale *géocentrique;* tandis que dans la méthode précédente la hauteur est ramenée à l'horizon perpendiculaire à la verticale *astronomique*, et passant par le point de cette verticale le plus voisin du centre de la Terre, et auquel se trouve alors rapportée la distance vraie fournie par le calcul. — La parallaxe *complète* dont il s'agit présentement, est donnée avec une exactitude suffisante par l'expression $\Pi \cos (a + V \cos Z)$, a représentant la hauteur apparente de la Lune.

Dans le procédé de Brünnow qui nous occupe, les deux astres se trouvent, après le calcul de réduction, ramenés au centre de la Terre en ce qui concerne les *hauteurs*. Mais ils ne le sont pas au point de vue de la distance vraie elle-même; car la valeur de cette distance, déduite de la distance apparente, forme le troisième côté d'un triangle dont les deux autres sont les verticaux astronomiques des deux astres passant par *le lieu de l'observateur;* tandis que la *véritable* valeur forme le troisième côté d'un triangle dont les deux autres côtés sont les verticaux astronomiques des deux astres passant par *le centre de la Terre*, c'est-à-dire passant par la verticale astronomique transportée parallèlement à elle-même en ce centre. — Relativement au second astre, son éloignement d'avec la Terre est toujours suffisant pour que le vertical astronomique du lieu de l'observateur soit parallèle à celui du centre de la Terre. Mais, en ce qui concerne la Lune, les deux verticaux en question font un certain angle, qu'on appelle *parallaxe d'azimut*, et dont la valeur s'obtient à l'aide de la hauteur apparente de l'astre, de son azimut, de sa parallaxe horizontale par rapport au lieu, et enfin de l'angle à la verticale. Dès lors, concevons que, dans le triangle A'ZB', *fig.* 20 du n° 71, on déplace dans le sens voulu, par une rotation autour du point Z comme centre, le vertical de la Lune d'une quantité égale à la *parallaxe d'azimut*. Imaginons, en second lieu, par la pensée, que sur le vertical ainsi déplacé on prenne $ZA'' = ZA'$, et qu'on joigne B'A''. Il est évident que ce dernier arc représentera la *véritable* valeur Δ'_v de la distance vraie; et que, pour le déterminer, on connaîtra, dans le triangle A''ZB', les deux côtés ZB' et ZA'' et l'angle compris, ce dernier pouvant évidemment se déduire des azimuts Z et Z_1 des deux astres pour le lieu de l'observateur, combinés avec la parallaxe d'azimut. — C'est en suivant la marche précédente, en prenant d'ailleurs pour

inconnue $(\Delta'_v - \Delta_v)$, et en développant de façon à négliger les termes d'ordre supérieur, que Brünnow parvient à sa formule.

— La manière d'arriver à la relation de M. Mas Saint-Guiral, citée la première, se présente moins naturellement ; car la distance réduite Δ_v se trouve rapportée à un point situé sur la *verticale astronomique du lieu* ; et il s'agit de transporter cette distance de ce point au centre de la Terre.

Le second astre peut encore ici être considéré comme ramené à ce centre. Mais, pour la Lune, il y a d'abord à introduire sa parallaxe en azimut, de même que plus haut, ce qui modifie l'angle z du triangle AZ'B' de la *fig.* 20. De plus, il faut faire entrer en ligne de compte la parallaxe *spéciale* due à l'écartement entre le point susmentionné et le centre de la Terre, et qui influence à la fois la parallaxe en azimut et la distance zénithale ZA'.

— La recherche de $(\Delta'_v - \Delta_v)$ par l'un ou l'autre mode précédent, ne laisse pas que d'offrir un certain degré de complexité. D'ailleurs, la formule finale renferme, dans l'un et l'autre cas, les azimuts des deux astres, qui ne sont pas des éléments se présentant naturellement dans la réduction des distances, et qu'il faut dès lors observer ou calculer approximativement. On est donc conduit à chercher une méthode de *correction de l'aplatissement* qui soit exempte de ces inconvénients.

Il y a moyen d'y parvenir en commençant par ramener la hauteur de la Lune à l'horizon du *point* de la verticale astronomique du lieu qui coupe la ligne des pôles. Il faut, à cet effet, calculer une première parallaxe horizontale *ad hoc* Π_1, correspondant à la portion du rayon terrestre du lieu comprise entre ledit point et la surface du globe. Le triangle rectiligne formé par les intersections des verticales astronomique et géocentrique du lieu avec l'axe des pôles, donne d'une manière évidente la valeur Π_1 de ladite parallaxe. Cette valeur exprimée en fonction de la parallaxe *horizontale* ordinaire du lieu Π est :

$$\Pi_1 = \Pi \times \frac{\cos(L - V)}{\cos L};$$

d'où l'on tire, en introduisant la parallaxe horizontale *équatoriale* Π_0 :

$$\Pi_1 = \Pi_0 \times (1 - \alpha \sin^2 L) \frac{\cos(L - V)}{\cos L} = \Pi_0 - \Pi_0 \alpha \sin^2 L + \Pi_0 V \sin 1'' \operatorname{tg} L = \Pi_0 + \Pi_0 \alpha \sin^2 L.$$

La quantité Π_1 s'obtiendra donc avec la plus grande facilité, en fai-

sant subir à la parallaxe horizontale *équatoriale* de la Lune, la correction habituelle pour tenir compte de la latitude, mais en *ajoutant* cette fois ladite correction, au lieu de la *retrancher*.

La distance Δ'_v obtenue avec la hauteur de la Lune ainsi corrigée, se trouve alors rapportée au même point sus-mentionné de la verticale astronomique que cette hauteur; et il n'y a plus qu'à la transporter de ce point au centre de la Terre. — Or le transport s'effectue ici tout simplement; car il suffit de considérer présentement les cercles de déclinaison des deux astres, c'est-à-dire de remplacer le triangle A'ZB' de la *fig.* 20 par un triangle A'PB', dont nous laissons le tracé au soin du lecteur. Dans ce triangle, l'angle au sommet P ne varie pas; PB' ne change pas non plus. Il n'y a que PA' qui se modifie et devient une certaine longueur PA'', après qu'on l'a corrigée d'une deuxième parallaxe *ad hoc* correspondant à l'écartement entre le centre de la Terre et le point auquel est rapportée la distance réduite Δ_v, écartement qui se trouve contenu dans le plan du cercle de déclinaison PA'. — En suivant cette voie, on parvient à la formule :

$$\left(\Delta'_v - \Delta_v\right) = 2a\Pi_0 \sin L\left(\frac{\sin D\odot}{\sin \Delta_v} - \frac{\sin D☾}{\operatorname{tg} \Delta_v}\right),$$

D⊙ et D☾ étant les déclinaisons des deux astres considérées avec les signes qui leur conviennent, eu égard à leurs noms comparés à celui de la latitude, suivant les conventions de la légende page 1.

Cette formule n'est pas aussi courte que celle de Brünnow, ni plus simple que celle de M. Mas Saint-Guiral. — Son avantage fondamental consiste en ce qu'elle évite l'usage des azimuts, et qu'elle se sert d'éléments déjà employés dans le calcul de réduction de la distance observée.

N° 76. De l'exactitude à apporter dans le calcul de la réduction des distances lunaires. — Nous commencerons par bien spécifier que nous n'entendons pas absorber ici toute l'attention des navigateurs, dans l'usage des distances lunaires, par la question *Calcul;* et il demeure convenu que c'est la réduction à leur minimum des *erreurs sur l'observation des distances mêmes*, qui devra rester leur principale préoccupation. En d'autres termes, le point que nous allons traiter n'a qu'une importance *relative*, mais qui a néanmoins sa valeur et doit être bien comprise.

L'exactitude à apporter dans le calcul des distances porte, d'un côté, sur le degré acceptable d'abréviation des formules employées, et, en second lieu, sur le degré acceptable d'approximation des opé-

rations. Nous avons déjà envisagé cette importante question d'une manière générale au n° 33. Mais il importe de la reprendre au point de vue particulier des distances lunaires.

Contrairement à une opinion courante et même professée, il faut bien se garder de croire que les deux degrés en question doivent donner le résultat qui les concerne, seulement avec une approximation de même ordre que les écarts provenant des erreurs mêmes d'observation. Nous avons, au contraire, précisé audit n° 33 qu'il faut commencer par bien se rendre compte de *l'approximation totale*, avec laquelle on se propose d'obtenir le résultat définitif. Cela fait, on défalque de cette approximation la part afférente aux erreurs d'observation dans les circonstances les plus défavorables, où il est encore cependant licite d'observer. Le reste doit alors être réparti entre l'abréviation des formules et l'approximation à apporter dans les opérations. — Avec les distances lunaires, la marge qui reste pour ces deux dernières parts est bien faible, en raison de ce que, quel que soit le moment où l'on prend les distances, les erreurs d'observation se trouvent multipliées en moyenne par 30 sur la longitude, qui est le résultat définitif cherché. Or, dans certains cas, comme celui où l'on se propose (n°s 158 et 159) de retrouver, après perturbations, l'état absolu d'un chronomètre à l'aide de distances lunaires, on doit viser à la dernière rigueur. Nous conclurons de là que, au moins pour le cas spécial dont il s'agit et qui tend à devenir le seul où l'emploi des distances lunaires sera utilisé, il faut se conformer aux prescriptions suivantes :

1° Les formules abréviatives susceptibles d'être employées pour lesdites distances, ne doivent pas donner, du chef de l'abréviation, plus de 2″ à 3″ d'erreur. C'est ce qui explique, entre autres, pourquoi, dans la méthode du n° 71, on a poussé les développements jusqu'aux termes du second ordre, afin de réaliser un semblable objectif.

2° Le degré d'approximation à apporter dans les calculs, tant pour l'évaluation des éléments que pour le nombre de décimales avec lequel il y a lieu de prendre les logarithmes, doit être du même ordre que le degré d'abréviation des formules. — Ainsi, pour toutes les méthodes, il faut calculer avec la dernière rigueur les *corrections* pour passer des hauteurs apparentes aux hauteurs vraies, les premières de ces hauteurs n'ayant au contraire besoin d'être connues qu'à la minute. A cet effet, on tient compte pour la réfraction des indications du baromètre et du thermomètre ; de leur côté, les demi-dia-

mètres *réfractés* se calculent avec soin; puis on emploie la parallaxe horizontale de la Lune pour la latitude même du lieu. Enfin, il est nécessaire (n° 73) de déterminer avec une grande précision l'*accourcissement* des demi-diamètres, pour passer de la distance observée des bords à la distance apparente des centres. — En ce qui concerne le nombre de décimales avec lequel il convient de prendre les logarithmes, cela dépend de l'espèce des formules à employer. Avec la méthode de Borda, par exemple, il faut se servir de toutes les décimales de la table, d'un bout à l'autre des opérations. Avec la méthode du n° 71, au contraire, le calcul logarithmique n'exige que 5 décimales, pour obtenir un résultat même plus rigoureux. — Au point de vue dont nous nous occupons, l'heure de Paris ($T_0 + t' + t''$) correspondant à la distance, doit, de son côté, être calculée en tenant compte du terme en t'', qui représente la correction due aux différences secondes, comme il a été dit au n° 74. Mais, de plus, il faudra, pour être tout à fait rigoureux, déterminer t' en employant cinq décimales. — Enfin, en principe, il sera bon de faire subir à la distance calculée la correction afférente à l'influence de l'aplatissement de la Terre (n° 75), surtout si l'on se trouve aux environs des circonstances où cette correction approche de son maximum.

N° 77. Précautions à prendre pour l'observation et le calcul des distances lunaires. Substitution à ces distances de l'ascension droite de la Lune pour la recherche de la longitude à la mer. — Il nous reste à exposer la manière dont les observations doivent être conduites pour en tirer le meilleur parti possible.

Si on se reporte au n° 178, on voit d'abord que, pour prendre les distances elles-mêmes, il faut employer le cercle de préférence au sextant. En second lieu, d'après le numéro précédent, chaque observation doit être faite avec toute l'exactitude possible. Il ne faut rien négliger de ce qui peut éviter une erreur, si faible qu'elle soit; car c'est seulement grâce à cette précision et aux autres précautions indiquées ci-après, qu'on peut parvenir à déterminer la longitude, sans dépasser 8′ à 10′ d'erreur, comme il a été avancé au n° 68, et ainsi que cela est nécessaire en particulier (n° 76) pour rectifier l'état absolu d'un chronomètre après perturbations.

Afin d'arriver à ladite précision, il conviendra de prendre, sans interruption, 10 à 12 séries de distances. De plus, on observera, autant que possible, la hauteur du Soleil immédiatement avant ou

après l'observation des distances. Si l'on peut choisir son moment, on fera en sorte que cette hauteur soit prise dans les circonstances favorables, afin de déterminer très-exactement du même coup l'heure temps moyen du bord correspondant à cette hauteur, et par suite à chacune des séries de distances. On calculera, à l'aide de cette heure, les hauteurs des deux astres correspondant à la première série, à la série intermédiaire et à la dernière. Il suffit d'avoir ces hauteurs à la minute. Mais il importe, comme nous l'avons expliqué au n° 76, de calculer *avec la dernière exactitude* les *différences* entre les hauteurs vraies et les hauteurs apparentes, ainsi que les *accourcissements* des deux demi-diamètres pour passer de la distance observée des bords à la distance apparente des centres.

On aura donc ainsi trois hauteurs apparentes du centre pour chaque astre et les corrections correspondantes, et par ailleurs les distances apparentes des centres qui s'y rapportent. On fera simultanément, avec ces éléments, la réduction des trois distances spécifiées ; et on en déduira trois longitudes, en suivant d'ailleurs les indications du n° 74 pour le calcul des heures de Paris. Cette opération terminée, on réduira par *interpolation* en distances vraies les séries non calculées, en partant des trois séries qui ont fourni directement des longitudes, et en ayant au surplus égard aux différences secondes. On tirera de là autant de nouvelles longitudes.—Cela fait, on verra, d'après le *criterium* de Chauvenet (n° 124), celles de toutes les séries sans exception qui doivent être rejetées comme donnant des longitudes douteuses. Si c'est une des séries fondamentales qui est ainsi atteinte, il faudra recommencer tous les calculs qui dépendent de cette série, à moins que celle des différences secondes sus-mentionnées y afférente ne doive se trouver que très-peu affectée, ce qui peut s'apprécier à première vue. En tout état de cause, on prendra la moyenne des longitudes conservées comme bonnes, ce qui donnera une longitude unique, correspondant à la moyenne des heures au compteur propres aux distances conservées. Au besoin, on corrigera cette longitude de l'influence de l'aplatissement de la Terre (n° 75), en se bornant pour cela à mesurer l'effet en question sur une des trois distances calculées.

Le calcul des hauteurs allonge un peu l'opération. Cependant cette manière de faire est préférable à leur observation directe, parce que la personne qui prend les distances n'a pas à se préoccuper d'autre chose ; et la précision de celles-ci en bénéficie.

C'est conformément aux indications précédentes qu'a été établi le

TYPE DE CALCUL N° 8 de la fin du texte, déjà mentionné au n° 71.

— Pour compléter les recommandations qui font l'objet de ce numéro, il importe d'ajouter la remarque suivante :

L'effet des erreurs *constantes* susceptibles d'être commises dans l'observation des distances, peut être annulé en employant deux étoiles, l'une à l'*Orient*, l'autre à l'*Occident* de la Lune, à peu près également écartées de celle-ci. Car, en pareil cas, les deux distances, qui sont alors de noms contraires, sont erronées de quantités semblablement de noms contraires, et d'ailleurs à peu près égales. Il en est alors de même des erreurs dont se trouvent affectées les deux heures de Paris correspondant aux distances ; de telle sorte que la moyenne de ces heures se trouve bonne. — Un autre procédé du même genre est recommandé par certains navigateurs pour s'affranchir des erreurs constantes d'observation. Il consiste à prendre la distance d'une étoile au bord éclairé de la Lune la nuit où celle-ci va être pleine, et à observer la même nuit, ou sinon le lendemain, une nouvelle distance entre la même étoile et le nouveau bord éclairé de la lune. — Quant aux erreurs *constantes* dont il s'agit, elles peuvent provenir, avec le cercle comme avec le sextant, de la totalité ou d'une partie des erreurs *systématiques* (n° 180).

A propos du point que nous venons de traiter, il convient de mettre en garde les officiers contre une *hérésie* qui a cours, et qui tire son origine d'un ouvrage classique, où on l'a vue figurer dans plusieurs éditions successives. C'est la croyance qu'on peut annuler les erreurs dues aux tables lunaires elles-mêmes, en observant la distance de la Lune à un astre dans l'Est, puis à un autre dans l'Ouest à peu près également écarté, c'est-à-dire en opérant suivant le mode indiqué ci-dessus. — Cette hérésie devient manifeste, si on réfléchit que les erreurs des tables lunaires affectent la détermination de l'heure de Paris, de la même manière que le feraient, avec une *Connaissance des temps* rigoureuse, des erreurs d'observation qui changeraient de signe suivant qu'on aurait observé dans l'Est ou dans l'Ouest. Mais, d'après ce qui précède, pour que des observations de côtés différents puissent se corriger, il faut qu'elles soient toutes deux trop grandes ou toutes deux trop petites.

— L'observation des distances lunaires étant naturellement difficile, et d'autant plus inexacte que les marins s'y exercent fort peu aujourd'hui, on a proposé, il y a déjà longtemps, de substituer à ces distances, pour la recherche de la longitude à la mer, la détermina-

tion de l'ascension droite de la Lune. Cette détermination ne dépend, en effet, que de l'observation de hauteurs. Or les navigateurs étant familiarisés avec cette sorte d'observations, peuvent, dans des circonstances exceptionnelles de beau temps, prendre des hauteurs simultanées de Lune et de Soleil avec une exactitude assez grande pour en déduire une bonne ascension droite de la Lune, et par suite une bonne heure de Paris correspondante.

Avec ce mode d'opérer, l'erreur en longitude vaut, comme pour les distances, 30 fois en moyenne l'erreur commise sur l'ascension droite précitée. Or à cause de la relation bien connue $\frac{dP \text{ ou } d\text{Æ}}{dH} = -\frac{1}{\cos L \sin Z}$, la dernière erreur surpassera toujours celle de la hauteur de la Lune. On voit donc avec quelle circonspection il faut préconiser le procédé dont il s'agit. — Sous cette réserve, exposons rapidement en quoi il consiste :

On prend, avec le plus de précision possible, des hauteurs de Lune et de Soleil; et on note les heures correspondantes du compteur. On déduit des observations une ou plusieurs hauteurs moyennes simultanées des deux astres. Avec l'heure du chronomètre relative à chaque groupe de hauteurs moyennes simultanées, on se procure une heure de Paris plus ou moins exacte. Cette dernière heure sert à calculer la déclinaison du Soleil, l'équation du temps et l'ascension droite moyenne, puis la déclinaison de la Lune. — La latitude du bord étant supposée exactement connue, comme provenant d'une hauteur méridienne prise dans la même journée, on déduit des triangles de position les angles horaires du Soleil et de la Lune. Avec les premiers de ces angles horaires, on se procure l'heure moyenne du bord, puis l'heure sidérale par la relation $T_s = T_m + \text{Æ}_m$. Au moyen de l'angle horaire de la Lune, on obtient ensuite $T_☾$, et par suite il vient $\text{Æ}_☾ = T_s - T_☾$. — Connaissant $\text{Æ}_☾$ pour le moment des hauteurs simultanées des deux astres, on trouve, à l'aide de la *Connaissance des temps*, l'heure de Paris correspondante $T_{p,m}$. Si cette heure $T_{p,m}$ est notablement différente de celle qui a servi à déterminer les éléments précités introduits dans le calcul, on recommence celui-ci avec ladite heure $T_{p,m}$. On arrive finalement ainsi à une bonne heure de Paris, qui, combinée à l'heure moyenne T_m du lieu, donne la longitude de l'observateur.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

DEUXIÈME PARTIE.

DESCRIPTION, THÉORIE ET USAGE PERFECTIONNÉ DES CHRONOMÈTRES.

AVANT-PROPOS.

Nous nous trouvons ici, au moins en ce qui concerne l'*usage rationnel* des chronomètres, en présence d'une question presque aussi controversée que celle des méthodes à employer pour la recherche des droites de hauteur et du point complet à la mer, et que nous avons traitée dans notre première partie.

Chose singulière, les malentendus jouent encore cette fois le principal rôle dans la discussion, en sorte que la seule manière d'élucider celle-ci est de commencer par mettre en relief la position de la question. Or l'examen attentif de ce qui concerne les chronomètres conduit à subdiviser le problème comme voici :

1° *Étude du mécanisme des chronomètres.*

2° *Variations normales des marches des chronomètres, et variations anormales ou perturbations.*

3° *Formules de marche des chronomètres.*

4° *Notions sur la théorie des erreurs d'observation ; et méthodes pour calculer les constantes de toute formule représentant un phénomène physique quelconque.*

5° *Régulation des chronomètres; graphiques de marche. Installation et service des chronomètres.*

6° *Emploi des chronomètres à la mer.*

— Avant d'entrer dans le vif de la question, nous donnerons le dessin d'un *chronomètre démonstratif* et sa légende explicative.

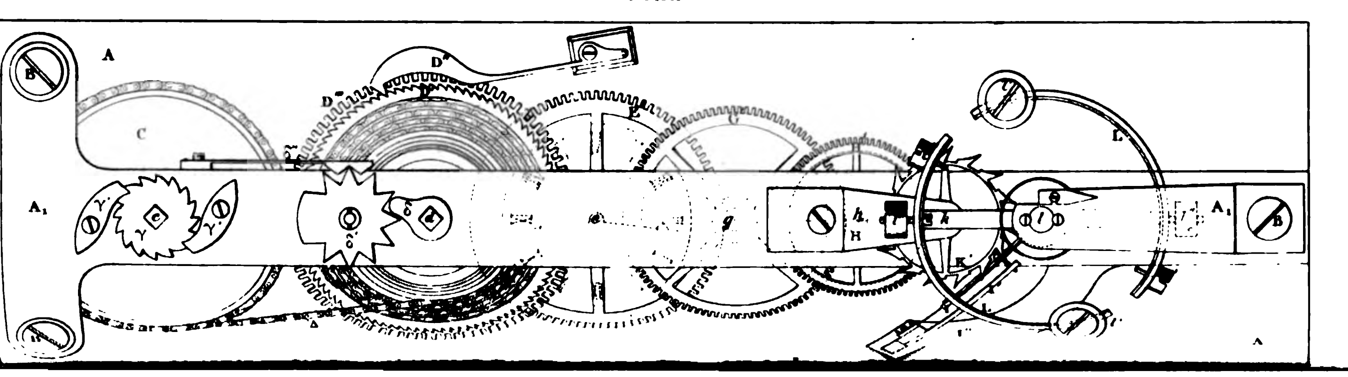
Ce mode de procéder est justifié par la considération que le dessin dont il s'agit, au lieu d'être afférent à un numéro particulier, concerne l'ensemble du paragraphe premier de cette 2e PARTIE.



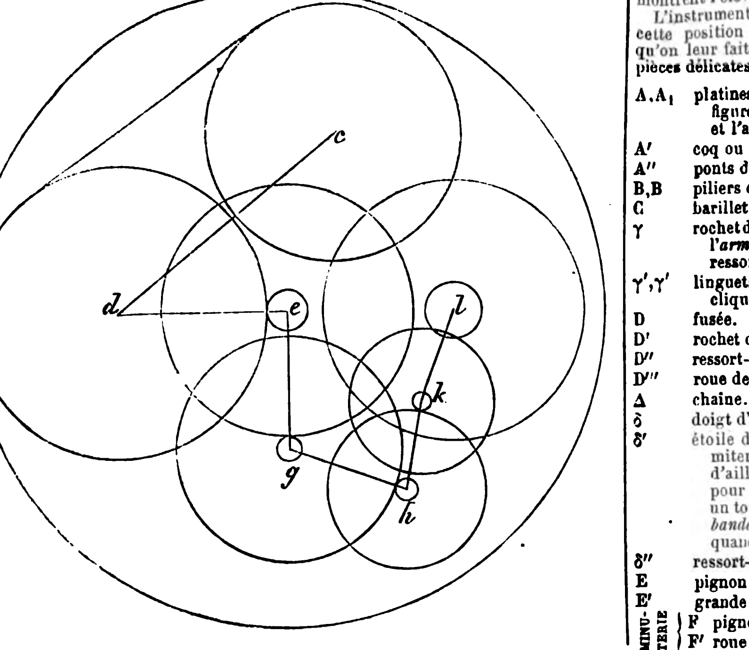
Fig. 21. *Chronomètre démonstratif* (Echelle - $\frac{3}{4}$)

Elévation

Plan



... chronomètre démonstratif, dans les positions respectives qu'elles occupent en réalité.
(Échelle de la fig. 21.)



... dans le plan de deux d'entre eux, avec leurs distances respectives conservées. En d'autres termes, les différents côtés de la ligne brisée *cdeghkl*, *fig.* 21 *bis*, formée en joignant, par des bouts de droite les projections desdits axes sur un même plan perpendiculaire à leur direction commune, ont été mis sur un seul et même alignement, tel que le montrent l'élévation et le plan de la *fig.* 21.

L'instrument est d'ailleurs vu *renversé*, c'est-à-dire avec le **cadran en bas**. C'est dans cette position qu'on remonte chaque jour les chronomètres. C'est pareillement ainsi qu'on leur fait subir l'opération du *réglage* (nº 97) avant leur mise en service; car les pièces délicates d'où dépend cette opération se trouvent de la sorte en dessus.

A, A_1	platines. Celle A du dessous sur la figure, s'appelle grande platine; et l'autre A_1, petite platine.
A′	coq ou pont du balancier.
A″	ponts de roue d'échappement.
B,B	piliers ou colonnes des platines.
C	barillet du grand ressort.
γ	rochet de barillet, servant à donner l'*armure voulue* (nº 80) au grand ressort.
γ′, γ′	linguets du rochet précédent, ou cliquets de barillet.
D	fusée.
D′	rochet de fusée, ou grand rochet.
D″	ressort-cliquet de fusée.
D‴	roue de fusée.
Δ	chaine.
δ	doigt d'arrêt.
δ′	étoile d'arrêtage. Son but est de limiter le remontage, de façon d'ailleurs qu'il reste encore, pour les motifs expliqués au nº 80, un tour et demi à deux tours de *bandage de ressort non utilisés* quand l'arrêt se produit.
δ″	ressort-cliquet d'arrêtage.
E	pignon de centre.
E′	grande moyenne ou roue de centre.
MINUTERIE F	pignon de chaussée.
MINUTERIE F′	roue de renvoi.
MINUTERIE f	pignon de renvoi.
MINUTERIE f′	roue d'heures.
MINUTERIE φ	aiguille des heures.
MINUTERIE φ′	aiguille des minutes.
φ″	aiguille des secondes.
G	pignon de petite moyenne.
G′	roue de petite moyenne.
H	pignon de secondes.
H′	roue de secondes.
K	pignon d'échappement.
K′	roue d'échappement.
l	détente à ressort.
l′	pont de détente, portant la vis de repos.
l″	pont de support de la détente.
i	rouleau du balancier, portant la *petite levée* ou doigt de dégagement, en rubis. Sa fonction est de soulever la détente, pour laisser *échapper* la roue K′.
i′	plateau du balancier, portant la *grande levée* en rubis, contre laquelle viennent battre les dents de l'échappement.
L	balancier, avec ses masses compensatrices ou de compensation l′, ses masses régulatrices ou écrous de réglage l″, et ses vis supplémentaires de réglage l‴.
M	spiral cylindrique.

On trouvera dans le cours du texte, du nº 78 au nº 84, toutes les explications voulues sur le rôle et le fonctionnement des diverses pièces dont nous venons de donner la nomenclature.

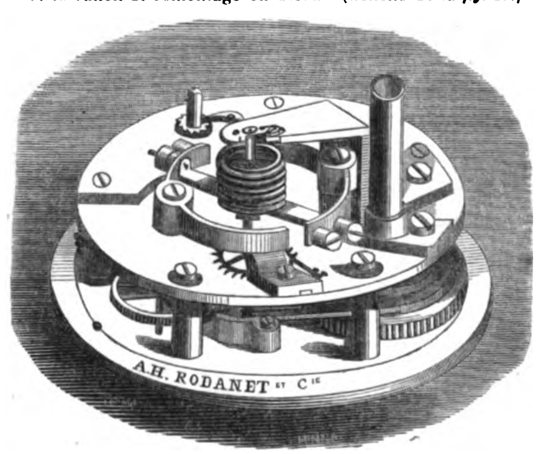
On remarquera que le balancier et l'échappement forment, sur notre modèle, un système tout à fait à part du reste du mécanisme. Cette disposition, qui est en général adoptée par les bons fabricants, offre l'avantage de mettre ainsi bien en vue les différentes pièces de l'échappement, afin que l'artiste puisse en examiner les fonctions pendant les diverses périodes du *réglage*. — Cependant dans les chronomètres anglais, tout le mécanisme de l'échappement se trouve, par rapport à la petite platine, du côté opposé au balancier. Cette pratique, due à la routine, offre l'inconvénient de tenir caché le jeu de l'échappement, qu'il y a cependant tout avantage à rendre aussi visible que possible pour l'examen de son fonctionnement.

Il nous reste à dire que l'ensemble du chronomètre, avec, bien entendu, les pièces ramenées dans leurs positions réelles, comme le montre la *fig.* 21 *bis*, est renfermé de toutes parts dans une boite en cuivre, avec verre du côté du cadran. Cette boite est destinée à empêcher la poussière de pénétrer dans les rouages. Elle porte dans son fond un trou pour le passage de la clef de remontage. Ce trou se ferme à volonté par un diaphragme. Souvent aussi, il forme en outre le débouché d'un canon enveloppant le carré de l'arbre de fusée, comme le montre la *fig.* 22. — En tout état de cause, la boite en question sert d'attache à la suspension à la Cardan, qui supporte l'instrument à l'intérieur d'une solide caisse carrée en bois de chêne ou d'acajou, formant la dernière enveloppe du système. Un stopeur, placé dans un des angles de la caisse, permet de fixer la suspension, et par suite le chronomètre, pour tout transport de l'instrument.

2e PARTIE. — § I. ÉTUDE DU MÉCANISME DES CHRONOMÈTRES.

N° 78. Description d'ensemble d'un chronomètre. Son prix. — La *fig.* 21, page 169, représente un chronomètre marin démonstratif, où on a ramené *fictivement* tous les axes de rotation des diverses pièces de mécanisme, qui sont, du reste, parallèles entre eux, à se trouver dans un même plan, de façon à mettre toutes ces pièces en une parfaite évidence, sans rien modifier, par ailleurs, à leurs corrélations. En un mot, le chronomètre démonstratif a été obtenu en alignant sur une même droite les différentes parties de la ligne brisée *cdeghkl*, *fig.* 21 *bis*, formée en joignant les projections des centres de tous les axes du mécanisme sur un même plan perpendiculaire à leur direction commune, ce développement s'effectuant sans rien changer aux longueurs respectives desdites parties, et par suite aux distances respectives des axes. — Pour compléter la représentation graphique d'un chronomètre, nous donnons en *fig.* 22 ci-contre, la perspective de l'instrument, tel qu'il existe en réalité, étant sorti de la boîte en cuivre qui renferme tout le mécanisme.

Fig. 22. Perspective d'un chronomètre, avec le cadran en dessous et le canon de remontage en dessus. (Échelle de la *fig.* 21.)

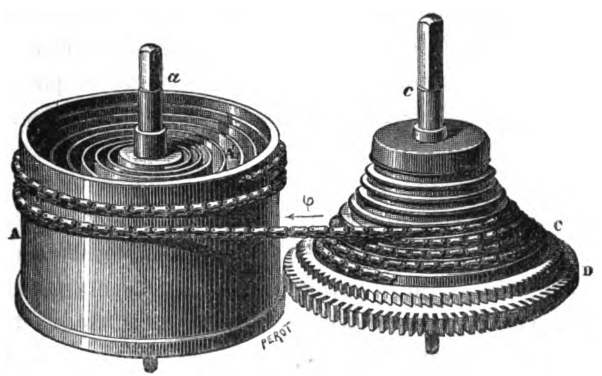


Comme nous l'avons dit dans la légende de la page précédente, les chronomètres sont logés à l'intérieur d'une caisse en bois de chêne ou d'acajou, à laquelle ils sont reliés par une suspension à la Cardan.

— Ladite légende, qui accompagne la *fig.* 21, donne la nomenclature exacte de toutes les pièces. Il faut maintenant résumer rapidement le fonctionnement de celles-ci.

Dans toutes les montres, le moteur est un *grand ressort* formé d'une lame d'acier mince A′, *fig.* 23, et très-longue, qui a été travaillée de manière à s'enrouler d'elle-même en spirale, sans du

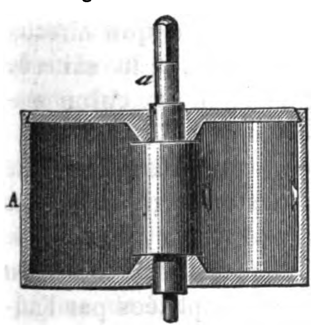

Fig. 23. Barillet et fusée de chronomètre vus en perspective. (Échelle de la fig. 21.)



reste être trop trempée, et par suite trop fragile. L'extrémité intérieure du ressort est tenue par un crochet faisant corps avec une partie renflée d'un *arbre* fixe *a*; et son extrémité extérieure est pareillement accrochée à la surface interne d'un tambour en métal A, appelé *barillet*, qu'on voit dessiné à part en *fig.* 24. Le barillet est fermé par un fond et un couvercle concentriques audit arbre *a*, et est installé pour tourner autour de celui-ci. — Le grand ressort, après avoir été tendu par le montage, revient lentement à sa forme normale, en faisant tourner le barillet autour de son axe. Le barillet transmet le mouvement de rotation précédent à tout un système d'engrenages, qui forme le *rouage*.

Dans les chronomètres, la transmission s'opère au moyen d'une chaîne, *fig.* 23, formée d'une suite de maillons goupillés entre eux, le tout combiné de façon à former un ruban métallique aussi souple que possible. Ladite chaîne a l'une de ses extrémités fixée au pourtour du barillet A par un crochet en patte d'ancre formant le dernier maillon de l'extrémité considérée, et s'incrustant dans ledit pourtour. Puis, elle est enroulée sur une sorte de tronc de cône C de forme particulière (n° 86), appelé *fusée;* et elle va s'attacher à la grande base de cette pièce par un œil appartenant au dernier maillon de la deuxième extrémité, et qui vient se capeler

Fig. 24. Vue intérieure d'un barillet de chronomètre, coupé par un plan conduit suivant son axe. (Échelle de la fig. 21.)



sur un tenon implanté dans ladite base parallèlement à l'axe de la fusée. Ce dernier mode d'attache, qui diffère entièrement du mode précédent, et ce mode précédent lui-même, ont leurs raisons d'être expliquées par ce qui suit. — Quant à la fusée, elle est portée par un axe *c*; et sa surface offre une série de gradins formant une courbe rampante, qui soutient la chaîne.

Lorsque le chronomètre est EN HAUT DE REMONTAGE (n° 80), la chaîne se trouve en très-grande partie, mais non en totalité, sur la fusée. Elle demeure enroulée de 1/4 de tour sur le barillet; de cette façon, le bec d'ancre sus-mentionné demeure bien accroché à cette pièce. Mais, EN BAS DE REMONTAGE, la chaîne se trouve totalement déroulée de dessus la fusée. Cette dernière circonstance justifie la nécessité de relier la chaîne à la fusée suivant la disposition expliquée plus haut. — Quoi qu'il en soit, à mesure que le grand ressort se déroule, la chaîne passe, dans le sens de la flèche φ, de dessus le tronc de cône de la fusée sur le pourtour du barillet. Celui-ci entraîne dès lors ledit tronc de cône, et met en mouvement une roue dentée D, dite *roue de fusée*, montée sur l'axe de ce dernier du côté de sa grande base, et qui s'endente avec le premier pignon du rouage. Le déroulement détermine, *ipso facto*, une diminution d'énergie dans l'action du grand ressort, diminution qu'on limite d'ailleurs ainsi qu'il est expliqué au n° 80. Mais grâce à la fusée, le grand ressort agit sur un bras de levier qui va en augmentant; il s'ensuit que le couple impulsif qui met en mouvement le rouage, demeure sensiblement d'intensité constante, et produit un travail moteur qui est à chaque instant à très-peu près égal au travail engendré par les frottements du mécanisme.

Dans les montres ordinaires, du moins dans celles d'aujourd'hui, il n'existe pas de fusée. C'est le barillet qui communique directement son mouvement au rouage. Quelques artistes, à la suite de Pierre Leroy, ont adapté une semblable combinaison aux chronomètres; mais cette pratique a fini par être abandonnée.

— En tout état de cause, comme, même avec une fusée, l'égalité *mathématique* entre les travaux moteurs et résistants par intervalles donnés, ne saurait être réalisée, et qu'elle est nécessaire pour que le mouvement du rouage soit, sinon uniforme, au moins ***périodiquement uniforme***, lesdites dispositions ont besoin d'être complétées par l'adjonction d'un ***régulateur***.

Le ***régulateur***, que nous décrivons en détail aux n°° 82 et 83, est

un balancier ou volant doué d'un mouvement circulaire alternatif produit par un ressort en acier roulé sur lui-même, et appelé *spiral.* Le spiral vibre de part et d'autre de sa forme d'équilibre, comme un pendule oscille de part et d'autre de la verticale.

Le *moteur* et le *régulateur* exercent leur action l'un sur l'autre par l'intermédiaire d'un mécanisme plus ou moins complexe, qui forme ce qu'on appelle l'*échappement.* L'échappement, expliqué *in extenso* au n° 81, a deux buts bien précis : modérer le mouvement du barillet, en le suspendant périodiquement; et faire restituer à chaque oscillation, par le moteur au régulateur, une certaine quantité de force vive, pour réparer celle que ce dernier perd pendant le même temps.

Grâce à ces combinaisons, on parvient, en principe, à produire des oscillations de durées aussi égales que possible, et d'ailleurs indépendantes des amplitudes des oscillations du balancier, qui sont ainsi mises à même de différer d'étendue sans influer sur la régularité du mouvement. On obtient dès lors un mouvement *périodiquement uniforme* pour les aiguilles que commande le rouage, et qui indiquent sur le cadran la mesure du temps.

—Ajoutons aux renseignements précédents que le prix des chronomètres est extrêmement variable. Il dépend surtout de la réputation du constructeur.

Au commerce, il ne dépasse pas 800 à 1.000 francs. Mais les gouvernements payent les bons chronomètres, après *expériences* et *concours*, jusqu'à 1.800 à 2.000 francs, et accordent en outre des primes aux instruments hors ligne (n° 106). Ils ont ainsi en vue d'encourager un *art*, dont les produits ont un trop faible débouché pour rémunérer suffisamment les fabricants.

N° 79. Description particulière du rouage. — Le *rouage* des chronomètres est d'une grande simplicité; et la *fig.* 21 le représente dans tous ses détails. Mais pour bien comprendre ce qui suit, il faut d'abord savoir que les axes et les pignons sont toujours de la même pièce de métal, sauf pour le *pignon de renvoi* de la minuterie, décrit ci-après en son lieu et place. Cela entendu, voici, par ordre explicatif, la description du rouage.

La roue de fusée D‴, *fig.* 21, engrène avec un pignon E, appelé *pignon de centre*, sur l'axe duquel est fixée une roue E′, dite *grande moyenne* ou *roue de centre*, qui fait un tour à l'heure.

Cette roue commande le pignon G, dit *pignon de petite moyenne*,

sur l'axe duquel est montée une nouvelle roue G', la *petite moyenne*, qui entraîne à son tour un pignon H concentrique à la *roue de secondes* H', et appelé *pignon de secondes*.

La roue de secondes H', qui fait un tour par minute, s'endente avec le *pignon d'échappement* K, dont l'axe porte la roue d'échappement K'. D'autre part, le prolongement de cet axe se termine par un long pivot, sur l'extrémité duquel est montée l'aiguille des secondes φ''.

Les parties précédentes du rouage sont renfermées entre deux plaques A, A_1, appelées *grande* et *petite platines*. Ces plaques sont maintenues parallèlement entre elles à l'aide des piliers B, B. Cet ensemble forme les bâtis du chronomètre, et sert à *encager* les divers axes.

L'axe *e*F de la grande moyenne, dit *axe à longue tige*, traverse la platine A, la plus proche du cadran, puis le cadran lui-même. Dans l'intervalle existant entre ces deux parties, est installé un rouage particulier appelé *minuterie*. Le but de ce rouage est : 1° de permettre la mise à l'heure de ces aiguilles, sans produire de mouvement dans le mécanisme; 2° de faire mouvoir concentriquement les aiguilles des heures et des minutes, φ et φ'. Pour obtenir le premier effet, l'aiguille des minutes φ', au lieu d'être adaptée directement à l'*axe à longue tige*, est fixée à un canon ajusté à frottement sur cette pièce. Mais ce frottement est assez doux pour permettre de déplacer l'aiguille sans entraîner ledit axe, et sans produire de mouvement dans les parties du rouage que nous avons décrites. En second lieu, pour faire mouvoir l'aiguille des heures φ concentriquement à l'aiguille des minutes, on l'adapte à un autre canon *extérieur* au précédent, tournant librement autour de lui, et dont l'extrémité déborde le cadran. Ce canon porte une roue dentée f', *la roue d'heures*, que commande un pignon f, dit *pignon de renvoi*, monté *librement* sur un axe parallèle à *l'axe à longue tige*, et vissé dans la grande platine A. Ce pignon porte une *roue de renvoi* F', qui engrène elle-même avec le *pignon de chaussée* F, dont le canon porte l'aiguille des minutes. — On comprend dès lors, en suivant en sens inverse la nomenclature précédente, que les mouvements de l'aiguille des minutes, qu'ils soient produits par le rouage ou par une cause extérieure, se transmettent à l'aiguille des heures avec la réduction voulue. Cette réduction est du reste produite en choisissant convenablement le nombre des dents des deux roues et des deux pignons dont on vient de parler.

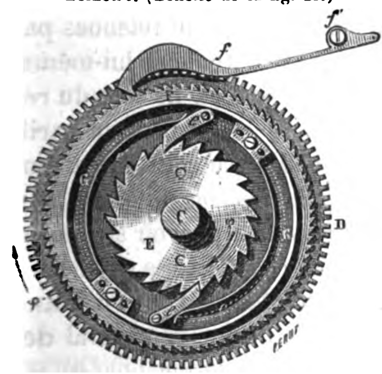
Dans la plupart des chronomètres, les roues des heures et des minutes sont concentriques. Il y a pourtant quelques montres ma-

rines, particulièrement celles de Vissière, dans lesquelles chaque aiguille a son cadran distinct. La disposition de la minuterie est alors plus simple; mais le principe reste le même.

N° 80. Description particulière du mécanisme de remontage et du système de bandage du grand ressort. — Il importe que l'opération du remontage, en supprimant pendant quelques instants la force motrice, n'empêche pas les rouages de continuer leur mouvement. Voici comment on y parvient:

Une roue à rochet E, *fig.* 25, fait corps avec la fusée à l'aide de deux vis dont on aperçoit les emplacements sur le dessin. Ce rochet, au lieu d'agir directement sur la roue dentée D formant la base de la fusée, n'agit sur cette roue que par l'intermédiaire d'une seconde roue à rochet F, dite *grand rochet*, dont les dents sont tournées en sens contraire. — Lorsque le ressort moteur tend la chaîne et fait tourner la fusée dans le sens des flèches φ, la roue à rochet E tourne dans le même sens, et entraîne F, à l'aide des cliquets *e*, *e*, maintenus par les ressorts de rappel *e'*, *e'*. Cette dernière roue F a des dents, qui passent ainsi successivement sous le long ressort-cliquet *f*, sans être nullement gênées par cette pièce. Le ressort *f*, grâce à sa grande longueur et à la fixité en *f'* de sa seconde extrémité, joue en même temps le rôle de *linguet* et de *ressort de rappel*. — De son côté, un fort ressort auxiliaire G, logé dans l'épaisseur de la roue de fusée D, est fixé, d'un bout, à la roue d'engrenage D, et de l'autre, au *grand rochet* F. Ce rochet, mis en mouvement comme il a été dit ci-dessus, tire celle des extrémités du ressort G qui lui est fixée. Ce dernier, se trouvant de la sorte tendu, entraîne à son tour la roue D, pour la faire tourner dans le même sens que tout le reste de la fusée, soit dans le sens des flèches φ.

Fig. 25. Mécanisme de remontage de chronomètre. (Échelle de la fig. 21.)



Lorsqu'on veut *remonter* l'instrument, on agit à l'aide d'une clef sur le carré, vu en *c*, *fig.* 23, ménagé à l'extrémité de l'arbre C, qui est du reste aminci et forme pivot dès sa sortie du corps de la fusée. On fait ainsi tourner cette dernière pièce et par suite la roue E, *fig.* 25, en sens inverse des flèches φ. Le *grand rochet* F ne peut pas alors suivre

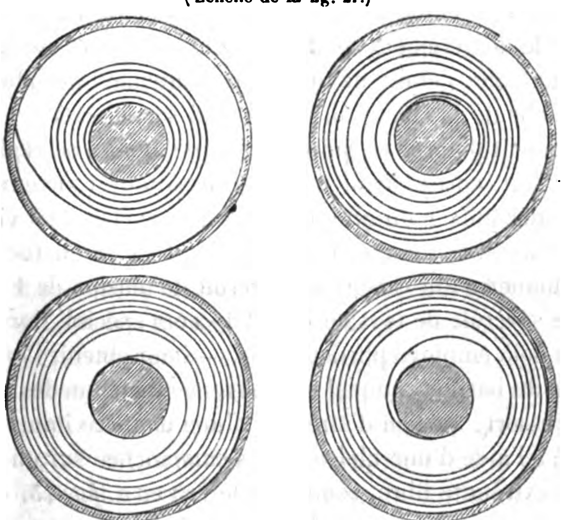
ce nouveau mouvement, à cause du cliquet *f* qui l'en empêche. L'extrémité du ressort G fixée à F ne pouvant rétrograder, la tension de ce ressort s'exerce pour tirer, par sa seconde extrémité, la roue D dans le sens des flèches φ. Conséquemment la montre ne cesse pas de marcher dans ce sens. — Le ressort G peut ainsi entretenir seul le mouvement des rouages et des aiguilles pendant quelques minutes, jusqu'à ce qu'on ait eu le temps de remonter complétement la montre. Lorsque ensuite le ressort moteur reprend son action, il restitue au ressort G la tension qu'il a perdue pendant le remontage. — Il nous reste à ajouter que le carré de remontage de la fusée est, en général, enveloppé d'un canon fixé sur la *petite* platine, et venant émerger sur le dessus du fond de la boîte. Cette disposition, qu'on aperçoit *fig.* 22, a pour but d'empêcher la poussière de pénétrer à l'intérieur du mécanisme, par le trou qu'on est obligé de ménager dans ledit fond pour le passage de la clef de remontage, et qu'on ferme d'ailleurs par un disque, tournant autour d'une goupille le traversant en un de ses points. Parfois, ce disque existe seul, c'est-à-dire sans l'adjonction du canon sus-mentionné.

Dans les montres sans fusée, dites *à barillet denté*, le remontage s'effectue en faisant tourner l'arbre du barillet. A cet effet, un rochet de même morceau que ledit arbre, et dont les dents sont retenues par un ressort-cliquet, empêche que cet arbre ne se déroule de lui-même, et force le barillet à dépenser le bandage du ressort. Le sens du remontage de l'arbre étant le même que celui du mouvement du barillet, la force motrice ne se trouve pas suspendue par cette opération.

—Occupons-nous maintenant du *système de bandage* du grand ressort. En principe, celui-ci *complétement bandé* doit pouvoir se détendre de 8 tours 1/2 environ, sans d'ailleurs que les spires se touchent à aucun moment. Ce nombre de tours est de plus de 1/3 trop grand pour réaliser les 54 heures de marche, qu'on exige en général des montres marines, afin de leur laisser encore 6^h de fonctionnement après deux jours d'oubli de remontage. On peut ainsi réduire, dans des limites suffisamment restreintes, du commencement à la fin desdites heures de marche, les *variations de la force motrice*, étant tenu compte d'ailleurs du changement de longueur des bras de levier successifs (n° 78) formés par la fusée. Il y a dès lors moyen de compenser ces variations par le jeu de l'échappement. Il faut pour cela que le ressort ne se débande que de 5 tours *moyens* à peu près, en ayant d'ailleurs de 1/2 tour à 1 tour d'*armure* EN BAS DE REMON-

TAGE, c'est-à-dire (n° 78) lorsque la chaîne est totalement déroulée de dessus la fusée, et 1 tour 1/2 à 2 tours *de bandage non utilisés* EN HAUT DE REMONTAGE, c'est-à-dire au moment où la croix d'arrêtage δ', *fig.* 21, borne le remontage, et où, ainsi que nous en avons prévenu audit n° 78, la chaîne doit encore se trouver enroulée de 1/4 de tour sur le barillet de remontage. Comme ce n'est que par exception que les chronomètres sont appelés à marcher $54^h = 2^j,25$, et qu'en principe le jeu du ressort est destiné à s'effectuer en 24^h, il reste, au bout de chaque jour, un nombre de tours de *bandage non utilisé* valant de 1/2 tour à 1 tour plus $\frac{5}{2,25} \times 1,25 = 2^t,8$, soit en tout $3^t,3$ à $3^t,8$. En résumé, dans le *fonctionnement habituel*, le grand

Fig. 26. Grand ressort de chronomètre vu aux principales phases de son déroulement complet. (Échelle de la fig. 21.)



ressort ne se déroule que de $(5^t - 2^t,8) = 2^t,2$, avec $3^t,3$ à $3^t,8$ de *bandage non utilisés* EN BAS DE REMONTAGE journalier, et 1/2 à 1 tour d'*armure* EN HAUT : or ce sont là les meilleures conditions pour que le ressort agisse avec sa *plus parfaite égalité*. Quoi qu'il en soit, cette pièce, en se débandant entre les deux limites extrêmes de son déroulement, passe par les diverses phases représentées sur les différentes vues de la *fig.* 26.

Il faut maintenant expliquer le mode d'action de l'*étoile d'arrêtage* δ', *fig.* 21. Que l'axe *d* tourne dans un sens sous l'effort de la

clef de remontage, ou qu'il détourne en sens contraire, pendant le fonctionnement, sous l'entraînement de la fusée, le *doigt d'arrêt* δ fait évidemment mouvoir, à chaque tour dudit axe, l'étoile δ' d'un angle égal à l'angle au centre qui s'étend d'une de ses entailles à la suivante. D'après la manière dont sont façonnées et les entailles et l'extrémité libre du *cliquet d'arrêtage* δ'', cette dernière pièce ne s'oppose pas au mouvement précédent; et maintient l'étoile δ' immobile dans chaque intervalle de deux tours consécutifs. Mais dès que toutes les entailles ont été poussées, aussi bien dans un sens que dans l'autre, par le doigt δ, et que celui-ci arrive en contact avec le pourtour extérieur de la partie pleine de l'étoile, il y a *arc-boutement*, et par suite *arrêt forcé* de la rotation dans le sens où elle était en train de s'effectuer. — Toutefois cét arrêt ne se produit que dans le sens du remontage. En sens contraire, par suite du nombre d'entailles habituel de l'étoile, ce n'est pas à l'aide de celle-ci qu'a lieu l'arrêt; car le déroulement total de la chaîne de dessus la fusée est terminé avant que l'étoile ne forme arc-boutement; et alors c'est le point d'attache de la chaîne au barillet qui sert d'arrêt.

— On conçoit d'après ce qui précède que, quand on règle le chronomètre, il faut, après l'avoir remonté des 5 tours convenus à partir du point de débandage du grand ressort borné, comme il vient d'être dit, et qui correspond à tout le déroulement de la chaîne de dessus la fusée, donner audit ressort un surcroît de tension de 1 tour 1/2 à 2 tours. Ce surcroît de tension prend le nom spécial d'*armure*, que nous avons déjà employé plusieurs fois. — Pour obtenir l'*armure voulue*, l'arbre du barillet, auquel se trouve accroché un des deux bouts du grand ressort, au lieu d'être fixe d'une manière immuable, peut être tourné à l'aide d'une clef venant s'emmancher sur un carré ménagé à son extrémité libre, comme on le voit en *a*, *fig.* 23. On l'arrête alors à diverses positions, en choisissant dans chaque cas celle qui donne une *bonne armure.* L'arrêt s'obtient au moyen d'une roue à rochet encastrée sur ledit arbre, et que commandent un ou deux linguets montés sur la petite platine.

C'est l'ensemble de cette roue γ et de ses linguets γ', γ', qu'on aperçoit en *fig.* 21, à l'extrémité libre de l'arbre du barillet, qui forme *le système de bandage.*

N° 81. Description particulière de l'échappement. — En principe, tout *échappement* (n° 78) comporte une roue dite d'échappement, montée sur l'axe d'un pignon, qui la met en corrélation avec

la dernière roue du *train d'engrenages*. Les dents de la roue d'échappement ont une taille spéciale. C'est de la manière dont la corrélation est établie entre cette roue et le balancier que dépend l'espèce d'échappement.

Il est peu de parties de la mécanique appliquée qui aient autant exercé le génie et la sagacité des artistes que cette corrélation. Nous distinguerons particulièrement ici les *échappements libres*. Leur caractère principal consiste en ce que le balancier opère sa vibration dans une indépendance à peu près complète de la roue d'échappement, avec laquelle il n'a de contact que pendant un moment presque instantané de chaque double oscillation.

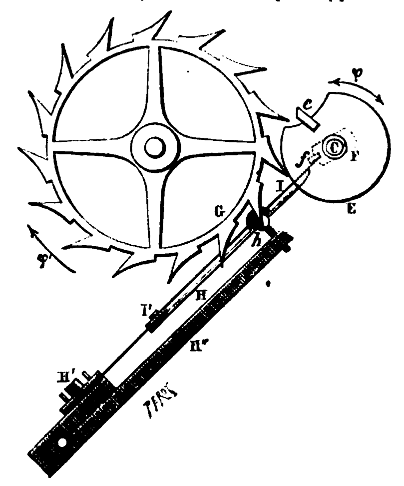
Dans les chronomètres, on emploie exclusivement l'échappement libre dit *à détente*, qui se divise en deux sortes : *à détente à ressort* représentée *fig.* 27, et *à détente sur pivot;* ce dernier genre est aujourd'hui abandonné par les constructeurs sérieux.

— Dans la *détente à ressort*, la roue d'échappement G choque une fois à chaque double oscillation du régulateur, un tenon en rubis *e*, dit *levée*, incrusté dans un *plateau* en acier E, qui est fixé lui-même perpendiculairement à l'axe C du balancier. La saillie et l'inclinaison de la levée sont combinées avec la forme des dents de la roue d'échappement, de la manière suivante : lorsqu'un des rayons géométriques de cette roue mené du centre à l'extrémité d'une dent vient passer par l'axe du balancier, la dent imprime à la levée une impulsion ; et, au contraire, quand un des rayons géométriques de la roue d'échappement qui rencontre l'axe du balancier, correspond au vide entre deux dents, il n'y a aucun contact.

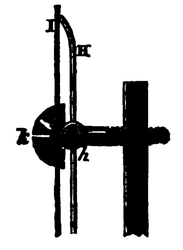
D'autre part, le système qui lâche et retient périodiquement la roue d'échappement, et par suite le barillet, est une *détente* formée d'un long levier H susceptible d'osciller autour d'un point fixe H′, attenant au pont de détente H″, et auquel il est relié par une partie amincie formant ressort de rappel. Le levier tend ainsi à être sans cesse ramené à sa position d'équilibre. Cette position est nettement déterminée à l'aide d'un *butoir k*, *vue* 2°, formé d'une vis, à tête ronde et fendue. Cette vis s'implante dans l'extrémité libre du pont de détente H″, laquelle extrémité porte à cet effet un trou taraudé, pratiqué au bout d'une fente qu'on aperçoit en *vue* 3°, et qui permet de resserrer au besoin le trou en question. Le levier H vient se coller sans cesse contre la tête de la vis, par l'intermédiaire de la base de la pièce *h*, dès qu'il est abandonné à lui-même. — Cette pièce *h*,

que le levier porte vers les 3/4 de sa longueur, est un *repos* en rubis. Elle forme une sorte de cheville, dont la base joue le rôle sus-men-

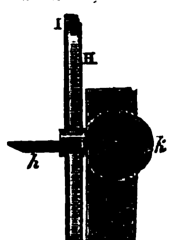
Fig. 27. Échappement de chronomètre.
Vue 1°. Plan d'ensemble. (Échelle double par rapport à la fig. 21.)



Vue 2°. Plan du bout libre de la détente, du butoir et du repos. (Échelle double de la vue 1°.)



Vue 3°. Profil du bout libre de la détente, du butoir et du repos. (Échelle double de la vue 1°.)



tionné, et dont la partie en saillie chanfreinée à son extrémité supérieure, sert d'arrêt à une des dents de la roue d'échappement, chaque fois que le levier H est à sa position d'équilibre. — Par ailleurs, ce levier H est doublé, sur la plus grande partie de sa longueur, par un petit ressort en or I. Ce ressort, dit de *dégagement*, est fixé au levier en I′ du côté du point d'oscillation de celui-ci ; et son deuxième bout vient seulement appuyer sur l'extrémité libre du levier, qui est courbée à cet effet ; il dépasse d'ailleurs cette extrémité. Le bout en question est heurté deux fois à chaque double oscillation du régulateur, qu'indique du reste la flèche à double bec φ, par un petit *doigt f* en rubis encastré dans un petit manchon de forme oblongue F, dit *rouleau*, monté, de même que le *plateau* E, sur l'axe C du balancier.

Grâce à la disposition que nous venons de décrire, le ressort de dégagement I n'actionne le levier H. et par suite ne dégage la roue d'échappement G d'avec le *repos* h, en la laissant du reste partir dans le sens de la flèche φ', qu'à celui des deux heurts du balancier qui correspond sur *notre figure* à une rotation de droite à gauche, c'est-à-dire en sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre. Au second heurt, ledit ressort ne fait que fléchir en laissant se dégager le doigt en rubis sus-mentionné f.

— En *résumé*, les fonctions de l'échappement à détente à ressort se réduisent à ceci :

Le balancier vibrant de droite à gauche, à un certain moment le *doigt de dégagement* f écarte la détente de sa position d'équilibre, et *dégage* le repos h. La roue G, devenue libre, s'échappe dans le sens de la *flèche* φ'. Mais à ce moment, l'une des dents de la roue d'échappement rencontrant la *levée* e, imprime au balancier une violente impulsion de droite à gauche. — Un instant après, le balancier, ramené par le spiral de gauche à droite, vibre *librement*, sans aucun autre contact avec le système de la détente, que sa rencontre avec le ressort de dégagement I, auquel il fait subir une flexion presque insensible.

Il nous reste à dire qu'on désigne sous le nom de *levée d'échappement*, l'arc de cercle que parcourt le plateau E du balancier pendant le contact de la roue d'échappement avec la *levée* e qui est montée sur ce plateau.

— Il n'y a donc bien, ainsi que nous l'avons annoncé au début, *échappement* qu'à chaque double oscillation du régulateur, et quand le balancier tourne dans un même sens déterminé. En ceci, les chronomètres se distinguent des montres ordinaires à *cylindre* ou à *ancre*, dans lesquelles l'échappement se fait à chaque oscillation simple, comme dans les pendules, particularité qui les classe dans la catégorie des échappements à coup perdu.

On voit encore que l'échappement que nous venons de décrire porte à juste titre le nom d'*échappement libre*, puisque, sauf les instants très-courts des chocs de la roue d'échappement G contre la *levée* e, et des heurts du *doigt* f contre le ressort de dégagement I, le balancier oscille *librement*. Ces chocs ont du reste peu d'intensité, à cause de la faible masse de ladite roue et de la résistance minime du ressort en question.

L'avantage le plus apprécié de l'*échappement libre*, c'est que les actions mutuelles entre cet organe et le balancier étant des chocs, et non des frottements, on n'a pas besoin d'huile au contact. Or l'épais-

sissement de cette substance (n° 84) est une des principales causes de l'irrégularité des montres.

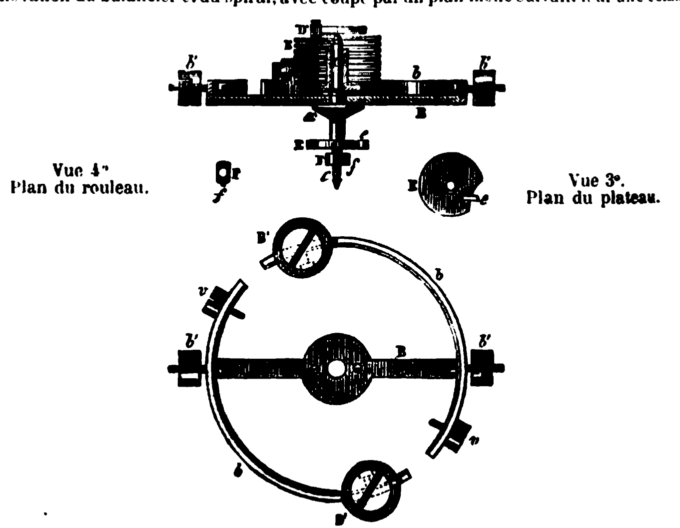
N° 89. Description particulière du balancier. — A côté de l'échappement, la constitution du *régulateur* lui-même (n° 78) occupe une place non moins importante. Cette constitution, qui comprend à la fois celle du balancier et du spiral, doit être combinée avec l'espèce de l'échappement, de façon à réaliser, pour le balancier, des oscillations jouissant de la propriété essentielle d'être toutes d'égale durée, en étant néanmoins susceptibles de varier plus ou moins notablement d'amplitude : c'est cette propriété qu'on désigne sous le nom d'*isochronisme.*

Sa nécessité provient de ce qu'il n'y a pas moyen de rendre mathématiquement identique, pour une même position du balancier, la résultante de toutes les forces tant actives que résistantes qui l'actionne à chaque vibration, et cela non-seulement d'une oscillation à l'autre, mais surtout d'une époque à une autre : cette dernière circonstance étant due (n° 100) à l'influence de la température sur le moment d'inertie du régulateur, et à l'influence sur la mobilité de celui-ci de l'épaississement des huiles qui lubrifient les pivots.

— Le balancier, *fig.* 28, de tout chronomètre, comprend, en principe, les pièces suivantes :

Fig. 28. Balancier de chronomètre. (Même échelle que fig. 21.

Vue 1°. Elévation du balancier et du spiral, avec coupe par un plan mené suivant leur axe commun.



Vue 2°. Plan du balancier, avec coupe dans les masses compensatrices.

1° Un axe en acier *c* terminé par deux pivots. Cet axe est monté librement entre la petite platine et l'espèce de potence appelée *coq*, adaptée sur cette platine. Ledit axe est muni du *plateau* E et du *rouleau* F, qui portent (n° 81) les deux appendices en rubis *e* et *f*, destinés, l'un à recevoir l'impulsion de la oue d'échappement, et l'autre à dégager la détente.

2° Une pièce transversale en acier B, dite *barrette*, qui s'emmanche à angle droit avec l'axe *c*, et se fixe, à l'aide de vis, sur un épaulement *a* de même morceau que *c*.

3° Deux lames courbes formant un peu moins d'une demi-circonférence, et dont chacune fait corps, aux environs d'un de ses bouts, avec l'une des extrémités de la barrette. Ces lames, dites *bi-métalliques*, sont formées intérieurement d'acier et extérieurement de laiton. Elles servent à *compenser* le balancier, c'est-à-dire à rendre autant que possible (n° 95) son moment d'inertie indépendant de l'influence des variations de température. — Autrefois on exécutait séparément les lames d'acier et de laiton; et on les rivait ensemble par de nombreux points de leur surface. Mais elles se trouvaient ainsi réunies imparfaitement; et les dilatations manquaient de régularité et de continuité. Aujourd'hui les deux lames font corps ensemble. Pour obtenir ce résultat, on commence par façonner au tour un cylindre plein en acier. Ce cylindre, dont le trou central a été soigneusement bouché avec un morceau d'ardoise, est placé dans un creuset et entouré de laiton qu'on amène à la fusion, et qui ensuite, par le refroidissement, fait corps avec l'acier. Dans la masse ainsi obtenue, on découpe au tour un anneau *bi-métallique*, en réservant la barrette. Enfin, des traits de scie séparent l'anneau en deux arcs.

4° Deux masses en laiton B', B', dites masses *compensatrices* ou *de compensation*, fixées le long des lames bi-métalliques, de façon à se trouver en des points diamétralement opposés par rapport à l'axe du balancier.

5° Deux écrous *b'*, *b'*, dits *masses régulatrices* ou *écrous de réglage*, montés sur des vis en acier aux deux extrémités de la barrette B, et destinés à être rapprochés ou éloignés de l'axe à volonté.

6° Quelquefois des *vis supplémentaires de réglage v*, *v*, venant ajouter leur action à celle des masses précédentes, et s'adaptant aux environs de ces masses, vers l'extrémité des lames bi-métalliques voisines de la barrette.

Les pièces 4°, 5° et 6° servent au réglage du chronomètre, ainsi qu'il est expliqué aux nos 96 et 97.

Le tout doit être disposé de façon que le centre de gravité du système passe constamment par l'axe de rotation.

— Le balancier circulaire qui vient d'être décrit est de beaucoup le plus usité. Ce n'est pourtant pas qu'il soit parfait; mais les facilités relatives d'exécution et de réglage qu'il offre l'ont fait préférer par la plupart des artistes. Toutefois beaucoup de ceux-ci y adaptent certaines dispositions destinées à modifier le mode de déplacement des masses compensatrices et régulatrices.

Le but de pareilles dispositions reposant sur des considérations propres au *réglage*, ne saurait être bien compris que quand on aura expliqué en détail cette importante opération. Nous ne les décrirons donc qu'ultérieurement (n° 98).

N° 82. Description particulière du spiral. — De son côté, le *spiral* S, *fig.* 29, est disposé au-dessus ou au-dessous du balancier, sous la forme d'un ressort long et délié, qui fait plusieurs révolutions autour de son axe de figure, et dont les extrémités sont attachées, l'une à une pièce fixe D', *fig.* 28, dite *piton* ou *tenon*, vissée au pont du balancier, l'autre à une *virole* en cuivre D enfilée sur l'axe du balancier.

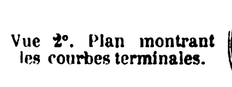
La présence du spiral fait que le balancier ne peut être en équilibre que dans une position particulière. Si on l'écarte de cette position, en le faisant tourner dans un sens ou dans l'autre, le ressort se déforme; et, en vertu de son élasticité, il tend constamment à ramener le balancier dans sa position primitive. Dès que ce dernier, ainsi écarté de sa position d'équilibre, est abandonné à lui-même, le ressort le met en mouvement, et lui fait exécuter une suite d'oscillations autour de son axe.

C'est à Huyghens qu'on doit l'heureuse idée de l'emploi du spiral en horlogerie. Le spiral

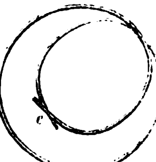
Fig. 29. Spiral cylindrique de chronomètre, avec courbes terminales. (Échelle double par rapport à la fig. 21.)

Vue 1°. Élévation.





Vue 2°. Plan montrant les courbes terminales.



d'Huyghens était plat, c'est-à-dire avait toutes les spires dans un même plan, comme on le voit encore dans les montres ordinaires. — Depuis lors, Pierre Leroy a reconnu qu'en contournant cette pièce suivant une hélice à très-petit pas, de façon à former des circonférences de même rayon placées les unes au-dessus des autres, on pouvait obtenir d'une manière plus complète l'*isochronisme* des oscillations, même pour de grandes amplitudes. Ce ressort en hélice est employé spécialement dans les chronomètres, et est désigné sous le nom de spiral *cylindrique* ou héliçoïde. La section de ces spiraux est tantôt circulaire, tantôt rectangulaire.

Pour assurer aux spiraux un isochronisme aussi parfait que possible, leurs deux extrémités sont munies de *courbes terminales* symétriques, dont la forme se fixe théoriquement (n° 88). Toutefois, on peut encore parvenir à établir l'isochronisme sans de pareilles courbes, en choisissant convenablement la fraction de tour de chaque spire extrême (n° 90).—Il y a, d'ailleurs, des artistes qui emploient exprès des spiraux *anisochrones* (n° 94), c'est-à-dire manquant d'isochronisme en *eux-mêmes*. Ils combinent alors ce manque d'isochronisme avec le défaut de compensation du balancier, de façon à obtenir, somme toute, l'isochronisme de tout l'ensemble du régulateur.

— Les spiraux sont généralement en acier. Mais la difficulté de se procurer des rubans de ce métal homogènes et de composition bien définie, et en outre le désir de se mettre à l'abri de l'oxydation, ont engagé quelques constructeurs à employer des métaux que l'on obtient plus facilement à l'état de pureté. On a essayé avec un certain succès des spiraux en or. Récemment, le Dépôt de la marine a acquis plusieurs chronomètres de M. A. L. Berthoud pourvus de semblables spiraux. Jurgensen, de Copenhague, les a beaucoup employés. — Afin d'obtenir avec l'or une élasticité suffisante, on le trempe par refroidissement lent, comme cela se pratique pour les tam-tams. On peut craindre que le peu de ténacité de ce métal ne nuise à la solidité des spiraux. L'expérience prolongée de la navigation permettra seule d'apprécier la question.

Mentionnons encore les spiraux amincis aux extrémités et employés par F. Berthoud et A. Bréguet. Cette pratique paraît se baser sur la remarque des physiciens, que les diapasons les plus isochrones sont ceux dont les branches ont la forme de solides de moindre résistance. Mais elle a l'inconvénient de produire des spiraux trop sensibles et sujets à dérangement.

Citons enfin, à titre de curiosité, les spiraux en hélice conique de Motel, les spiraux sphériques essayés en Suisse et le spiral *tria in uno* des Anglais, cylindrique dans sa partie moyenne, et avec courbes terminales formées en volutes, comme les spiraux des montres ordinaires.

N° 84. Indications spéciales sur la forme des dents d'engrenage, les pivots, les trous, les contre-pivots et les huiles, dans les chronomètres. — En dehors des dents de la roue d'échappement, qui ont leur forme déterminée (n° 81) en raison de leur objet spécial, toutes les autres dents des roues d'un chronomètre, et celles des pignons, qui, soit dit en passant, sont appelées *ailes* en horlogerie, appartiennent à l'engrenage à flancs.

Le défaut bien connu de cet engrenage, dû à ce qu'il ne se prête pas au déplacement possible des axes, est ici peu à redouter, parce que, d'après la nature des *trous*, le jeu des axes ne peut devenir appréciable qu'au bout d'une période considérable. Mais il existe un autre inconvénient auquel il n'y a pas moyen d'échapper; car, dans les montres, on est obligé d'employer des pignons d'un très-petit nombre d'ailes; et cela conduit à de grandes étendues pour les arcs de *retraite*, c'est-à-dire pour les arcs qui correspondent à la durée du contact au delà de la ligne des centres. Or il résulte de cette circonstance que l'augmentation graduelle, à partir du contact sur ladite ligne, des actions mutuelles entre les dents, prend trop d'extension, et par suite engendre une usure inégale, qui se trouve inévitable. — Au surplus, l'engrenage à développante de cercle ne serait pas, de son côté, admissible à cause de la convergence trop rapide des profils. — Quant à l'engrenage à lanterne, il est évident qu'il ne saurait figurer dans aucun mécanisme de précision.

D'autre part, l'épaisseur des *ailes* des pignons est prise égale au 1/3 du pas; celle des dents des roues se trouve par suite égale aux $\frac{2}{3}$ du pas, *moins* le jeu qui varie entre $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{10}$ du vide.

— Occupons-nous maintenant des axes de toutes les pièces tournantes du mécanisme.

Nous avons, dans ce qui précède, donné au mot *axe* la signification générale qu'on lui attribue en mécanique. Mais, *en chronométrie*, les axes se désignent sous des appellations spéciales, suivant les pièces auxquelles ils appartiennent. Ils prennent le nom d'*arbre* pour le barillet et la fusée, de *tiges* pour toutes les roues du rouage, et d'*axe*

pour le balancier. — De leur côté, les extrémités des tiges du rouage et de l'axe du balancier s'appellent *pivots*.

Les pivots *a* de tige A, *fig.* 30 et 31, se composent généralement d'un tourillon dont l'épaulement, nommé *portée*, est formé soit par une zone annulaire, soit le plus ordinairement, comme le montrent les

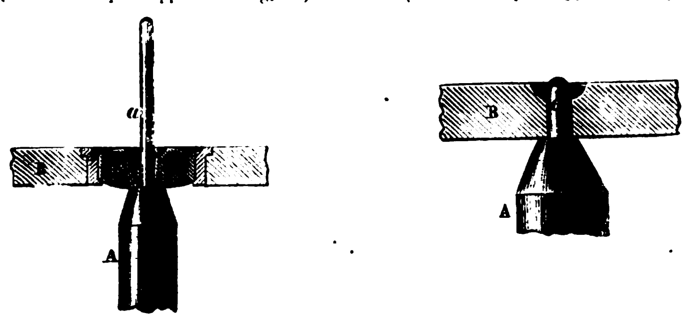


Fig. 30. Pivot et trou en rubis de roue de seconde. (Échelle = 4 par rapport à la fig. 21.)

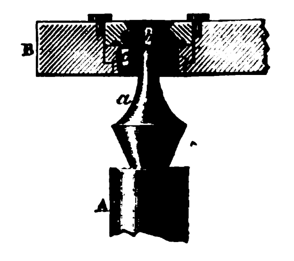
Fig. 31. Pivot et trou en cuivre de roue de centre. (Échelle = 4 par rapport à la fig. 21.)

figures, par un tronc de cône qui se raccorde suivant la grande base avec le corps de l'axe. — Souvent il existe, en outre, un tronc de cône renversé, comme sur la *fig.* 32, de même base que le cône de l'épaulement, qu'il relie avec le corps de l'axe. Le but du tronc de cône renversé est d'empêcher l'huile de lubrifiage du pivot de s'épancher le long des tiges ou des dents du pignon monté sur ledit corps.

— Les crapaudines qui supportent les pivots sont appelées *trous*. Elles se trouvent évasées sur une certaine profondeur, de manière à former un petit godet destiné à recevoir l'huile, dont on ne met du reste que quelques gouttes pour trois ans. — Comme le graissage des organes ou le *renouvellement* des huiles ne doit se faire qu'à de longs intervalles, il importe de réduire, autant que possible, la masse des particules matérielles que le frottement détache du pivot et du trou, et qui ont pour effet d'épaissir et d'altérer les huiles, et par suite d'augmenter l'importance de cette résistance. C'est pourquoi on n'emploie presque exclusivement que des *trous c*, *fig.* 30, taillés dans des *rubis* qu'on incruste, dans les platines, telles que B, aux points de support des pivots. On évite également ainsi l'oxydation de l'huile par son contact avec le cuivre. — Les trous en *cuivre*, *fig.* 31, ne sont usités dans les chronomètres que pour les gros pivots des pièces mobiles qui fonctionnent avec lenteur.

En ce qui concerne le balancier, chacun des deux *pivots a*, *fig.* 32, de l'axe A, possède un système de *trou* formé de deux morceaux : l'un *b* est un anneau en rubis formant godet pour l'huile ; l'autre *c*, appelé *contre-pivot*, est une partie plate qui sert d'appui au pivot. Les *contre-pivots* sont en rubis ou en diamant. Par ailleurs, les deux sortes de pièces précédentes sont serties dans des bouchons en cuivre, qu'on loge et maintient dans la platine correspondante B, comme l'indique la figure.— De leur côté, les pivots eux-mêmes ont ici leurs bouts très-fins, comparativement aux autres pivots. C'est pour restreindre les frottements qu'on a recours à une pareille disposition ; car cette résistance passive a une plus grande influence sur le mouvement du balancier, en raison de la faible énergie du spiral, que sur le jeu de la transmission, qui, elle, est mise en mouvement par une force motrice plus que suffisante. Comme à la suite du moindre choc, les pivots ainsi construits pourraient se briser à leur naissance, on a soin de les renforcer, en les *raccordant* par un profil continu avec le cône renversé qui les précède le long de l'axe, et qui a le but sus-mentionné pour tous les pivots en général, de prévenir l'épanchement de l'huile. L'huile susceptible de se répandre s'étale ici le long du pivot et de son cône renversé. — Il reste à dire que l'évasement que l'on observe aux *trous* du balancier a pour objet d'empêcher tout frottement inutile dans un trou trop profond, et sert également pour retenir l'huile, qui cependant finit à la longue par occuper la partie plate du *contre-pivot*. Au surplus, ledit évasement facilite la mise en place de l'axe.

Fig. 32. Pivot, trou et contre-pivot d'axe de balancier de chronomètre, identiques pour les deux extrémités de l'axe. (Échelle = 4 par rapport à la fig. 21.)



— C'est surtout pour prévenir les usures et les grippements qu'on lubrifie à l'huile les pivots des diverses pièces mobiles. Le lubrifiage a bien encore pour but de diminuer les frottements.

Il importe de remarquer que pour les organes délicats du mécanisme, là où la force est peu considérable et la vitesse très-grande, l'effet *d'adhérence* de l'huile domine complétement l'effet du frottement. Par conséquent, pour ces organes, le second but du lubrifiage non-seulement n'est pas atteint, mais même les résultats vont à son encontre. — Au surplus, dans une certaine mesure, les frottements en eux-mêmes sont plutôt avantageux que nuisibles à la régularité du

mouvement des montres, en ce sens qu'on peut alors donner plus d'énergie au grand ressort, ce qui rend son action relativement plus uniforme. En un mot, ce ne sont pas tant les frottements en eux-mêmes qu'il faut redouter, mais *leur inconstance;* c'est pourquoi on ne lubrifie pas les dents mêmes du rouage. D'autant que si l'on faisait le contraire, on ne remplirait pas les conditions de propreté que nécessitent ces parties, afin de ne pas s'encrasser. — D'après ce que nous venons de dire, il est indispensable de prendre les mesures nécessaires pour que l'huile d'un pivot ne puisse pas pénétrer dans l'intervalle des dents du pignon voisin. Afin d'atteindre ce but, on se contente, dans les montres ordinaires, de creuser une petite rigole ou *piqûre* dans le pignon, suivant la circonférence de jonction avec l'arbre : on forme ainsi un réservoir destiné à emmagasiner l'huile qui peut sortir du trou. Mais dans les chronomètres, la piqûre circulaire est remplacée, ou même corroborée, par le tronc de cône renversé ménagé à la naissance des pivots, comme on en a prévenu plus haut.

Le choix des huiles est d'une extrême importance pour la bonne marche et la conservation des pièces d'horlogerie. Des huiles trop fluides se volatilisent et laissent s'user les pivots; des huiles trop grasses et trop oxydables opposent au mouvement trop de résistance, et, qui pis est, une résistance trop variable avec le temps et la température. C'est surtout aux pivots du balancier qu'il importe d'avoir des huiles excellentes. Pour les pivots des autres rouages, leur importance est relativement moindre ; là, en effet, la force motrice peut être augmentée suffisamment pour qu'on n'ait pas à s'inquiéter de sa diminution par les résistances passives, au moins au delà d'une certaine mesure.

Les horlogers considèrent l'huile comme l'ennemi intime de leurs instruments. C'est même souvent sur son compte que l'on rejette les vices d'un mécanisme mal conçu ou mal exécuté. Mais sans imputer à l'huile toutes les irrégularités qui peuvent affecter les chronomètres, nous constaterons qu'elle a une influence très-réelle et très-redoutable, surtout eu égard à ce qu'elle s'épaissit graduellement sous l'influence du mouvement des métaux qu'elle lubrifie, et par l'action de l'oxygène de l'air. — Avec les meilleures qualités de ce liquide, on est obligé de nettoyer le chronomètre *tous les trois ans*, si l'on veut pouvoir compter sur des marches régulières.

⁎ **N° 85. Position du problème général de la théorie des chronomètres.** — L'étude du fonctionnement des chrono-

mètres a fait le sujet de travaux remarquables, qui remontent à Huyghens et à Bernouilli, et de recherches expérimentales très-ingénieuses débutant avec Pierre Leroy.

Dans ces dernières années, MM. Phillips, Yvon Villarceau et Résal ont appliqué avec un grand talent les principes de la mécanique, l'un à l'étude particulière du spiral, l'autre à la théorie complète du mouvement et de la compensation des chronomètres, et le troisième à divers points de ces deux questions. L'étude de M. Phillips comprend un Mémoire inséré dans le *Recueil des savants étrangers*, divers détails complémentaires donnés dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, et enfin un Manuel pratique, qui est un résumé professionnel du Mémoire. De son côté, le travail de M. Villarceau a été inséré dans les *Annales de l'Observatoire de Paris*. Enfin, les points particuliers étudiés par M. Résal sont contenus dans le tome III de son *Traité de mécanique générale*.

Tout récemment, M. Caspari est venu apporter un contingent de nouvelles considérations à la théorie dont il s'agit, particulièrement en ce qui concerne le spiral. Ces recherches, pleines d'intérêt et qui complètent avantageusement tous les travaux antérieurs que nous venons de citer, se trouvent dans le 11e cahier des « *Recherches sur les chronomètres, etc.* », recueil déjà mentionné au n° 72.

D'après ce que nous avons dit au n° 78, le problème général de la théorie des chronomètres consiste à obtenir un mouvement périodiquement uniforme par l'*intermédiaire* du régulateur. Il suffit dès lors qu'il en soit ainsi pour ce dernier, en ne se préoccupant que secondairement de la relation entre la force motrice (grand ressort) et les forces résistantes (frottement du rouage), qui agissent sur le reste du mécanisme.

✱ N° 86. Théorie du moteur dans les chronomètres. — Eu égard à l'éventualité d'imperfection dans l'isochronisme du régulateur, il vaut mieux se rapprocher autant que possible de l'égalité constante entre les travaux de la force du grand ressort, d'une part, et des forces résistantes du rouage, d'autre part : déduction faite d'ailleurs du travail consommé à chaque oscillation double par le choc de la roue d'échappement contre la *levée* du balancier. C'est ce qui explique l'usage de la fusée.

Toutefois, avec un régulateur parfaitement isochrone, on pourrait à la rigueur se contenter d'un moteur dont la force, sans être constante, serait toujours suffisante pour entretenir le mouvement. C'est

ce qu'a fait P. Leroy et, après lui, quelques horlogers, qui laissent (n° 78) le barillet agir directement sur le rouage, sans l'intervention d'une fusée. Cette disposition, appliquée à un spiral *non isochrone*, produit l'effet singulier de faire intervenir dans la marche une perturbation, qui a pour période l'intervalle entre les remontages. Un pareil instrument, observé tous les jours à la même heure, paraîtrait avoir une marche très-régulière. Mais cette marche ne serait pas constante pendant les vingt-quatre heures. Comparée, à douze heures d'intervalle, avec une pendule, la montre donnerait des résultats différents. C'est ce qui arrive assez fréquemment pour certains chronomètres de poche, dans lesquels on supprime la fusée afin d'en réduire le volume.

En résumé, dans les montres marines, la fusée est adoptée comme surcroît de précaution. Cette précaution étant prise, il résulte des considérations du numéro précédent, qu'on n'a pas à tenir compte du jeu même du grand ressort dans la théorie des chronomètres. Nous croyons néanmoins intéressant de donner sur ce jeu les détails suivants :

On a remarqué que la courbure des ressorts augmente avec le temps : ce n'est qu'au bout de deux ou trois ans qu'ils prennent une forme définitive d'équilibre.

De son côté, M. Résal a fait du ressort moteur une étude analytique et expérimentale très-complète. On la trouvera dans le tome III du *Traité de mécanique générale* de ce savant. Nous regrettons de ne pouvoir donner ici une idée des beaux développements analytiques que comporte cette question. Nous devons nous borner à en citer les résultats.

— Après avoir établi la loi de la détente du ressort, M. Résal a trouvé l'expression générale du moment de traction exercée sur la chaîne du barillet. En se servant de cette expression pour la détermination du profil théorique de la fusée, M. Résal a montré que, si le rayon de la grande base de la fusée est égal à celui du barillet : 1° la projection dudit profil sur le plan de cette base est une spirale d'une forme spéciale; 2° la méridienne de la surface de révolution que forme la fusée avant d'être entaillée, est une courbe convexe vers l'axe du barillet, qu'elle a pour asymptote. Ces formes sont à fort peu près celles que les artistes ont été conduits à adopter.

* **N° 87. Équation générale de la théorie du régulateur dans les chronomètres.** — Étant admis que la théorie des

chronomètres se résume dans celle de leur régulateur, il importe de commencer par préciser toutes les forces qui agissent sur cette partie du mécanisme. Ce sont :

1° La force extérieure qui retient l'extrémité libre du spiral; puis l'action que ressent, de la part du balancier, la deuxième extrémité de ce ressort; — 2° les forces élastiques du spiral, lesquelles comprennent implicitement sa réaction sur le balancier; — 3° les frottements de diverses sortes des pivots du balancier; — 4° la résistance que l'air offre au mouvement de celui-ci; — 5° l'impulsion périodique qu'il reçoit de la roue d'échappement; — 6° son choc contre la détente pour la soulever; — 7° l'adhérence des huiles due à leur défaut de fluidité, adhérence ayant le grave inconvénient de varier avec le temps et la température, et se faisant sentir aux pivots du rouage et du balancier, en affectant le jeu de la roue d'échappement dans l'énergie de son impulsion sur le balancier, d'une part, et dans la résistance que celui-ci lui oppose et qu'elle a à vaincre, d'autre part; — 8° enfin les forces d'inertie du balancier et du spiral.

Cela compris, appelons :

ω la quantité angulaire dont le balancier est *écarté* de sa position d'équilibre à l'instant t, cet écart étant exprimé en longueur d'arc dans la circonférence de rayon 1.

I et i les moments d'inertie du balancier et du spiral autour de l'axe de rotation; les quantités I et i sont susceptible de varier avec l'angle ω; car, d'une part, l'ensemble du balancier change légèrement de configuration avec cet angle et sous l'action de la force centrifuge; et, d'autre part, le spiral subit, par sa nature même, des déformations qui dépendent également dudit angle. Mais surtout les deux quantités I et i peuvent ressentir l'influence de la température, eu égard à ce que celle-ci est apte à faire varier les distances au centre d'oscillation des diverses parties du balancier et du spiral, à moins que la compensation (n° 96) ne soit parfaite.

J l'expression générale du moment de chaque force extérieure mentionnée en 1°, appliquée au spiral, lorsque l'écart ω acquiert une valeur égale à l'unité angulaire.

K l'expression générale du moment des diverses espèces de forces élastiques (n° 89) qui se développent dans le spiral, lorsque l'écart ω acquiert une valeur égale à l'unité angulaire. Ce moment est variable dans une certaine mesure avec la température à l'instant considéré, eu égard à l'influence (n° 89) de la chaleur sur le coefficient d'élasticité du spiral.

k l'expression générale du moment d'une quelconque des forces 3° à 7° sus-mentionnées.

T le temps d'une oscillation simple.

Il est manifeste que, pour une valeur quelconque de ω, les moments des forces à considérer peuvent s'écrire sous la forme $J\varphi(\omega)$, $KF(\omega)$, $kf(\omega)$: $\varphi(\omega)$, $F(\omega)$ et $f(\omega)$ étant des fonctions de l'écart angulaire propre à chaque force considérée, et pouvant, suivant l'essence de celle-ci, se réduire à une constante. Or on voit, avec un peu de réflexion, qu'il est licite de considérer, à chaque instant, l'ensemble du

spiral et du balancier comme un ***système rigide***, sur lequel toutes les actions élastiques se réduisent à leurs résultantes respectives, telles que les donnent les lois de l'élasticité. Nous aurons dès lors, en vertu du théorème de d'Alembert, l'équation suivante, où on suppose I de grandeur contante, et où l'on néglige la valeur très-petite et très-complexe du terme en i destiné à tenir compte de l'inertie du spiral, en se réservant d'apprécier (n° 93) l'influence de ces hypothèses dans une étude plus approfondie :

$$I\frac{d^2\omega}{dt^2} = \Sigma J\varphi(\omega) - \Sigma KF\omega + \Sigma kf(\omega). \tag{52}$$

Telle est l'équation générale de la théorie du régulateur dans un chronomètre. — Le but à atteindre est de combiner les forces dont on dispose, de façon que le temps T déduit de l'équation (52) soit constant, quelle que soit l'amplitude de chaque oscillation.

— Il est un cas très-simple où on obtient la solution désirable, c'est celui où I étant constant, le second membre se réduit à une quantité de la forme — $K\omega$. On a effectivement, en pareille hypothèse :

$$I\frac{d^2\omega}{dt^2} = -K\omega.$$

Or cette équation différentielle s'intègre facilement en suivant la voie ci-après (*):

$$2I\frac{d^2\omega}{dt^2}d\omega = -2K\omega\, d\omega;$$

$$I\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = -K\omega^2 + \textit{constante}.$$

La vitesse angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ devant s'annuler pour la valeur $\omega = \pm\,\omega_1$,

(*) Nous avons donné cette voie comme étant celle que connaissent les personnes qui n'ont vu que les éléments du calcul intégral. Mais il existe un procédé beaucoup plus élégant et plus court, qui dérive de la méthode générale de résolution des *équations différentielles linéaires* à coefficients constants et sans second membre. (On sait que les équations différentielles *linéaires* sont celles dans lesquelles la fonction inconnue de la variable indépendante et ses dérivées n'entrent qu'*au premier degré*, et ne se *multiplient pas entre elles*.)

Dans ledit procédé, on pose :

$$\omega = A \times \cos m(t - t_1).$$

en représentant par :

A et m deux *constantes*,
t_1 une valeur déterminée de t, que dans notre exemple nous prendrons pour repré-



ω_1 étant la demi-amplitude de chaque oscillation simple, on a évidemment :

$$\textit{constante} = K\omega_1^2.$$

Dès lors il vient :

$$I\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = K(\omega_1^2 - \omega^2).$$

D'où :

$$dt = \sqrt{\frac{I}{K}} \times \frac{d\omega}{\sqrt{\omega_1^2 - \omega^2}} = \sqrt{\frac{I}{K}} \times \frac{d\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}};$$

$$t = \sqrt{\frac{I}{K}} \times \left(\text{arc sin} = \frac{\omega}{\omega_1}\right) + \textit{nouvelle constante.}$$

Or on a évidemment :

$$T = \left(\text{la val}^r \text{ de } t \text{ pour } \omega = \omega_1\right) - \left(\text{la val}^r \text{ de } t \text{ pour } \omega = -\omega_1\right) = \sqrt{\frac{I}{K}} \times \left[(\text{arc sin} = 1) - (\text{arc sin} = -1)\right];$$

soit enfin :

$$(53) \qquad T = \pi\sqrt{\frac{I}{K}}.$$

Donc le mouvement du régulateur est bien isochrone, dans l'hy-

---

senter l'instant où la vitesse d'oscillation s'annule, et où $\omega = \omega_1$, ce qui donne évidemment $A = \omega_1$.

De l'équation de départ ci-dessus, on tire :

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + Am^2 \times \cos m(t - t_1) = 0.$$

Identifions cette relation avec l'équation $\frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{K}{I}\omega = 0$, qu'il s'agit d'intégrer. Pour $t = t_1$, et conséquemment pour $\omega = \omega_1$, on trouve :

$$\frac{K}{I} = \frac{Am^2}{\omega_1}, \text{ et par suite } = m^2.$$

De là il vient :

$$m = \sqrt{\frac{K}{I}}.$$

Dès lors ladite équation de départ donne :

$$(t - t_1) = \frac{1}{m} \times \left(\text{arc cos} = -\frac{\omega}{A}\right) = \sqrt{\frac{I}{K}} \times \left(\text{arc cos} = \frac{\omega}{\omega_1}\right).$$

En faisant, dans cette dernière relation, $\omega = -\omega_1$, la différence $(t - t_1)$ représentera évidemment le temps d'une double oscillation, soit T ; et on aura :

$$T = \sqrt{\frac{I}{K}} \times (\text{arc cos} = -1) = \pi\sqrt{\frac{I}{K}}.$$

pothèse spéciale où nous nous sommes placé, d'une valeur proportionnelle à l'écart angulaire pour le moment de toutes les forces qui l'actionnent, et d'une valeur constante pour son moment d'inertie.

Cette hypothèse, qui est *suffisante* pour la solution du problème en vue, n'est pas *indispensable* pour cette solution. En d'autres termes, celle-ci peut être réalisée dans d'autres conditions (n° 90). Quoi qu'il en soit, comme la seule force dont on dispose en réalité pour arriver au résultat voulu est l'*action du spiral*, on comprend que c'est de ce côté qu'ont dû se porter dès l'abord les efforts des savants qui ont traité la *question de l'isochronisme*. Aussi est-ce la théorie des spiraux qui a sollicité leur principale attention.

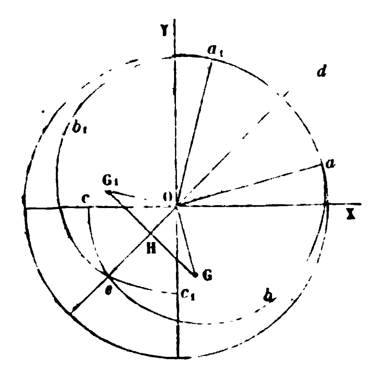
* **N° 88. Théorie des spiraux isochrones avec courbes terminales.** — M. Phillips est le premier qui ait abordé à fond la théorie du spiral. Pour résoudre le problème de l'isochronisme à la manière de ce savant, on fait d'abord abstraction dans l'équation (52) du numéro précédent, des termes $\Sigma J\varphi(\omega)$ et $\Sigma kf(\omega)$.

A cet effet, on s'impose comme *première condition*, relativement accessoire du reste, que les deux forces extérieures actionnant les extrémités c et c_1, *fig.* 33, aient sans cesse un moment résultant nul. On parvient à ce résultat, en remarquant que, dans le système considéré, les points c et c_1 peuvent toujours être pris *à posteriori* à égale distance de O, et que les choses sont toujours combinables de façon que lesdites forces aient même intensité ainsi que même direction par rapport à leurs bras de levier respectifs Oc et Oc_1. D'ailleurs, le plus souvent le point d'attache de chaque courbe terminale, au lieu d'être son extrémité libre elle-même c ou c_1, est le point e, qui correspond à l'intersection des projections de deux courbes sur le plan perpendiculaire à l'axe du spiral, et qu'on aperçoit aussi en *vue* 2°, *fig.* 29.

Comme *seconde condition*, bien autrement importante que la première, et *fondamentale*, on se propose d'entre-détruire les actions élastiques *radiales du spiral* (n° 89), ce qui implique un couple nul de la part de ces forces, et une annihilation des frottements latéraux des pivots du balancier. On suppose, en outre, que les parties du terme général $\Sigma kf(\omega)$, *indépendantes* desdits frottements latéraux, sont négligeables, ce qui a été légitimé par M. Villarceau, sous de certaines réserves, toutefois, pour diverses de ces parties (n° 92). On admet ensuite que le moment d'inertie du spiral est négligeable vis-à-vis

celui du balancier, ainsi du reste que nous l'avons supposé pour l'équation générale (52).

Fig. 33, relative à la théorie des spiraux isochrones avec courbes terminales.



Ces hypothèses faites, il s'agit de déterminer la forme du spiral de façon que, outre la réalisation de la *seconde condition* sus-énoncée, elle conduise, comme *troisième condition* non moins *fondamentale* que la seconde, à rendre F(ω) égale à ω, et par suite de façon à obtenir l'isochronisme de la même manière que dans le cas traité à la fin du numéro précédent.

— L'étude de M. Phillips a porté aussi bien sur le spiral *plat* que sur le spiral cylindrique (n° 83). Nous nous bornerons, bien entendu, ici, à ce dernier spiral, qui est celui des chronomètres. La question se réduit alors à satisfaire aux conditions *deux* et *trois* susmentionnées, par la détermination de la forme qu'il conviendra de donner aux courbes *terminales abc* et $a_1b_1c_1$, *fig.* 33, du spiral, c'est-à-dire aux deux courbes destinées à relier les deux extrémités de celui-ci, d'une part, à la *virole* du balancier, et, d'autre part, au *piton* vissé au pont du balancier (n° 83).

Pour remplir la condition *deux*, il faut que le spiral s'ouvre et se ferme bien concentriquement à l'axe, en ne faisant que changer de rayon. Ce résultat s'obtient en choisissant deux courbes *terminales* symétriques par rapport à la bissectrice O*d* de l'angle des rayons menés aux encastrements, et jouissant en outre des deux propriétés très-simples que voici :

1° Le centre de gravité G (ou G_1) de chacune d'elles, doit se trouver sur la perpendiculaire OG élevée du centre O du spiral au rayon O*a* allant de ce centre au point *a*, où la courbe terminale se détache des spires.

2° La distance G_1G entre les deux centres précédents doit être une troisième proportionnelle au rayon des spires O*a* et à la longueur *abc* ou $a_1b_1c_1$ de chaque courbe terminale elle-même.

Notons, en passant, que, pour tracer par les points *a*, *c* (ou a_1, c_1), supposés donnés, une courbe jouissant de ces propriétés, on procède par tâtonnements géométriques, en modifiant successive-

ment une courbe tracée au jugé et normale au rayon O*a*. Il va de soi qu'il y a une infinité de solutions, et que rigoureusement la forme obtenue ne convient que pour la distance considérée du point *a* par rapport au centre O, distance qui dépend de la position corrélative du balancier dans son oscillation.

Quoi qu'il en soit, on reconnaît qu'une fois la *deuxième* condition remplie à l'aide des courbes terminales dessinées comme il vient d'être dit, le centre de gravité du spiral tout entier se trouve en même temps, et *ipso facto*, sur l'axe du balancier. Ceci se voit en remarquant que le spiral peut être considéré comme composé : 1° d'un nombre entier de spires commençant et finissant en *a*; 2° des deux courbes terminales; 3° de l'arc aa_1. Or le centre de gravité des spires est évidemment en O; et en combinant les centres de gravité G et G_1 des courbes terminales avec celui de l'arc aa_1, on trouve aussi ce même point O. D'un autre côté, M. Phillips a établi que la *troisième* condition précitée était satisfaite, du moment que le *centre de gravité du spiral tout entier coïncidait sans cesse avec l'axe du balancier.* — Il suit de là que les deux conditions *fondamentales* voulues pour réaliser l'isochronisme des oscillations, au moins dans les hypothèses où s'est placé M. Phillips, se trouvent obtenues du *même coup* par une *même forme* déterminée des courbes extrêmes. D'ailleurs, le spiral s'ouvrant et se fermant concentriquement à son axe de figure, l'influence de l'inertie de ce ressort est à peu près annulée, et se trouve, du reste, à même de l'être encore davantage par une diminution du rayon des spires, ainsi que l'a démontré M. Caspari (n° 93).

La concomitance ci-dessus est d'une grande importance, en raison de ce que, si l'une des deux conditions *fondamentales* dont il s'agit n'est obtenue qu'à peu près, l'autre se trouve l'être aussi à peu près. Il en résulte pour *l'isochronisme* des oscillations, une réalisation incomparablement plus complète que si les choses se passaient autrement. — Ainsi, pendant que le balancier oscille, les courbes terminales se déforment un peu; et dans leurs déformations, elles ne satisfont pas constamment à la condition qui fait disparaître la pression de l'axe du balancier sur ses supports; car cette condition n'est rigoureusement réalisée, avons-nous prévenu plus haut, que pour une position déterminée du balancier. Mais d'après la concomitance dont on vient de parler, cette circonstance ne doit avoir qu'une influence insignifiante sur la durée des oscillations, surtout si les courbes en

question se déforment très-peu pendant que le balancier oscille, ce qu'on obtient en donnant à la partie héliçoïdale du spiral une grande longueur relativement à ces courbes.

⁎ **N° 89. Équation de départ de la théorie des spiraux isochrones avec courbes terminales. Expression de la durée de leurs oscillations.** — Nous ne reproduirons pas la savante analyse qui a conduit M. Phillips aux importants résultats que nous venons d'énoncer. Mais nous indiquerons la mise en équation du problème, en suivant pour cela une méthode un peu plus simple que celle de l'éminent académicien, auquel reste le mérite d'avoir été le premier à donner la solution de la question. Notre méthode se rapproche de celle qu'a suivie M. Résal dans le tome III de son *Traité de mécanique générale.*

Préalablement, étudions les diverses *actions élastiques* d'un spiral. Occupons-nous d'abord de son *moment d'élasticité.* — Lors de l'enroulement ou du déroulement d'un spiral, toute section normale à la longueur de celui-ci éprouve, par le fait du refoulement des fibres longitudinales du métal sur elles-mêmes d'un côté du ressort et de leur étirement de l'autre côté, une rotation autour d'une des fibres en hauteur occupant sa partie centrale, et qui est en principe parallèle à l'axe de déroulement ou d'enroulement. Cela compris, on appelle *moment d'élasticité*, le moment, par rapport à ladite fibre, des efforts que les forces moléculaires voisines de la section considérée, et qui constituent ici l'élasticité du métal, opposent au mouvement de cette section pour une rotation *fictive* égale à l'unité angulaire, en supposant d'ailleurs que le ressort en vue a 1 *mètre de long* au repos. On démontre expérimentalement que, pour un angle *réel* de rotation ne dépassant pas les limites de l'élasticité de la pièce, le moment y relatif est proportionnel à cet angle réel. L'expérience prouve encore que si le ressort a L^m de longueur au lieu de 1^m, il faut diviser le résulat par L, résultat que nous aurons à invoquer plus loin. — Soient maintenant :

z et u les coordonnées d'un point quelconque de la section d'un spiral par rapport à la fibre invariable de cette section prise pour axe des u, et d'une perpendiculaire à cette fibre prise pour axe des z ;

ε le *coefficient d'élasticité*, c'est-à-dire la traction en Kg par $m.c.$, correspondant à un allongement de 1^m subi par un ressort ayant lui-même 1^m de long au repos Aux environs de 15° de température, ce coefficient vaut pour l'acier $20^{kg} \times (1000)^3$; mais il s'affaiblit à mesure que la température augmente, suivant une loi qui n'est pas connue.

D'après cette légende, l'expression générale du *moment d'élasticité*

E, entendu comme il en a été convenu plus haut pour une section considérée dans un *ressort de 1 mètre de long*, est représentée par :

$$E = e \iint z^2\,dz\,du = e \times \textit{moment d'inertie de la section par rapport à la fibre invariable de celle-ci.}$$

Conformément à cette formule, le moment d'élasticité d'un spiral de 1^m de long vaut $e \times \frac{\pi r^4}{4}$, pour une section circulaire de rayon r; et $e \times \frac{ab^3}{12}$ pour une section rectangulaire, de hauteur a dans le sens de l'axe de déroulement et d'enroulement du spiral, et de longueur b dans le sens perpendiculaire audit axe. Dans tous les cas, le moment qui nous occupe devra, *in petto*, être regardé comme une fonction de la température, tant à cause des variations des dimensions de la section avec cet élément que du changement de e signalé dans la légende ci-dessus. Les deux effets ainsi produits sont de sens contraires. Mais, d'après l'expérience, le dernier l'emporte toujours de beaucoup sur le premier; et, en somme, ledit moment diminue avec la température.

Tout ce qui précède étant bien compris, appelons encore :

- L la longueur totale du spiral;
- s une longueur d'arc quelconque de celui-ci, abstraction faite de son épaisseur;
- ρ, ρ_1 les rayons de courbure en un point de cet arc, lorsque le spiral est au repos, d'une part, et, d'autre part, lorsqu'il est déformé par suite de l'angle d'écart ω du balancier d'avec sa position d'équilibre;
- θ, θ_1 les inclinaisons de ρ, ρ_1 sur l'axe OX, *fig.* 33.

Le spiral ayant son extrémité fixe en c et son extrémité libre en c_1, *fig.* 33, se trouve soumis d'un bout à l'arrêt que lui oppose le point de fixation, et, de l'autre bout, aux efforts du balancier; ces efforts donnent naissance aux diverses actions de l'élasticité du métal. Or, le spiral peut être regardé comme formé d'une série de petites tranches métalliques d'épaisseur ds, et dès lors existant au nombre de $\frac{s}{ds}$ dans la longueur s. Les actions élastiques consistent principalement en un couple provenant de la somme de tous les petits couples d'enroulement ou de déroulement se produisant entre chacune desdites tranches du spiral, comme il a été expliqué ci-dessus. — Il importe de remarquer que la longueur du levier Oc, formé par le rayon de la virole du balancier aboutissant au point d'attache du spiral, n'a aucune influence sur le moment du couple en question, qui commande le balancier. Cette longueur pourrait être nulle,

comme cela est même nécessaire (n° 95) pour mettre le fonctionnement du spiral complétement à l'abri des déformations particulières de celui-ci dues aux variations de la température. Afin d'éviter les idées fausses, on ne saurait trop insister sur ce fait, dont la raison d'être réside d'abord dans l'annulation sans cesse ménagée entre eux (n° 88), des moments des forces extérieures qui actionnent les deux extrémités du spiral ; et en second lieu, dans le droit (n° 87) de considérer, pour chaque position du régulateur, les actions élastiques exprimées conformément aux lois de l'élasticité, comme agissant sur l'ensemble du spiral de la même manière que si c'était un corps rigide.

En tout état de cause, lesdites *actions* élastiques comprennent aussi la résistance au glissement que les tranches tendent à éprouver les unes par rapport aux autres, et qui donnent lieu à des forces *radiales*. — Il y aurait encore à la rigueur à considérer l'intervention de l'élasticité s'opposant à un écartement des tranches, et qui correspond à l'allongement même du ressort. Mais cet allongement étant tout à fait négligeable, nous n'avons pas à nous occuper de cette troisième espèce de force élastique.

— D'après la *deuxième* condition du n° 88, la forme du spiral doit être telle, que les forces élastiques *radiales* s'annulent entre elles. Dès lors, le terme $KF(\omega)$ de l'équation générale (52) du n° 87 ne doit comprendre que le couple général d'enroulement ou de déroulement. De plus, il n'y a pas à tenir compte du moment provenant des frottements latéraux des pivots du balancier dans $\Sigma k\varphi(\omega)$; et eu égard à la supposition que les autres parties de ce terme sont négligeables, il disparaît complétement. — Introduisons maintenant la *troisième* condition du n° 88, ce qui consiste à s'arranger de façon qu'on ait :

$$\textit{Couple général d'enroulement ou de déroulement} = K\omega.$$

Voyons comment il y a moyen de réaliser ce résultat. D'après les définitions données plus haut de θ et de θ_1, l'angle de contingence en un point quelconque du spiral, a $(d\theta_1 - d\theta)$ pour expression de sa variation relative à un angle d'écart ω du balancier. Mais cette quantité $(d\theta_1 - d\theta)$ représente évidemment aussi l'angle dont chaque tranche du spiral tourne autour de sa fibre invariable. Conséquemment, en tenant d'ailleurs compte de ce que le spiral a une longueur L, on trouvera que, d'après les explications ci-dessus, chaque couple élémentaire composant a manifestement pour expression générale : $\frac{E}{L} \times (d\theta_1 - d\theta)$. Dès lors, il viendra :

$$\textit{Couple général d'enroulement ou de déroulement} = \frac{E}{L} \times \left(\int_{s=0}^{s=L} d\theta_1 - \int_{s=0}^{s=L} d\theta \right).$$

Or chacune de ces intégrales forme la somme des angles de contingence du spiral, d'une part, pour un angle d'écart ω du balancier, et, d'autre part, pour la position d'équilibre. En second lieu, remarquons que la longueur du spiral demeure constante. Notons aussi, point sur lequel on ne saurait trop insister, que les angles d'encastrement des deux extrémités du spiral, par rapport aux pièces auxquelles elles se relient, ne varient nécessairement pas. — Dès lors, on conclura que la différence des deux sommes d'angles est égale à l'angle décrit par le rayon *oc*, *fig.* 33, qui appartient à la virole du balancier, et par suite est égale à l'angle d'écart ω de celui-ci. Nous obtiendrons donc définitivement :

$$\textit{Couple général d'enroulement ou de déroulement} = \frac{E}{L} \times \omega.$$

équation qui cadre bien avec le résultat sus-mentionné qu'il s'agissait de réaliser.

— La relation trouvée entraîne implicitement les conditions de la forme du spiral. En effet, l'expression précitée de chaque couple élémentaire peut s'écrire :

$$\frac{E}{L} \times \left(\frac{d\theta_1}{ds} - \frac{d\theta}{ds} \right) \times ds = \frac{E}{L} \times \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho} \right) ds,$$

eu égard à l'expression bien connue de tout rayon de courbure $\rho = \frac{d\theta}{ds}$.

D'où l'on tire que le couple général a aussi pour expression :

$$\frac{E}{L} \times \int_{s=0}^{s=L} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho} \right) ds.$$

Il vient donc comme équation de condition de la forme du spiral :

$$\int_{s=0}^{s=L} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho} \right) ds = \omega.$$

Avec des spiraux suffisamment longs, on peut s'imposer la condition que les parties primitivement héliçoïdales de la fibre moyenne demeurent sans cesse sur un même cylindre de rayon variable. En d'autres termes, pour ces parties on peut poser $\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho} \right) =$ *constante*. Dès lors, il en sera de même ici de la portion de l'intégrale ci-dessus qui s'y rapporte. Donc le reste de cette intégrale, soit la portion qui est afférente aux deux courbes terminales, devra,

de son côté, rester constante, ce qui peut s'obtenir en prenant pour chacune de ces portions *la différence* $\left(\frac{1}{\rho'_1} - \frac{1}{\rho'}\right)$ pareillement constante, et égale à $\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho}\right)$. Or, en remarquant que, par suite des *constantes* en question, on peut ne laisser que ds sous le signe intégrale, et que $\int_{s=0}^{s=E} ds = L$, on parvient à la double équation :

$$\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho}\right) = \left(\frac{1}{\rho'_1} - \frac{1}{\rho'}\right) = \frac{\omega}{L}.$$

C'est de ces équations que l'on déduit les propriétés énoncées au n° 88, dont doivent jouir les courbes terminales. Mais ces déductions demandent des développements analytiques trop longs et trop délicats pour être donnés dans cet ouvrage.

— En tout état de cause, on tire évidemment de ce qui précède $K = \frac{E}{L}$; et par suite, pour les spiraux à courbes terminales, l'équation (53) du n° 87 donne pour la durée des oscillations simples :

(53 *bis*) $$T = \pi \sqrt{\frac{IL}{E}}.$$

⁎ **N° 90. Théorie des spiraux isochrones sans courbes terminales : disposition de Berthoud.** — M. Caspari a repris sous un point de vue entièrement général la question de l'isochronisme des chronomètres, et a cherché à l'établir indépendamment de toute courbe terminale pour les deux extrémités du spiral. Il s'est reporté, à cet effet, à la règle expérimentale bien connue de Pierre Leroy, et qui peut se formuler ainsi :

« Il y a dans tout spiral d'une étendue suffisante (10 à 12 tours)
« une *certaine* longueur, où toutes les vibrations, grandes et petites,
« sont isochrones. Au-dessous de cette longueur, les grandes vibra-
« tions sont plus rapides que les petites; et au-dessus, c'est le
« contraire qui a lieu. »

Cette règle, qui remonte à un siècle, a pendant longtemps servi de guide aux chronométriers, qui obtenaient alors par tâtonnements la longueur *cherchée* à donner dans chaque cas au spiral. Ce n'est qu'à mesure qu'un isochronisme plus parfait a été exigé, qu'on s'est aperçu de la défectuosité de la règle de Leroy, et qu'on a été conduit à se servir des courbes terminales, qui soustraient à l'obligation de donner à la longueur du spiral une valeur *déterminée*.

M. Caspari a pensé que la règle en question ne se trouvait en défaut que parce qu'elle n'était pas suffisamment précise. Il a été confirmé dans son opinion par l'usage, conservé dans l'atelier des Berthoud, d'avoir recours exclusivement à la longueur du spiral, et aucunement à des courbes terminales, pour obtenir l'isochronisme. La règle employée n'est en définitive qu'une explicitation de celle de Pierre Leroy, et peut s'énoncer comme voici, en y introduisant les nombres proposés par M. Vissière :

Dans tous les spiraux cylindriques, il y a deux points d'attache correspondant à N *spires entières* + 90° *et à* N *spires* + 270°, *où les vibrations d'inégale étendue sont isochrones. Entre ces deux longueurs, les grandes vibrations sont plus rapides que les petites ; et en dehors, c'est le contraire qui a lieu.*

Pour justifier théoriquement cette règle, M. Caspari a introduit dans le terme $KF(\omega)$ de l'équation (52) du n° 87, le moment des actions *élastiques radiales* du spiral, lesquelles ne s'entre-détruisent plus ici par suite de l'absence des courbes terminales. L'expression de ce moment ne se présente pas, il est vrai, sous forme finie; mais on peut le développer en série, eu égard à la petitesse desdites pressions. Les choses ainsi comprises, l'équation s'intègre facilement, et conduit à la règle sus-mentionnée. De son côté, la durée constante des oscillations conserve présentement la même expression (53 *bis*) que celle du n° 89 concernant les spiraux à courbes terminalés.

Il importe de remarquer que, parmi toutes les forces susceptibles d'agir sur le balancier, M. Caspari a démontré que les frottements latéraux engendrés par les actions élastiques radiales n'altèrent pas l'isochronisme des oscillations. Il a en outre admis, de même que nous l'avons fait au n° 88, qu'on pouvait toujours s'arranger de façon à faire annuler entre eux les moments des deux forces extérieures appliquées aux deux extrémités du spiral. Enfin, il a omis aussi de tenir compte du moment d'inertie du spiral, ainsi que des autres actions secondaires que M. Phillips a laissées de côté (n° 88) dans sa recherche des courbes terminales. Ce mode d'opérer est justifié dans ce nouveau cas, comme dans le premier, par les résultats du mémoire (n° 85) de M. Villarceau, toutefois encore dans les limites expresses où quelques-uns de ces résultats ne cessent pas d'être applicables (n° 92).

— En résumé, les points caractéristiques sus-spécifiés divisent la spire en deux régions jouissant de propriétés opposées; c'est-à-dire qu'en pinçant le spiral en différents points d'une des régions, les

petits arcs sont accélérés; tandis qu'ils sont retardés pour l'autre demi-circonférence. D'après M. A. L. Berthoud, dans les formes usuelles des spiraux, le maximum de retard ou d'avance peut aller jusqu'à 80 secondes par jour. — Cette propriété fait comprendre facilement comment il y a moyen d'arriver, par voie de tâtonnement, à l'isochronisme dans les limites exactes qu'on se propose d'atteindre. De l'avis de quelques artistes, on y parviendrait plus facilement et plus sûrement par cette voie que par toute autre.

Selon M. Caspari, les fabricants qui rejettent cette manière de procéder craignent les effets d'usure provenant des pressions latérales. De plus, une sorte de sentiment instinctif d'élégance est choquée chez eux par les déformations, en apparence irrégulières, qu'éprouve le genre de spiraux dont il s'agit. M. A. L. Berthoud, qui s'en sert avec succès, n'a pourtant pas remarqué qu'il y ait plus souvent à remplacer des pièces frottantes dans ses montres que dans celles d'artistes qui adoptent des courbes terminales, pourvu que l'huile ne manque pas, ce qui constitue une condition générale et essentielle. Il faudrait en conclure que ces frottements sont de peu d'importance pour la conservation ou l'usure des pièces. Toutefois, on doit remarquer que les chronomètres Berthoud ont des balanciers très-légers, exécutant des vibrations d'amplitude modérée. — Il importe de noter qu'avec ces combinaisons, si les chances de détérioration sont moindres, on n'est pas aussi assuré de la parfaite régularité des marches sous l'influence des dérangements auxquels les montres sont exposées.

* **N° 91. Spiraux isochrones sans courbes terminales; dispositions diverses.** — La marine possède des chronomètres de M. Winnerl, qui marchent sans usure sensible depuis trente ans et plus, et dans lesquels pourtant le spiral ne possède pas de courbes terminales théoriques. Mais ce constructeur s'arrange toujours de façon à obtenir un spiral qui conserve, en se développant, la forme d'un cylindre droit, avec ses génératrices restant constamment parallèles à l'axe. Les pressions latérales, dans ce cas, sont régularisées et non supprimées; de plus l'axe a un mouvement de translation sans balancement. M. Winnerl, qui jouit d'une autorité technique bien justifiée par ses succès, admet que cette excentration est la condition nécessaire de l'isochronisme pratique. — Laissant de côté le fond de ses explications, nous nous bornerons à remarquer que ladite excentration n'augmente pas indéfiniment avec l'amplitude extrême dans les spiraux des bons chronomètres; elle semble avoir un maximum dans le voisinage des

amplitudes limites pour lesquelles la pièce est réglée. M. Caspari n'a pu réussir à faire rentrer ces spiraux dans sa théorie du numéro précédent. Mais on peut concevoir, d'après les principes qui découlent de cette théorie pour le fonctionnement des spiraux sans courbes terminales, comment certaines formes de spiral réussissent. — Quant à présent, la théorie est impuissante à guider la pratique pour ces formes particulières; et l'expérience seule peut prononcer. M. Winnerl réalise presque sûrement l'isochronisme dans les limites voulues. M. Vissière aussi y est arrivé dans un grand nombre de chronomètres que la marine possède.

Enfin A. Bréguet a employé parfois deux spiraux opposés. Il cherchait par ce moyen à régulariser, sinon à supprimer les frottements latéraux des pivots. Cette expérience, refaite par M. Berthoud, n'a pas toujours donné de bons résultats; et l'innovation du célèbre horloger n'a pas acquis droit de cité dans l'art chronométrique.

* **N° 92. Justification des hypothèses sur les valeurs négligeables de certaines forces dans la théorie des spiraux isochrones.** — Les théories de MM. Phillips et Caspari négligent, avons-nous vu aux n°s 88 et 90, diverses forces actionnant l'ensemble du régulateur. M. Villarceau, dans son mémoire cité au n° 85, est venu combler cette lacune, en étudiant l'influence sur l'isochronisme desdites forces négligées. Il a introduit à cet effet des valeurs convenables dans le terme $\Sigma kf(\omega)$ de l'équation (52) du n° 87, et s'est livré à une discussion approfondie des résultats analytiques auxquels conduisent ces diverses introductions. Il a laissé de côté le frottement des pivots du balancier, susceptible de provenir d'une pression latérale produite par le spiral. Car cette pression se trouve justement annulée par les courbes terminales de M. Phillips; et avec les autres spiraux isochrones, l'expérience constate qu'elle est insensible. Mais, en revanche, il a considéré le frottement au contact du plan horizontal sur lequel s'appuie le pivot inférieur du balancier, ainsi que l'action provenant de l'imparfaite fluidité des huiles qui lubrifient les pivots et de la résistance de l'air au mouvement du régulateur. Il a prouvé que ces diverses circonstances n'altèrent pas la durée des oscillations, tout en pouvant, bien entendu, affecter leur amplitude. Ces résultats, en ce qui concerne la résistance de l'air, ont du reste été confirmés par les expériences faites en Danemark, et renouvelées récemment à l'observatoire de Kiel.

M. Villarceau a étudié ensuite l'étendue des effets produits sur

l'isochronisme par les impulsions de la roue d'échappement sur la *levée* du balancier, *combinées* avec les causes précédentes. Il a établi que l'altération de la durée de l'oscillation est encore négligeable, sous la *condition expresse* que le balancier reçoive son impulsion dans une position très-voisine de sa position d'équilibre. — Quand il n'en est pas ainsi, et que l'échappement est disposé de façon à produire le choc à une certaine distance *avant* (ou après) le passage du balancier par sa position d'équilibre, il en résulte une *accélération* (ou un ralentissement) de la marche avec la diminution de l'amplitude des oscillations.

Quant aux chocs du *doigt* du balancier contre la détente pour la soulever, leur influence n'a pas été étudiée. Mais comme ces chocs sont incomparablement plus faibles que les impulsions ci-dessus, leurs effets doivent certainement être tout à fait négligeables.

∗ **N° 93. Imperfections de l'isochronisme; moyens d'y remédier.** — Les travaux de M. Phillips ont fait époque dans la chronométrie; car ils sont venus prouver théoriquement les règles auxquelles l'expérience avait conduit beaucoup d'artistes, depuis Pierre Leroy, et en dehors de la pratique de celui-ci, pour améliorer l'*isochronisme*. Toutefois, l'opinion des horlogers sur les spiraux à *courbes terminales* n'est pas entièrement unanime. Les uns appliquent ces courbes telles quelles; d'autres les modifient légèrement; d'autres encore les rejettent comme ne donnant pas un isochronisme assez parfait. Il y en a enfin qui ont conservé le spiral exactement cylindrique, mais réglé comme longueur suivant les indications du n° 90.

Il est certain pourtant que la théorie des spiraux que nous venons d'esquisser dans les numéros précédents, se trouve établie sur des bases mathématiques. Faut-il donc croire que c'est faute d'habileté qu'un grand nombre d'artistes ne parviennent qu'à un isochronisme insuffisant; ou faut-il en chercher la raison dans des circonstances dont la théorie n'a pas tenu compte, soit dans des lacunes de cette théorie?

M. Caspari s'est proposé de résoudre ce problème, c'est-à dire de rechercher les lacunes susceptibles d'affecter les démonstrations indiquées ci-dessus. — Il a d'abord remarqué que *l'effet de l'échappement* combiné avec les résistances des pivots et de l'air, et supposé négligeable aux n°s 88 et 90, ne l'était pas en principe; car, comme nous venons de le dire au n° 92, d'après M. Villarceau, il n'en est ainsi qu'en faisant produire le choc de l'échap-

pement dans la position d'équilibre du balancier. — Viennent ensuite les perturbations dues aux déformations du balancier sous l'influence de *l'action centrifuge* développée pendant les oscillations. Toutefois, cet effet a été calculé par M. Phillips; et il peut être réduit par le choix d'une forme et de dimensions convenables pour le balancier. — Les deux circonstances précédentes sont une cause *d'accélération* des petites amplitudes. M. Caspari a découvert par l'analyse une troisième cause d'accélération de ces mêmes amplitudes : elle est due au moment d'inertie du spiral, négligé dans la formule générale (52) du n° 87. Il a trouvé que la masse d'un spiral, supposé théorique, exerce sur les oscillations un effet d'avance d'autant plus grand que les amplitudes sont plus petites; du reste cette accélération des petites oscillations est proportionnelle *directement* au carré de l'amplitude et à la quatrième puissance du rayon du spiral, et *inversement* au carré du nombre de spires. — Il importe donc, en principe, de diminuer, autant que cela se peut, le rayon du spiral. On arrive ainsi aux mêmes conclusions que F. Berthoud, qui énonçait il y a un siècle ce fait d'expérience : pour qu'un spiral soit isochrone, il faut qu'il soit fort long, et plié en un grand nombre de tours serrés et de petit diamètre. Cela explique aussi une remarque de M. Jacob, qui trouvait l'isochronisme plus facile à réaliser dans les compteurs, qui ont de petits spiraux, que dans les chronomètres, auxquels on en adapte de plus larges et d'un moindre nombre de spires.

De leur côté, les variations de température, en dehors de leur action plus ou moins compensée (n° 95) sur le balancier, viennent affecter les théories précédentes, en changeant la forme du spiral, et surtout en modifiant suivant une certaine loi son moment d'élasticité, comme nous en avons prévenu au n° 89. — M. Phillips a trouvé moyen, avec ses courbes terminales, de soustraire le ressort à l'effet de la modification de forme, par la combinaison indiquée au n° 95. D'autre part, c'est par la *compensation*, dont il est traité dans ce même numéro, qu'on cherche à faire disparaître l'effet *important* de la diminution de la force élastique du spiral avec la chaleur. — Il y aurait encore à la rigueur à faire entrer en ligne de compte l'influence desdites variations sur le moment d'inertie du spiral, et par suite sur l'action de ce moment. Mais cette influence est tout à fait négligeable.

— En résumé, diverses causes concourent à affecter l'isochronisme

du spiral, ou du moins à le rendre plus difficilement réalisable. Avec le système de construction ordinairement en usage, où le choc de la roue d'échappement contre le balancier se produit en avant de la position d'équilibre de cette pièce, il y a généralement *accélération* du mouvement du chronomètre, à mesure que l'amplitude des oscillations va en diminuant. Or la diminution d'amplitude est le principal résultat de l'épaississement des huiles; car, d'après ce qui a déjà été dit en 7° au commencement du n° 87, d'une part, le rouage absorbant alors plus de force, il y a diminution de l'énergie impulsive de l'échappement sur le balancier; et, de son côté, ce dernier devient plus résistant au mouvement, de telle sorte que les amplitudes d'oscillation tombent en moyenne de 450° à 330° dans l'espace de trois ans. On comprend dès lors comment la grande majorité des montres marines prennent de l'avance en vieillissant.

Pour quelques chronomètres, surtout parmi les anciens, on observe parfois l'inverse. Quand cette circonstance n'est pas l'effet d'une avarie grave, elle provient d'habitude de ce que les artistes ont cherché, en travaillant le spiral, à obtenir par tâtonnements l'isochronisme rigoureux, en voulant sur-ajouter au bon effet des courbes terminales, et que, dépassant le but, ils sont arrivés à avoir un ressort donnant du *retard* pour les petites amplitudes. Mais alors les difficultés de la compensation augmentent dans une forte mesure, puisque c'est de l'accélération avec les petits arcs qu'il faut (n° 94) pour aider à parfaire sa réalisation. Aussi, est-ce contre leur gré que les artistes en viennent à une pareille combinaison.

Au reste, en fait, les spiraux à *courbes terminales*, dont le fonctionnement est par ailleurs si satisfaisant, donnent d'ordinaire, en l'état actuel des choses, plus ou moins *d'accélération* aux petits arcs. Ce résultat est généralement admis par les horlogers. On peut même croire que c'est à cette propriété que les courbes théoriques ont dû leur succès auprès de divers constructeurs, eu égard, répétons-le, à ce que *l'accélération* des petits arcs est favorable à la compensation. D'autant que le spiral libre et sans frottements autres que ceux de l'axe du balancier au contact du plan horizontal, comme il est réalisé par l'usage des courbes de M. Phillips, se prête mieux que tout autre à l'obtention de telle accélération que l'on veut, attendu qu'il élimine les perturbations résultant des pressions latérales et du frottement sur les parois du trou.

L'étude des chronomètres de notre marine prouve que la produc-

tion *préméditée* d'accélération aux petits arcs est la pratique de plusieurs artistes. C'est là une chose fâcheuse; et l'on est en droit de penser que la perfection de marche au point de vue de la variation de l'amplitude, qu'offrent parfois de tels chronomètres, s'achète au prix d'inconvénients très-réels, comme nous allons le montrer dans le numéro suivant.

* **N° 94. Principe des spiraux anisochrones.** — Nous venons de dire à l'instant que plusieurs constructeurs emploient, de propos délibéré, des spiraux manquant d'isochronisme ou *anisochrones*, et donnant de l'accélération avec les petites amplitudes. Voici, d'après M. Caspari, le motif qui a fait adopter cette pratique.

Soit seulement que la température en s'abaissant diminue la fluidité des huiles, soit que le froid introduise encore d'autres résistances, l'expérience montre que, bien que la force motrice du spiral reste la même, l'amplitude des oscillations décroît avec la température. Nous verrons d'autre part, au n° 97, qu'un balancier *réglé* de telle manière que les marches à 15° et à 30° soient égales, donne du retard à 0°; et que, dans les cas les plus favorables, ce retard n'est guère inférieur à 4 secondes par jour. — Si donc le spiral est disposé de telle manière que les petits arcs correspondant à la température 0° soient plus rapidement parcourus que les arcs plus étendus qui correspondent aux températures de 20° et 30°, on conçoit comment cet anisochronisme arrive à annihiler le défaut de compensation du balancier. — D'excellents artistes condamnent cette pratique; M. Winnerl rejette les spiraux qui donnent une accélération supérieure à 2 secondes par jour. M. Jacob s'élève avec force contre les spiraux anisochrones : « Sans l'isochronisme, dit-il, il n'est pas de véritable chronomètre. »

En somme, si le procédé dont il s'agit venait à dominer dans la pratique courante, il entraînerait infailliblement les plus fâcheuses conséquences. Et en effet, le défaut d'isochronisme pourrait fort bien ne pas se manifester pendant quelque temps, une année même, dans un chronomètre où la force impulsive de l'échappement resterait assez constante pendant ladite durée, pour n'apporter aucun changement à l'amplitude des arcs du balancier dans les températures moyennes. Mais, à la longue, ce défaut donnerait lieu à des variations notables, alors que les causes diverses, produites par le temps, qui concourent à diminuer cette amplitude, s'ajouteraient aux autres circonstances étrangères à l'isochronisme dont le résultat général est

d'accélérer la marche. C'est pourquoi des chronomètres ainsi réglés ne seraient en réalité que des instruments assez médiocres, et procurant une sécurité trompeuse.

M. Vissière aussi, après avoir expérimenté toutes les méthodes proposées, a fini par s'arrêter à l'isochronisme aussi parfait qu'il est possible de le réaliser.

A l'appui des opinions précédentes, nous citerons des chronomètres à spiral anisochrone huilés récemment, revenus au Dépôt de la marine sans avaries graves, pouvant encore marcher, mais dont un peu d'usure des pivots et des trous avait diminué les amplitudes au delà des limites prévues par le constructeur. Or ces instruments présentaient des marches *en avance* de 25 à 30 secondes sur leurs valeurs primitives.

N° 95. Objet de la compensation et du réglage dans les chronomètres. — Considérant que jusqu'ici nous avons implicitement regardé la *température comme constante*, nous déduirons de tout ce qui précède l'importante conclusion que voici :

Pour une même température, l'isochronisme d'un chronomètre est presque parfait et indépendant de l'âge des huiles, sous les deux conditions suivantes :

1° Employer un spiral cylindrique avec courbes terminales (n° 88), ou sinon proportionné comme longueur conformément à la règle rectifiée de Leroy (n° 90) ;

2° Suivre les indications du n° 93 pour remédier aux lacunes secondaires de la théorie des spiraux isochrones; et en particulier faire en sorte que la roue d'échappement choque le balancier dans une position aussi voisine que possible de la position d'équilibre.

Pour achever d'assurer l'isochronisme d'un chronomètre, il reste à rendre la durée de ces oscillations *indépendante des variations de la température*. Or tout changement de température peut avoir les effets suivants : 1° modifier les dimensions du balancier et par suite son moment d'inertie ; 2° altérer la forme, l'élasticité et même le moment d'inertie du spiral, et conséquemment (n° 93) ses qualités propres d'isochronisme; 3° affecter la fluidité des huiles lubrifiant les divers pivots.

Ce changement est aussi de nature à influencer la condition ci-dessus relative à l'instant du choc du balancier par la roue d'échappement, en ce sens qu'en la supposant réalisée pour une certaine température, rien ne dit qu'elle subsistera avec une autre tempéra-

ture. Car le système formé par le balancier, le spiral et le *tenon* (n° 83) qui sert de point d'attache à l'extrémité du spiral opposé au balancier, comprend plusieurs métaux différents; et dès lors, la figure du spiral ne restant pas semblable à sa figure primitive, la position d'équilibre du balancier variera avec la température. Toutefois M. Villarceau propose de remédier à cet effet par une disposition convenable du point d'attache, consistant à fixer le *tenon* perpendiculairement à une douille cylindrique creuse de même métal, dont l'axe coïnciderait avec celui du balancier, et dont le rayon éprouverait la même dilatation que celui des spires du spiral.

En supposant la condition précédente remplie, ou, sinon, négligeable, il y a à se préoccuper d'annihiler l'influence de la température sur le moment d'inertie du balancier et sur les propriétés du spiral. C'est en cela que consiste le problème de la *compensation*. — Pour bien nous rendre compte des nouveaux phénomènes dont il s'agit, suivons les explications données par M. Caspari dans son mémoire mentionné au n° 85 « *Sur le mécanisme et la marche des chronomètres* ».

Reportons-nous à la formule (53 *bis*) du n° 89 qui donne la durée des oscillations :

$$T = \pi \sqrt{\frac{IL}{E}}. \tag{53 bis}$$

En admettant que la température croisse, que va devenir cette durée? D'après ce qui a été dit au n° 89, le spiral aura son moment d'élasticité E qui diminuera; en même temps, sa longueur L croîtra; ces deux causes feront donc augmenter T. — De son côté, le balancier, supposé *homogène*, c'est-à-dire composé de pièces de même métal, aura son rayon *l* qui croîtra, lui aussi; et, la masse restant invariable, le moment d'inertie I sera augmenté. Il y aura donc encore de ce chef accroissement de T. Dans un pareil chronomètre, tout concourrait pour produire un retard, puisque la durée des oscillations deviendrait plus grande. Dans les montres de poche, on obvie à cet inconvénient en allongeant ou en raccourcissant le spiral à l'aide de la raquette, ce qui permet de faire varier L dans le sens convenable, de façon à conserver au radical de T une valeur constante. Ce procédé serait impraticable dans les chronomètres, parce qu'en raison de l'extrême précision requise, il faudrait effectuer ce réglage toutes les fois que la température varierait. Quant au moment d'élasticité E, on

ne peut songer à y rien changer. Il ne reste donc que le moment d'inertie du balancier sur lequel il y a possibilité d'agir pour combattre le ralentissement dû à la chaleur. De là est venue l'idée de construire le balancier *compensateur*.

Afin d'apprécier l'importance de l'effet des variations de température, on a fait des expériences avec des chronomètres non compensés, c'est-à-dire dont le balancier était homogène. M. Dent, habile horloger anglais, a trouvé avec un balancier de verre :

	marche
à 0°....	$+ 137^s,8$,
à + 19°....	$- 43^s,2$,
à + 38°....	$- 247^s,2$,

soit environ 10 secondes de retard pour chaque degré d'augmentation de la température. Les variations de la marche sont ici sensiblement proportionnelles à celles du thermomètre. M. Airy a trouvé $10^s,5$ environ de retard par degré centigrade. — Enfin, MM. les ingénieurs hydrographes Delamarche et Ch. Ploix ont opéré avec un chronomètre dont le balancier était en laiton. Leur conclusion est que cet instrument représentait un véritable thermomètre retardant régulièrement de 11 *secondes* par chaque degré d'augmentation de la température. Cet effet est d'ailleurs si bien constaté qu'en Angleterre on s'est servi d'un pareil instrument pour mesurer la température moyenne d'une armoire de chronomètres, avec une précision qu'un thermomètre ordinaire permettait difficilement d'atteindre.

— Pour évaluer la part qui revient dans les résultats précédents au balancier et au spiral, reportons-nous encore à la formule (53 *bis*) sus-rappelée, qui donne la durée des oscillations.

Si L et E ne variaient pas, T ne dépendrait que des variations de I. Or le moment d'inertie d'un corps homogène est de la forme ml^2, m étant la masse qui reste la même, et l une longueur soumise à la dilatation. La durée T est donc proportionnelle à l. Le coefficient de dilatation linéaire du laiton est 0,000018 ; une longueur l à la température $\theta°$, deviendra à très-peu près $l(1+0,000018)$ à la température $(\theta+1)°$. Donc la durée de l'oscillation à $\theta°$ multipliée par $(1+0,000018)$ donnera la durée de l'oscillation à la température $(\theta+1)°$. Si, par exemple, à $\theta°$ le chronomètre bat exactement la 1/2 *seconde de temps moyen*, l'intervalle des battements à $(\theta+1)°$ sera $1/2(1+0,000018)$; et la durée

totale des vingt-quatre heures marquées par ce chronomètre, sera égale au nombre précédent multiplié par 86400^s, soit à 86401^s,56, excédant de 1^s,56 celle du jour moyen. Par l'effet du balancier seul, et en faisant abstraction du spiral, le chronomètre retardera donc de 1^s,56 par jour chronométrique, pour chaque degré d'augmentation de température.

Nous pouvons calculer de la même manière l'effet de l'allongement du spiral. Le coefficient de dilatation de l'acier est 0,000012; et comme T est proportionnel à $\sqrt{L}$, 1 degré d'augmentation de la température le fera proportionnel à $\sqrt{L(1,000012)}$ ou à $1,000006\sqrt{L}$. On trouvera de ce chef 0^s,52 de retard diurne. Ajoutons ce retard 0^s,52, avec le précédent 1^s,56; nous aurons 2^s,08 pour le retard résultant dû à l'influence de la dilatation sur le balancier et sur le spiral, en admettant d'ailleurs que l'évaluation des effets de chaque facteur indépendamment de l'autre soit licite, ce qui se justifie analytiquement par cette considération que, les coefficients de dilatation étant des quantités très-petites, la variation d'un des facteurs influe peu sur celle de l'autre.

Retranchant le retard résultant 2^s,08, des 11 secondes mentionnées ci-dessus, comme fournies par l'expérience pour le retard *total* dû à l'action de la chaleur, on trouve que la *diminution de la force du spiral* afférente au changement de valeur précité de son moment d'élasticité, produit à elle seule 9 secondes de retard diurne pour chaque degré d'augmentation de la température. C'est donc là la cause la plus importante de la variation des marches à la chaleur.

La compensation exige donc non-seulement que le rayon du balancier n'augmente pas par la chaleur, mais que son moment d'inertie *diminue* à mesure que la température *croît*. Le balancier, en d'autres termes, doit se contracter à la chaleur; et, bien entendu, se dilater au froid. C'est cette considération qui a suggéré l'emploi des lames bi-métalliques.

— Le problème de la compensation a été résolu depuis bien longtemps; mais il a été repris à de nouveaux points de vue par M. Villarceau dans son mémoire cité au n° 85. De son côté, M. Phillips a trouvé, comme nous l'avons annoncé au n° 93, que les spiraux à courbes terminales pouvaient être soustraits à l'influence des variations de forme dues aux changements de température. Il suffit pour cela que lesdites courbes aboutissent au centre des spires, ou, sinon,

que la connexion du spiral avec l'axe du balancier ait lieu à l'aide de métal de même espèce que celui du spiral.

Abstraction faite de l'influence des variations de température sur la forme du spiral, l'essentiel est de s'occuper de l'action de ces variations sur les autres éléments du spiral, et sur tout le système du balancier lui-même, dont il importe d'avoir bien présente à l'esprit la description donnée au n° 82.

Lorsque la température croît, les moments d'inertie des lames, de la barrette et des masses régulatrices augmentent, en même temps que le *moment* de la force élastique du spiral diminue. Il faut donc que les moments d'inertie des masses *compensatrices* puissent décroître de manière à contre-balancer l'effet des autres changements. C'est pour cela que ces dernières masses ont été placées sur des lames bi-métalliques; le métal extérieur étant plus dilatable que le métal intérieur, les lames se courbent davantage et les masses compensatrices se rapprochent du centre. Ce degré de rapprochement varie avec la position des masses le long des lames; au moyen des vis qui y sont adaptées, on les arrête dans la position jugée la plus favorable.

On doit comprendre que le problème de la compensation ne consiste pas seulement à fixer la place qu'il convient d'assigner aux masses *compensatrices*, mais qu'il s'agit aussi de déterminer la grandeur et le moment d'inertie de ces masses elles-mêmes, eu égard à la distribution de la matière dans les autres parties dont se compose le balancier et à la constitution des lames bi-métalliques. En tout état de cause, on parfait la compensation à l'aide des masses *régulatrices*. Il faut d'ailleurs se préoccuper de préciser, du même coup, l'influence des quantités précédentes sur la *grandeur absolue* de la vitesse du chronomètre, et par suite sur la valeur *intégrale* de sa marche. On en conclut alors la manière de procéder au *réglage proprement dit*, c'est-à-dire la manière d'amener ladite vitesse à être comprise entre des limites données, telles que le chronomètre batte à peu de chose près 86.400 secondes par jour moyen, ce à quoi on parvient (n° 97) en s'aidant particulièrement des masses *régulatrices*, et de leurs vis supplémentaires.

— On ne s'imagine pas aisément l'extrême délicatesse d'action des organes dont il vient d'être question. Ainsi un changement d'une seconde par vingt-quatre heures dans la marche d'un chronomètre est déjà une quantité très-notable dans l'espèce. Or, il y a 86.400 se-

condes par jour; conséquemment il suffit, pour produire ce changement, que chaque oscillation soit diminuée ou augmentée de 1/86400 de sa valeur; et cela s'obtient par un déplacement des masses compensatrices de 1/86400 de leur distance au centre. Dès lors, si cette distance est, comme dans les chronomètres de M. Winnerl, de 27 millimètres, le déplacement sera à peu près de 3 millièmes de millimètre. Pour apercevoir cette quantité, il faudrait un microscope grossissant plus de mille fois *en surface*.

Aussi n'est-ce pas par des mesures directes de longueur ou de poids que les artistes arrivent à régler les montres. C'est en établissant d'abord leur régime d'une manière approximative; puis en observant les variations de leur marche, et les corrigeant par des tâtonnements très-longs et très-minutieux.

* **N° 96. Théorie de la compensation et du réglage des chronomètres. Erreur secondaire.** — M. Villarceau s'est livré dans son mémoire à tous les calculs que nous venons de signaler.

Considérant l'épaisseur des lames comme une quantité très-petite relativement au rayon du balancier, et négligeant les quantités du second ordre, il établit d'abord le point suivant : l'allongement éprouvé par un filet quelconque de la lame bi-métallique est égal à l'allongement subi par un filet situé à la suface de séparation des deux lames, augmenté ou diminué, suivant qu'il s'agit du laiton ou de l'acier, d'une quantité proportionnelle tant à la distance des filets à la surface de séparation qu'à la variation de courbure de cette surface de séparation. — Calculant ensuite les tensions qui résultent de ces allongements, et remarquant que, pour l'équilibre intérieur du corps, il faut que, dans une section quelconque, la somme de ces tensions soit nulle, il établit les équations qui définissent la courbure de la lame déformée en fonction de sa courbure initiale, de ses dimensions et des coefficients de dilatation et d'élasticité des deux métaux. — Il résulte de ces équations que, si la lame est circulaire à une température déterminée, elle restera circulaire quand la température variera, le rayon seul du cercle variant. — On en déduit aussi que le rapport des épaisseurs des lames, correspondant au maximum de déformation ou de sensibilité, est inverse du rapport des racines carrées des coefficients d'élasticité. Ceci donne, dans le cas de l'acier et du laiton, une épaisseur de 1,2 d'acier contre 1,7 de laiton. (Les artistes adoptent généralement 1 d'acier et 2 de laiton; mais M. Ber-

thoud a reconnu par l'expérience que les proportions les plus favorables sont 2 acier et 3 laiton.)

M. Villarceau fait voir ensuite de quelle façon on peut s'assurer, par expérience directe, qu'un balancier remplit bien les conditions de se déformer suivant la loi posée, c'est-à-dire qu'il est bien exécuté.

— Enfin, après avoir établi les formules qui donnent le moment d'inertie des diverses parties du balancier et leurs variations avec la température, il indique comment, en faisant varier certains de ces éléments, notamment les masses, on peut déduire de l'observation des marches du chronomètre, les valeurs les plus convenables desdits éléments pour obtenir une bonne compensation.

A cet effet : — 1° on mesure les diverses masses *compensatrices* et *régulatrices* et leurs moments d'inertie par rapport à l'axe du balancier, après qu'on les a placées dans deux positions différentes et du reste arbitraires. — 2° On observe la marche du chronomètre à diverses températures, dans les deux distributions différentes en question. — 3° On en déduit les corrections à appliquer aux éléments du balancier pour produire une première compensation à l'aide des masses compensatrices, et un premier *réglage proprement dit*. — 4° On observe ensuite la marche du chronomètre à des températures variées; et on en déduit le déplacement que doivent subir finalement les masses compensatrices et régulatrices.

Malheureusement les règles que nous venons d'esquisser ont semblé jusqu'ici inabordables aux praticiens. Il serait bien à désirer que leur partie essentiellement pratique fût rédigée sous forme d'un manuel, comme l'a fait avec le plus grand succès M. Phillips pour ses spiraux.

— Par ailleurs, les opérations précédentes supposent que l'on soit en droit de négliger les termes dépendant du carré des variations de la température. M. Villarceau a prouvé qu'il pouvait généralement en être ainsi, pourvu qu'on rende les lames *bi-métalliques* plus ou moins sensibles, suivant que l'on trouve une valeur soit positive, soit négative ou nulle pour la dérivée seconde, par rapport à la température, de la quantité $\frac{E}{L}$ de la formule (53 *bis*) du n° 89. — Comme c'est la troisième supposition qui se réalise avec les bons spiraux, on doit de ce chef augmenter l'épaisseur desdites lames, ce qui entraîne incidemment l'avantage de restreindre les déformations

du balancier par la force centrifuge, et les inconvénients qui s'ensuivent (n° 93).

— Il importe de remarquer que plus le chronomètre dont on s'occupe est bon et bien réglé, plus il est nécessaire de tenir compte des termes de correction proportionnels au carré de la température, et dont l'influence porte le nom d'*erreur secondaire* en horlogerie.

Les artistes se sont appliqués, avec des fortunes diverses, à détruire l'erreur secondaire par des dispositions particulières. C'est là l'origine du procédé (n° 94) qui consiste à altérer l'isochronisme du spiral; mais de la sorte on corrige un défaut par un autre. Il vaut mieux essayer de modifier le balancier lui-même; tel est le but des compensations additionnelles employées par divers fabricants (n° 98).

M. Villarceau a d'ailleurs montré comment parfois le défaut de compensation des termes du premier degré peut entraîner l'annulation des termes du deuxième, et par suite de l'erreur secondaire.

N° 97. Procédés usuels de réglage des chronomètres. Température de réglage. — A défaut de l'application des principes proposés par M. Villarceau (n° 96) pour la compensation et le réglage proprement dit des chronomètres, double opération que l'on englobe sous le nom unique de *réglage*, les praticiens ont recours aux tâtonnements annoncés au n° 95.

Ces tâtonnements consistent à fixer la position des masses *compensatrices*, de manière que les oscillations du balancier aient la *même durée* pour deux températures très-différentes, τ_1 et τ_2 (d'habitude 0° et 30°, limites correspondant aux températures extrêmes susceptibles d'être subies par les chronomètres dans les navigations habituelles). On ramène ensuite la valeur de la marche dans les bornes voulues (n° 95) à l'aide des masses *régulatrices* et de leurs vis complémentaires. Enfin, on raffine les opérations précédentes en retouchant légèrement aux diverses masses sus-mentionnées.

La possibilité d'égaliser les marches à deux températures données (0° et 30°), provient de la circonstance suivante : afin d'avoir une certaine liberté d'action, on doit avoir des lames bi-métalliques du balancier assez sensibles et déformables, pour que, les masses *compensatrices* étant placées à l'extrémité libre de ces lames, la chaleur ou le froid produise un rapprochement ou un écartement plus considérable que celui qui est nécessaire pour la compensation, en notant

d'ailleurs que ces masses, placées à l'autre extrémité près de la barrette, ne produisent évidemment pas d'effet du tout. Avec la chaleur on aura de l'avance dans la première position, et du retard dans la seconde; et *vice versâ*, avec le froid. Il existe donc un point de la lame pour lequel le chaud ou le froid ne produira ni avance ni retard; et ce point peut se trouver par tâtonnements en déplaçant les masses. — Mais rien ne dit *à priori* que cette égalité obtenue pour deux températures extrêmes s'étendra aux températures intermédiaires. Pour que cela eût lieu, il faudrait, d'après la formule (53 *bis*) du n° 89, qu'avec un accroissement donné de la température, le moment d'inertie du balancier variât d'une quantité proportionnelle à la variation de l'action $\frac{E}{L}$ du spiral. — On cherche, dans tous les cas, à obtenir que la marche soit le plus constante possible entre 0° et 30°. Mais, malgré tous les soins apportés, il arrive d'ordinaire que cet élément varie entre les deux températures extrêmes τ_1 et τ_2 pour lesquelles on a réglé les positions des masses compensatrices. L'expérience prouve que la marche est alors *maximum* à $\frac{\tau_1 + \tau_2}{2} = \tau$. Cette température moyenne τ, au-dessus et au-dessous de laquelle la marche va en diminuant, à peu près symétriquement d'ailleurs, s'appelle *température de réglage*. Les horlogers sont arrivés aujourd'hui à pouvoir réduire à 2 secondes le retard aux températures extrêmes; et un chronomètre qui varie en dehors de ces limites, est regardé comme possédant une compensation défectueuse.

Au surplus, M. Villarceau a prouvé par l'analyse qu'on pouvait parvenir à diminuer de plus en plus le défaut de compensation dépendant de la *première puissance* des variations de la température. Mais, en revanche, on ne saurait alors parvenir, avec un spiral isochrone et avec un balancier circulaire sans compensation *additionnelle*, à annuler l'influence de la *seconde puissance* desdites variations, c'est-à-dire l'*erreur secondaire* (n° 96).

— Depuis quelques années, plusieurs fabricants ont réussi à obtenir des marches oscillant entre des limites excessivement restreintes, pour les diverses températures comprises entre les deux températures extrêmes de réglage. Ils emploient à cet effet une série de toutes petites vis incrustées en des points divers des lames bi-métalliques du balancier. Cette opération demande des tâtonnements infinis et une patience infatigable; mais, selon nous, c'est là un raffi-

nement qui peut être bon pour gagner une prime (n° 106), mais qui n'offre aucun avantage pour la navigation. Car, selon l'opinion fort rationnelle de M. Mouchez, il vaut mieux avoir à sa disposition des chronomètres à marche changeant franchement et suivant une loi nette avec la température, et dès lors rectifiables rigoureusement, que des montres à variations indécises. Il va de soi qu'avec la disposition dont nous venons de parler, ce que nous avons appelé plus haut la *température de réglage* n'existe plus.

— Pour les montres où cette température a sa raison d'être, on peut, d'après une étude faite au Dépôt de la marine, sur près de 2.500 de ces montres, formuler la règle suivante :

Avec un spiral isochrone et un balancier circulaire bien exécuté èt bien réglé, le chronomètre ayant des marches égales entre elles à 0° et 30°, avancera d'au moins 2 secondes à la température de 15°. Réglé à 0° et 15°, il retardera au moins de 4 secondes à 30°. De même, réglé à 15° et 30°, il retardera de 4 secondes à 0°. — Il importe d'ajouter qu'avec les chronomètres imparfaitement compensés, les indications précédentes relatives à la température de réglage cessent d'exister.

Divers artistes suivent pour le réglage une méthode opposée à la précédente. En d'autres termes, ils règlent les chronomètres bien exactement pour une température moyenne donnée τ (d'ordinaire 15°). Puis, ils les soumettent à des températures extrêmes τ_1 et τ_2 (en géneral 0° et 30°), également éloignées dé la température moyenne. Enfin, à l'aide des masses *compensatrices*, ils ramènent les marches correspondant à ces températures à être égales entre elles. Mais la marche va encore ici en diminuant au-dessus et au-dessous de la température τ.

✳ **N° 98. Différentes modifications du balancier normal, suscitées par le besoin d'améliorer le réglage.** — Généralement on conserve le balancier circulaire, à cause de la facilité d'exécution qu'il présente. On se borne à y ajouter certaines dispositions destinées à modifier la loi d'après laquelle les masses se déplacent, et à corriger ainsi l'*erreur secondaire* (n° 96), sans avoir recours à l'emploi défectueux d'un spiral *anisochrone* (n° 94). Presque chaque constructeur possède un système à lui. Nous nous bornerons à indiquer, d'après M. Caspari, les plus intéressants. Rendons-nous bien compte du résultat cherché; et nous comprendrons facilement les divers dispositifs qui ont été imaginés.

Soit un balancier circulaire, réglé pour la température de 15°. Le chronomètre retardera à 0° et 30°; le moment d'inertie du balancier est donc trop grand dans ces deux cas. Or, quand la température passe de 15° à 0°, l'effet des lames est d'éloigner les masses du centre ; et puisqu'en général il y a retard, c'est que les masses s'éloignent *trop*. Il s'agit donc, dans cet intervalle, de restreindre l'éloignement des masses. Quand la température passe de 15° à 30°, on conclura de même que les masses ne rentrent pas assez ; il faut donc accroître ce rapprochement. Ainsi, diminuer le déplacement habituel des masses aux basses températures, l'exagérer à la chaleur : tel est le but à atteindre.

M. Dent, célèbre chronométrier anglais, a décrit dans une brochure plusieurs systèmes imaginés par lui à cet effet.

Un artiste français, M. Vissière, a obtenu de fort beaux résultats en modifiant une des idées de Dent pour l'appliquer au balancier circulaire. Les lames de celui-ci, au lieu de supporter directement les masses, portent deux anneaux bi-métalliques de petites dimensions, ayant la forme de cercles presque complets, et de plus ayant le laiton en dedans, de façon à s'ouvrir à la chaleur, à l'encontre de ce qui a lieu pour les lames. Chaque anneau a un de ses bouts qui s'attache par un bras sur la lame correspondante ; l'autre bout, situé à l'extérieur de la lame, porte une masse compensatrice. Les choses étant combinées de la sorte, si l'anneau s'ouvre ou se ferme, la masse se rapproche toujours de la lame. — Dès lors, avec une augmentation de température, le point d'attache de chaque anneau se rapproche de l'axe du balancier ; en même temps l'anneau lui-même s'ouvrant, la masse fixée au bout libre a sa distance à la lame, et par suite audit axe qui diminue. On a donc une exagération de rapprochement par la chaleur. — On voit facilement qu'au contraire l'éloignement au froid se trouve réduit ; car chaque anneau, tout en se fermant cette fois, détermine, au moins en ce qui le concerne, et aussi bien qu'il le faisait tout à l'heure par son ouverture, un rapprochement de la masse régulatrice d'avec la lame.

— M. Jacob avait eu recours à une combinaison plus simple et plus facile à réaliser. Elle consiste à ajouter à l'axe du balancier une deuxième barrette mobile autour de cet axe.

Les deux barrettes étant superposées, on règle d'abord le chronomètre aux températures de 15° et 30°. Puis, on fait faire à la barrette mobile un petit angle avec la barrette fixe ; et on l'arrête

dans cette position. Les extrémités de cette barrette servent d'écrou à deux vis que l'on amène à toucher exactement les lames bi-métalliques à la température de 15°. La température baissant, le point de contact est arrêté; et le mouvement de déformation de la lame est borné à la partie comprise entre la vis de pression et l'extrémité libre. C'est donc comme si l'on réduisait sa longueur, c'est-à-dire sa sensibilité; et le mouvement des masses qui s'éloignent de la circonférence se trouve ainsi diminué, conformément au *desideratum* exposé plus haut. — La position de la barrette mobile se règle de manière à égaler les marches à 0° et à 15°.

— M. Th. Leroy s'est beaucoup rapproché du but qui nous occupe par un moyen très-simple.

Il ajoute à son balancier circulaire une lame bi-métallique très-sensible (zinc et platine sous une faible épaisseur totale), placée en croix avec la barrette, et portant à ses extrémités de petites masses en platine. Le balancier circulaire fonctionne librement, comme à l'ordinaire. Quant à la pièce auxiliaire, *plane* à la température moyenne, elle se *courbe* verticalement, et d'ailleurs en sens inverse, aux extrêmes; et par suite, dans ces deux cas, les masses auxiliaires très-denses qu'elle porte, se rapprochent légèrement du centre, et produisent un peu d'avance.

— Nous citerons encore la compensation additionnelle Loseby, bien qu'elle ne soit pas employée par nos horlogers français, parce qu'elle est fondée sur un principe tout différent, et qu'elle n'emploie pas de lames bi-métalliques pour compléter l'effet cherché.

A l'extrémité libre des lames du balancier ordinaire, M. Loseby adapte la boule d'un thermomètre à mercure, dont le tube est recourbé et vient aboutir près du centre. Cette boule fait fonction de masse compensatrice, et suit les mouvements de la lame bi-métallique. Mais, à mesure que la température s'élève, une partie du mercure quitte la circonférence et se porte vers le centre, ce qui fait décroître le moment d'inertie plus rapidement. Cet effet peut être gradué par les proportions des tubes et par leur forme. Toutefois, la construction d'un pareil thermomètre ne saurait être parfaite et expose à bien des mécomptes.

— L'Angleterre nous a envoyé dans ces dernières années un nouveau système de balancier très-différent de tous ceux que nous venons de décrire : c'est le *balancier Hartnup*.

Cet appareil a été conçu et exécuté d'après des vues théoriques

propres à l'auteur. L'expérience a donné en partie raison à cette combinaison. M. Winnerl a importé cette nouveauté en France avec un certain succès, qui a engagé depuis M. Dumas et M. Leroy à en tenter l'application à leur tour avec des chances variables. Le succès ne paraît pas toujours assuré; et les artistes qui ont réussi avec le balancier Hartnup, avaient obtenu et obtiennent encore de fort beaux résultats avec le balancier ordinaire. Mais la marine a acquis un certain nombre de montres qui en sont munies. Il ne sera donc pas sans intérêt d'en donner ici la description. Le balancier Hartnup diffère du balancier circulaire : 1° *par la barrette ;* 2° *par la forme des lames et des masses.*

La barrette est remplacée par un système de trois lames planes bi-métalliques situées côte à côte dans un même plan. Celle du milieu est percée d'un trou dans lequel passe l'axe du balancier ; et elle porte à chacune de ses extrémités un talon où vient s'attacher l'une des deux autres lames. L'acier étant en dessus dans les trois lames, l'accroissement de la température a pour effet de ramener vers le centre, en les élevant, les extrémités des lames de côté. A ces extrémités s'adaptent deux arcs bi-métalliques circulaires, mais qui, au lieu d'être limités par des surfaces cylindriques, sont compris entre deux surfaces tronconiques, avec les génératrices des cônes inclinées à 45° sur l'axe. Ces arcs portent des masses compensatrices de forme assez irrégulière. Ils fonctionnent comme les arcs ordinaires; mais ils éprouvent simultanément, de la part de leur barrette bi-métallique respective, un mouvement qui les rapproche du centre et en même temps les fait incliner. Le jeu des masses se compose donc, en définitive, de trois mouvements : deux de translation et un d'inclinaison. Il est aisé de concevoir que la température imprime au balancier des déformations considérables, et en apparence peu régulières.

Cette combinaison, bien que réduisant l'*erreur secondaire* (n° 96), la laisse encore subsister dans une certaine mesure; et elle est plus difficile à régler qu'avec le balancier ordinaire.

— Enfin M. Winnerl a imaginé et réalisé un balancier qui paraît être une solution très-heureuse du problème de la compensation. Bien qu'il s'agisse ici d'une idée qui est encore en expérience, et quoique aucun de nos chronomètres naviguant n'en soit pourvu, l'appareil est en lui-même trop ingénieux pour que nous n'en donnions point une idée succincte.

Conserver l'isochronisme le plus rigoureux du spiral, et produire

la compensation à l'aide d'un balancier d'une exécution simple et pouvant se régler en place, c'est-à-dire sans l'enlever du chronomètre, tel est le problème que s'est posé M. Winnerl.

Sur l'axe du balancier, il existe deux barrettes en acier faisant entre elles un angle un peu plus petit que 90°. L'une de ces barrettes porte à ses extrémités deux écrous *réglants* en platine. La seconde barrette se termine à chacun de ses bouts par un talon, sur lequel on fixe une lame bi-métallique plane et droite. Les lames bi-métalliques sont en acier et laiton, l'acier en dessus. A leur extrémité libre, elles portent deux vis en métal inclinées à environ 45° sur l'horizontale. Sur ces vis sont montés deux écrous en platine, qui ont la forme de solides de révolution, et font office de masses *compensatrices*. — A la température de réglage adoptée, soit à 15°, les lames se trouvent planes. La température variant, elles se courbent; la convexité étant dirigée vers le *haut* si la température *baisse* et vers le bas si elle monte; en même temps, les masses compensatrices tournent d'un certain angle égal au changement de courbure des lames. De là déplacement des masses.

M. Caspari a analysé avec une grande dextérité mathématique les effets de la température sur le balancier Winnerl. Il a ainsi établi que : 1° cet appareil se prêtait très-aisément à la correction de l'*erreur secondaire* (n° 96); 2° l'influence de la déformation centrifuge (n° 93) du balancier sur l'isochronisme, qui se traduit d'ordinaire par une *accélération*, est réduite plus qu'avec tout autre balancier, et peut même être changée en un retard. Or, ce point est capital pour corriger la petite accélération en général inhérente (n° 93) aux spiraux à *courbes terminales*.

Si l'expérience vient à ratifier ces prévisions, il n'est aucun doute que le balancier Winnerl ne soit appelé à devenir d'un usage exclusif.

2e PARTIE. — § II. Variations normales des marches des chronomètres, et variations anormales ou perturbations.

N° 99. Classification des diverses variations des marches des chronomètres. — Les conditions de compensation et de réglage n'ont pas jusqu'ici été réalisées avec toute la perfection voulue. De leur côté, les conditions d'isochronisme rigoureux pour une même

température ne sont pas encore satisfaites complétement. Il suit déjà de là que les marches des chronomètres n'ont pas un degré de constance absolue. Toutefois, les variations qui en résultent ont une certaine régularité, et sont caractérisées par ce fait que, pour une même température et un même âge des huiles, elles reprennent la même valeur.

Mais aux susdites causes d'imperfection viennent s'en ajouter d'autres qui tendent encore à affecter le degré de constance susmentionnée, avec cela d'aggravant qu'elles le font sans aucune régularité, et que leur effet n'a aucune corrélation fixe avec elles-mêmes, et peut se modifier ou disparaître soit à la longue, soit même d'un instant à l'autre. — De là découle la nécessité de bien spécifier les *diverses espèces de variations* que les marches des chronomètres sont sujettes à subir.

Nous distinguerons les premières sortes de variations sous le nom de *variations normales;* et les secondes sous celui de *variations anormales* ou *perturbations.*

Les perturbations elles-mêmes doivent être subdivisées :

1° *En perturbations dues au travail des métaux des diverses pièces du régulateur, ou à leur état magnétique;*

2° *En perturbations provenant de l'inclinaison de la suspension du chronomètre;*

3° *En perturbations spéciales à l'état atmosphérique et à la navigation;*

4° *En anomalies extraordinaires et en arrêts.*

Parmi les divers effets dus aux perturbations, il en est qui consistent en *sauts* de l'état absolu n'affectant pas la marche, ce qui revient, du reste, à supposer que celle-ci a subi, dans un certain intervalle de temps, une modification déterminée qui disparaît complétement à l'intervalle suivant. Mais nous n'insisterons pas davantage ici sur la *spécification* desdits effets, qui sera donnée *in extenso* et méthodiquement au n° 157.

Il va de soi que la *variation totale* d'une marche comprend la superposition d'un plus ou moins grand nombre des diverses sortes de variations précédentes, suivant la simultanéité avec laquelle elles sont en mesure de se produire.

N° 100. Variations normales des marches. Définition du mot accélération en chronométrie. — D'après les considérations des nos 93, 94 et 97, les *variations normales* des marches

relèvent exclusivement de l'âge des huiles et de la température suivant les lois suivantes :

Dans les chronomètres modernes, la marche tend en général à *s'accélérer* avec le temps à température égale. Selon le Dr Peters, directeur de l'Observatoire de Kiel, cette accélération (n° **111**) serait très-forte au début avec les chronomètres neufs des constructeurs de second ordre, et irait en diminuant progressivement. Dans les chronomètres de construction ancienne, c'est parfois du retard qui se produit à mesure que les huiles vieillissent. — Dans les bons chronomètres, les causes des variations normales de la marche dues au temps, augmentent rarement la valeur primitive de celle-ci de plus de 3 ou 4 secondes en un à deux ans.

De son côté, l'influence de la température sur les variations normales de la marche, consiste en un retard à peu près symétrique, tant au-dessus qu'au-dessous de la température de réglage, retard dont nous avons indiqué les proportions habituelles au n° 97, mais qui se modifie d'un chronomètre à un autre. — Toutefois, dans les chronomètres imparfaitement compensés, ladite influence est de nature à s'exercer autrement. La symétrie de marche dont nous venons de parler autour de la température de réglage cesse d'exister. Et même si, en se basant *à priori* sur cette symétrie, on déduisait de l'observation de marches à différentes températures, une soi-disant température de réglage, on trouverait, pour cette quantité, une valeur exagérée, et ne représentant aucunement l'élément qu'on croirait indûment posséder. — Par ailleurs, il y a des chronomètres (n° 97) où, au contraire, la compensation entre les deux températures limites de réglage, est assez parfaite pour qu'il n'y ait plus de température de réglage. En pareil cas, on n'est plus à même de préciser suivant quel sens la chaleur ou le froid influence la marche en dehors desdites limites.

— On doit encore comprendre, parmi les *variations normales* des marches, les changements de celles-ci pouvant provenir à la longue d'une modification régulière : 1° de la force élastique du spiral ; 2° des coefficients de dilatation des métaux de ces deux pièces ; 3° de l'influence de la chaleur sur la fluidité des huiles. — Ces changements ne doivent pas être confondus avec ceux dont nous allons parler au n° **101**, dus à des causes analogues à quelques-unes des précédentes, mais avec cette différence capitale que les effets sont cette fois brus-

ques, irréguliers et capricieux, et engendrent dès lors des *variations anormales* ou *perturbations*.

— Il est nécessaire de bien préciser le mot *accélération* en chronométrie.

Quoique la définition *mécanique* de cette expression s'applique aux mouvements retardés aussi bien qu'à ceux dont la vitesse croît, l'emploi général du mot correspond présentement à ce fait d'expérience que, dans la plupart des chronomètres, la variation a lieu dans le sens d'une augmentation de vitesse : les marches en avance vont en augmentant; les retards vont en diminuant, et peuvent devenir des avances.

Bien plus, l'expression dont il s'agit est en général réservée pour caractériser l'action habituelle de l'âge des huiles sur la marche par unité de temps adoptée, ainsi qu'il est spécifié mathématiquement au n° **111**.

N° 101. Perturbations des marches dues au travail des métaux des diverses pièces du régulateur, ou à leur état magnétique. — Indépendamment de la cause *normale* de la variation des marches par la chaleur ou par le froid, voire même simplement par le temps de service de l'instrument, il est une autre cause irrégulière et beaucoup moins connue. Elle tient à des changements qui s'opèrent dans l'état moléculaire des pièces, et particulièrement dans la structure intime du balancier et du spiral. En un mot, elle tient à ce que le métal, dans diverses pièces, *joue* ou *travaille*. M. Caspari a fait sur ce sujet une étude spéciale, dont nous avons extrait, en grande partie, les développements qui suivent.

D'après une remarque de M. Fizeau, les métaux se trempent à toutes les températures, c'est-à-dire que le changement d'état moléculaire auquel est due la trempe, ne se produit pas seulement quand on passe brusquement d'une température très-élevée à une température basse. Il a lieu, quoique à un degré beaucoup moindre, pour tous les abaissements un peu *brusques* de température. — Or pour faire le spiral on prend un fil rectiligne qu'on contourne en hélice, et qu'on trempe sous cette forme. Mais la trempe ne détruit pas absolument la tendance des molécules à se rapprocher de leur ancien mode de groupement; les pièces courbes surtout, façonnées à une température inférieure à celle de la trempe, ne possèdent pas une stabilité complète de forme. Ainsi un spiral soumis à des effets thermométriques variant rapidement, change sa force élastique propre à

une température déterminée (n° 89), surtout quand il est *neuf*. On a souvent remarqué aux concours du Dépôt de la marine, que les chronomètres en expérience, au sortir de l'étuve où on les soumet à une chaleur de 30°, au lieu de reprendre à la température ambiante la marche qu'ils avaient avant leur introduction dans l'étuve, présentaient une différence brusque de marche pouvant s'élever à deux secondes par jour, et toujours en *accélération*, ce qui semble bien devoir se rapporter à un effet de trempe du spiral. Quelquefois cette modification s'atténue au bout de peu de jours; souvent elle persiste.

— Toutefois, il y a des cas où l'explication que nous donnons peut être insuffisante. Ainsi les comparaisons journalières permettent de constater que l'accélération mentionnée plus haut se produit parfois dès le séjour même du chronomètre dans l'étuve. D'autre part, il n'est pas rare que l'on constate une accélération analogue à la précédente, sauf que cette fois elle est *brusque*, dans les montres *neuves* qui passent rapidement d'un climat froid aux pays tropicaux. En pareil cas, du reste, l'*accélération* masque plus ou moins le retard normal (n° 100) dû aux élévations de la température au delà de la température de réglage. — Des effets inverses aux précédents se remarquent quand les chronomètres passent du chaud au froid; mais ils sont moins tranchés, et toujours plus persistants.

L'explication des derniers phénomènes sus-relatés ne saurait plus être basée sur un effet de trempe; car la température croît d'une façon trop continue. On est amené à penser au balancier. Et effectivement, les métaux fondus acquièrent, lors du refroidissement, un équilibre moléculaire très-instable; la surface se solidifie avant l'intérieur, alors que celui-ci est encore très-dilaté. Il en résulte des tensions moléculaires très-grandes dans l'intérieur de la masse, dont la structure peut dès lors se modifier sensiblement même sous une action modérée de la chaleur. M. Brunner cite l'exemple d'un cercle de théodolite en bronze fondu, dont les rayons ont éclaté avec fracas quand on a commencé à le travailler au tour. Toutefois, il ne faut pas s'exagérer ladite modification de structure. On n'emploie pour les balanciers qu'une surface très-mince des masses métalliques qu'il a fallu fondre; le recuit et le martelage font disparaître en grande partie l'effet dont il s'agit, qu'on ne retrouve, en définitive, que dans des balanciers défectueux. Au surplus, d'après M. Vissière, cet effet est susceptible de se corriger en faisant plusieurs fois recuire le balancier à des températures de 200 à 300°. — D'autre part, le balancier comporte des pièces for-

mées de deux métaux dans un état d'association forcée, qui, par suite, ne se trouvent ni l'un ni l'autre à l'état d'équilibre moléculaire, eu égard aux oscillations incessantes du régulateur. La force centrifuge les déforme constamment; et, bien qu'on remédie en partie (n° 93) à ce résultat, il n'en suit pas moins de là une tendance à une déformation graduelle, que des circonstances accidentelles, telles que chocs, influences électriques ou calorifiques, sont de nature à exagérer et à précipiter.

— De son côté, la vis qui relie chaque masse compensatrice sur sa lame bi-métallique, peut *glisser* sous l'influence d'un changement de température, et amener, de même qu'un choc (n° 103), un déplacement de cette masse, déterminant, si minime qu'il soit (n° 95), une variation de la marche.

Semblablement, l'état vibratoire constant du spiral n'est pas sans influer sur ses propriétés élastiques. Il arrive qu'au bout d'un certain nombre d'années, l'action de ce ressort devient plus capricieuse. On est parfois obligé de le remplacer sans qu'il y soit survenu aucune avarie grave.

— Il y a une assertion du Dr Peters qui mérite d'attirer l'attention. Selon ce savant, lorsqu'un chronomètre, par l'effet du temps, prend un retard considérable, c'est souvent signe qu'il y a oxydation du spiral.

Ce fait se présente rarement. Il se justifie en théorie parce que la rouille diminue la force élastique du spiral, et augmente sa masse de tout le poids de l'oxygène absorbé; ces deux causes concourent à faire retarder la montre. Toutefois on ne possède pas d'observations précises à l'appui de l'assertion que nous venons de relater. Ajoutons que le cas d'oxydation d'un spiral est fort heureusement rare, et que l'observation des règles de précautions recommandées (n° 152) pour l'installation des chronomètres à bord, doit généralement affranchir de toute crainte à ce sujet.

En tout état de cause, il sera bon, lors d'un spiral oxydé, et si d'ailleurs cela peut se faire sans inconvénient, d'arrêter le chronomètre pour éviter la rupture du ressort rouillé. Car au retour en France, le fabricant du chronomètre peut réparer le mal sans refaire un spiral neuf.

— En somme, la plupart des perturbations que nous venons de relater portent sur des chronomètres *neufs*, surtout de médiocre fabrication, soumis d'ailleurs à des variations rapides de température. Dès lors, on ne devrait, en principe, mettre les montres en service

qu'après avoir laissé le temps de travailler aux métaux des diverses pièces du mécanisme, afin d'assurer à ces pièces une structure sensiblement permanente.

Les horlogers connaissent fort bien les effets en question. C'est pourquoi ils ont la précaution, avant d'envoyer une montre au concours du Dépôt de la marine, de la faire marcher longtemps à des températures variables, surtout au chaud. D'ailleurs, ils recuisent le spiral; et suivant une indication sus-mentionnée, ils soumettent souvent le balancier, une fois achevé, à des températures de 200° à 300°, afin de l'amener à un état moléculaire plus stable. — Malgré ces précautions il n'est pas possible d'éviter entièrement les perturbations afférentes aux chronomètres neufs. Ces perturbations ne sauraient être prédites. Leur effet habituel est une accélération; mais il est impossible de prévoir si cette accélération sera plus ou moins forte. Seulement, l'expérience montre que, pendant les trois premières années, l'accélération peut atteindre de 5 à 15 secondes. Les mêmes chronomètres, après renouvellement des huiles, ne présentent plus ces phénomènes particuliers, du moins pas au même degré. — Quoi qu'il en soit, un chronomètre qui a passé par ces variations, reste, après comme avant, sujet à l'influence normale de la chaleur, retardant à peu près de la même quantité à mesure qu'on s'éloigne graduellement de part et d'autre de la température de réglage (n° 97), s'il en possède une. Ceci, bien entendu, n'implique pas que ladite quantité soit proportionnelle à la variation de température, ce qui en général n'est pas (n° 113).

— Une autre cause de perturbation, fort heureusement rare, est celle qui provient de l'état magnétique de l'acier des spiraux ou des balanciers.

La marche varie alors avec l'orientation de la montre; et quand on se déplace à la surface du globe, elle subit l'action du magnétisme terrestre, variable en intensité. Lorsqu'on remarque une pareille irrégularité, il n'y a qu'un remède : c'est de changer la pièce qui en est cause, après avoir essayé de lui faire perdre son magnétisme par l'action d'une température suffisamment élevée et d'une trempe nouvelle. — M. Beuf, directeur de l'observatoire de Toulon, a vérifié plusieurs fois qu'un changement dans l'orientation des chronomètres est de nature à déterminer une légère modification de la marche. On a aussi constaté, deux ou trois fois, au Dépôt de la marine, que des chronomètres revenus de campagne avec des

marches très-irrégulières, avaient des pièces aimantées. Rien n'est plus facile que de s'en assurer; il suffit d'observer la montre dans diverses orientations.

En dehors de cette circonstance d'un magnétisme permanent acquis par des organes en acier, l'influence du magnétisme des corps environnants pour déranger la marche des chronomètres est très-contestable, comme le prouvent d'importantes expériences de MM. Delamarche et Ploix. — Si le balancier seul est magnétique, on démontre qu'il y a moyen d'annuler sensiblement la perturbation de la marche, à la condition que les oscillations soient d'environ 1 tour 1/4. Mais il est évident que la perturbation reparaîtrait avec le temps, par suite de la diminution des amplitudes de celles-ci.

N° 102. Perturbations des marches provenant de l'inclinaison de la suspension. — M. Caspari est le premier qui ait traité cette question avec tout le développement désirable. Nous ne pouvons mieux faire que d'en reproduire un résumé d'après ce savant hydrographe.

On remarquera que jusqu'ici on n'a pas fait intervenir la pesanteur, parmi les causes perturbatrices dont nous avons étudié les effets sur les chronomètres. Nous avons aussi supposé que le balancier est bien équilibré, c'est-à-dire que son centre de gravité se trouve toujours sur l'axe de rotation. Mais si *ce centre de gravité est excentrique*, il ne sera permis de négliger l'action de la pesanteur qu'à la condition que cette action soit perpendiculaire au sens du mouvement, ce qui suppose la verticalité absolue de l'axe. C'est ce qui arrive rarement en toute rigueur. A terre même on ne peut s'assujettir à poser le chronomètre rigoureusement horizontal; la suspension produit des frottements qui empêchent la montre de revenir toujours identiquement à la position normale. En mer, les mouvements du navire, malgré la suspension, dérangent constamment la verticalité des axes. Quant aux montres de poche, elles sont sujettes à prendre des positions très-variables; et elles sont tantôt suspendues verticalement, tantôt posées à plat. Il importe que ces circonstances ne fassent pas varier les marches. Il est donc nécessaire de se rendre compte des perturbations qu'une inclinaison plus ou moins grande peut produire sur une montre réglée pour marcher dans la position horizontale.

Il est facile d'abord de voir que, si un pareil instrument, dont les axes dans la position normale sont verticaux, est placé de manière

à rendre ceux-ci horizontaux, les frottements des axes doivent varier, ce qui affectera l'amplitude des oscillations. Généralement, toute inclinaison se traduira ainsi par un changement d'amplitude. Pour que la marche n'en éprouve pas d'altération, il faut donc que le spiral soit isochrone. Mais cette condition ne suffit pas : il faut encore que le balancier soit parfaitement centré.

La grandeur des effets ainsi produits dépend de l'inclinaison du chronomètre : elle est nulle quand l'axe du balancier est vertical, maximum quand il est horizontal, c'est-à-dire quand l'instrument passe du *plat* au *pendu*, suivant l'expression des horlogers. — Avec l'instrument au *pendu*, l'effet perturbateur s'atténue, si, au lieu de maintenir le balancier, supposé excentré, avec son centre de gravité situé, pour la position d'équilibre, sur le plan vertical passant par son centre d'oscillation, on fait tourner le chronomètre d'un certain angle dans un plan parallèle à celui de son cadran.

Quand un horloger veut s'assurer si le balancier d'un chronomètre est bien centré, il observe la marche de ce chronomètre en l'orientant avec son cadran maintenu dans un même plan vertical, suivant quatre directions rectangulaires, c'est-à-dire en mettant successivement en bas les points III^h, VI^h, IX^h et XII^h du cadran. On trouve alors des marches notablement différentes entre elles, pour peu que le défaut d'excentricité soit appréciable. — La moyenne des marches ainsi obtenues donne une marche indépendante du sens de l'inclinaison, et qui n'est fonction que de l'amplitude des oscillations propres à cette inclinaison. Examinant alors les marches comparées à cette moyenne, on en trouve généralement deux contiguës en avance. Supposons qu'on ait constaté ainsi une avance quand les points III^h et VI^h du cadran sont placés vers le bas. On ajoutera alors du poids au balancier, à la partie qui, à l'état de repos, se trouve dans la direction intermédiaire à ces deux divisions du cadran ; et par des tâtonnements successifs, on cherchera à obtenir un équilibre plus ou moins parfait.

M. Phillips a traité la question précédente par l'analyse. Il a montré que la règle empirique, adoptée par les horlogers, n'est applicable qu'autant que les amplitudes des oscillations complètes ne dépassent pas 1 tour 1/4. — Pour cette amplitude même, les marches du chronomètre sont égales, quelle que soit la direction du cadran dans le plan incliné. Pour une amplitude plus grande, la règle pratique doit être appliquée en sens contraire.

En ce qui concerne la navigation, nous ne tirerons de ce qui précède qu'une conclusion : c'est que les meilleurs chronomètres sont exposés à des écarts de marche considérables, dès que le jeu de leur suspension est gêné. Il est donc, en principe, nécessaire de s'assurer constamment si cette condition est bien remplie. Lorsque les cercles de suspension sont faussés, ou que les axes ont cessé de tourner librement, il faut faire réparer cette avarie le plus tôt que l'on peut, sans toucher, bien entendu, au mécanisme.

On fera, en particulier, attention que les compteurs sont réglés pour la position horizontale, et que par suite ils doivent être portés et tenus à plat.

N° 102. Perturbations des marches spéciales à l'état atmosphérique et à la navigation. — Nous avons consulté avec fruit, pour l'examen de ces perturbations, les opinions de MM. les officiers de marine Mouchez, Fleuriais, Martin, de Magnac et Rouyaux, corroborées par les appréciations de M. Caspari.

Nous nous sommes déjà occupé au n° 92 de l'influence de la *pression barométrique* sur les marches ; et nous avons vu que théoriquement et expérimentalement ses effets étaient entièrement négligeables. — Vient ensuite, pour ce qui concerne encore l'action de l'atmosphère, la considération de l'électricité, du magnétisme et de l'état hygrométrique de l'air.

Comme influence de l'*électricité*, on n'a constaté en général aucun changement notable des marches pendant les nombreux orages, souvent très-violents, essuyés par une grande quantité de navires ; la foudre même tombant près du navire ne produit pas d'effet appréciable. Cependant M. Duperrey a constaté cette influence à bord de la *Coquille*. M. Mouchez cite un exemple d'effet électrique sur les chronomètres, et ajoute que Krusenstern et Vincendon-Dumoulin en ont observé d'analogues. — Il faut donc conclure que l'action dont il s'agit est capricieuse et irrégulière ; qu'elle ne se produit qu'exceptionnellement, et probablement dans des circonstances spéciales et accumulées.

Pour ce qui a trait à l'influence sur les chronomètres du *magnétisme* des corps environnants, nous avons déjà dit (n° 101) que, d'après une étude particulière de MM. Delamarche et Ploix, corroborée par l'expérience propre de navigateurs distingués, il est sûr que le *magnétisme* du bord a très-peu d'influence sur les chronomètres. — Il en est de même du *magnétisme atmosphérique* : l'effet des

aurores boréales ou australes se trouve nul sur les marches diurnes.

Les changements de *l'état hygrométrique* de l'air ont été aussi trouvés sans action.

— Arrivons maintenant aux effets du roulis, du tangage, des secousses et des chocs en général.

Lorqu'un chronomètre est soumis à de *grands roulis*, il y a des chances pour que les effets perturbateurs dus (n° 102) aux inclinaisons de la suspension, malgré les cercles à la Cardan, se neutralisent. Toutefois il résulte, d'expériences faites au Dépôt de la marine, que généralement les grands roulis doivent avoir pour effet de diminuer légèrement les amplitudes du balancier. Leur action doit être par conséquent de faire avancer la plupart des chronomètres. — M. de Magnac a constaté un résultat de ce genre pour un Winnerl, mais il n'a rien trouvé pour seize autres chronomètres suivis par lui. M. Mouchez ne croit pas à l'influence du roulis, pourvu que la suspension reste bien libre. L'inspection des nombreuses feuilles de marches à la mer que possède le Dépôt, conduit à une conclusion analogue. Cet effet, s'il se produit, n'influe que sur les dixièmes de seconde de la marche, et se dégage difficilement des autres éléments qui troublent celle-ci.

En résumé, les montres en général ne sont pas affectées par les mouvements du navire, même de gros temps. Ce fait doit être considéré aujourd'hui comme l'opinion unanime des plus habiles navigateurs.

De leur côté, les *coups de canon*, le *filage des chaînes d'ancre*, le *remorquage par gros temps* et les *coups de talon*, ne se font également ressentir qu'exceptionnellement sur ces instruments.

Néanmoins, un ou plusieurs chocs, surtout près de l'armoire aux chronomètres, sont certainement de nature à amener une variation *brusque* et souvent *permanente* de la marche. — M. de Magnac cite une montre, qui, à la suite de quelques violents coups de talon donnés par le navire, eut sa marche retardée de 1^s,4 environ, et cela d'une manière permanente. D'un autre côté, M. Martin a constaté sur 11 chronomètres un effet de retard général, produit par des coups de marteau dans le voisinage de l'armoire des montres; mais cette fois l'effet disparut avec la cause qui l'avait produit.

La remarque suivante de M. Villarceau peut expliquer la première de ces deux espèces de dérangements. Afin de faciliter le jeu des lames bi-métalliques, on est forcé de pratiquer dans les masses

compensatrices un évidement un peu plus large que la lame correspondante. On fixe ensuite les masses à l'aide d'une seule vis de pression. Dans ces conditions, il n'est pas impossible que, soit par l'effet de la température, comme dans les circonstances citées au n° 101, soit par des chocs accidentels, comme dans le cas présent, un petit glissement vienne à se produire et à faire sentir notablement (n° 95) son influence sur les marches. — Quant au second dérangement, il semble être de même espèce que ceux décrits ci-après, dus à des entraves apportées à la suspension.

— Les *trépidations* dues au propulseur, à bord des navires de petites dimensions, et à bord des autres bâtiments quand l'armoire aux montres est trop près du propulseur, méritent une attention spéciale.

Ces trépidations, qui ont été étudiées d'une manière particulière par M. Rouyaux (n° 163), affectent alors presque tous les chronomètres, d'une manière inégale d'ailleurs. Cette influence semble consister en une variation *successive* de la marche, positive ou négative, caractérisée par une constance journalière à peu près rigoureuse, et qui disparaît au repos, mais lentement, et en suivant en sens inverse la voie qu'elle vient de parcourir.

— A la suite des diverses causes de perturbations possibles à la mer que nous venons de signaler, il en est une qui ne saurait trop attirer l'attention des navigateurs : c'est celle qui résulte de *dérangement* ou de suppression *dans la suspension des montres*. Il paraît parfaitement établi aujourd'hui que quand on supprime la suspension d'un chronomètre, et qu'il reste d'ailleurs soumis aux mouvements du bâtiment, il se produit une variation *brusque* de la marche, qui est presque toujours un *retard*. Cette variation persiste d'une manière peu uniforme du reste, tant que les mouvements du navire sont accentués et que la suspension est paralysée. Mais la mer devenant belle, la marche tend à reprendre sa première valeur. Ce dernier phénomène se produit du reste, quand, en pleine expérience, on rend à la suspension sa liberté.

Les circonstances précédentes fournissent la meilleure explication de l'effet perturbateur, souvent (mais *non généralement*) constaté lors du transport des chronomètres à bord. Toutefois, quelques personnes tiennent à ajouter à l'explication précédente dudit effet, l'influence d'une modification complète de régime et de milieu, tant à cause de la mobilité du navire que de l'atmosphère propre du bord.

Il y a aussi l'action du changement d'orientation signalée au n° 101. — Dans tous les cas, l'effet qui nous occupe disparaît d'ordinaire après 7 ou 8 jours de séjour sur le navire. En d'autres termes, au bout de ce laps de temps, les marches reviennent peu à peu de l'écart occasionné par le changement de lieu, et reprennent sensiblement leur valeur calculée à terre. D'après cela, il est bon d'embarquer les chronomètres assez à temps pour pouvoir apprécier leur marche à bord, une fois qu'ils sont acclimatés.

— Il convient de terminer ce numéro par l'indication d'une cause possible de dérangement des marches : nous voulons parler du *synchronisme*, c'est-à-dire de la tendance à vibrer à *l'unisson* que prennent divers corps vibrants, en communication soit directe, soit par l'intermédiaire de substances environnantes. On conçoit dès lors que divers chronomètres, logés dans une même caisse, puissent plus ou moins ressentir l'effet dont il s'agit, en subissant de ce chef des variations anormales dans leurs marches.

Toutefois, le fait ne s'est pas manifesté, au moins d'une manière sensible, dans les concours du Dépôt, où les montres sont placées très-près les unes des autres sur des planches, sans aucun intermédiaire.

N° 104. Anomalies extraordinaires des marches, et arrêts des chronomètres. — Les anomalies extraordinaires ainsi que les arrêts ont été étudiés en détail par M. Caspari. Voici, en substance, ce qu'il en dit :

M. Mouchez décrit certains *sauts* qu'il a observés sur des chronomètres Winnerl, dans la campagne de la *Capricieuse;* ces sauts atteignaient jusqu'à 120 secondes par jour. On ne saurait dire si les anomalies de cette espèce se font instantanément, ou si elles emploient un certain temps (un jour ou deux) à s'accomplir. Il est probable que l'une ou l'autre de ces circonstances peut se présenter.

Les sauts dont il s'agit constituent une véritable rareté, fort heureusement ; et peu d'officiers, depuis M. Mouchez, ont eu l'occasion de constater des variations aussi étendues et aussi brusques. Ce qu'il y a de singulier, c'est qu'après ces perturbations considérables le chronomètre revient à sa marche normale. — Il semble rationnel d'attribuer de pareils effets soit à la mauvaise qualité des pierres formant les contre-pivots, soit à un défaut de l'échappement consistant en dérangements momentanés, surtout quand le chrono-

mètre saute successivement, soit en retard, soit en avance. On observe ce dernier phénomène sur des chronomètres vieux d'huiles, avec certains échappements. On voit alors l'aiguille parcourir la seconde entière à la fois ; ou bien encore dans d'autres cas, on s'aperçoit qu'une oscillation ne produit pas le dégagement du doigt d'échappement. M. Caspari a eu l'occasion de constater des sauts de plusieurs secondes dans les concours du Dépôt de la marine ; mais les montres sujettes à ces inconvénients sont toujours éliminées.

— Nous signalerons aussi, d'après M. Mouchez, comme une anomalie extraordinaire, le changement temporaire simultané et dans le même sens, de toutes les marches à la fois des divers chronomètres embarqués, sans qu'on puisse attribuer à la température ni au synchronisme (n° 103) ce singulier dérangement. — Enfin, l'éminent académicien cite encore l'anomalie suivante :

Il arrive souvent, et toujours sans cause connue, qu'un chronomètre, ordinairement bon, se met à varier de 10 à 20 secondes par jour dans un sens ou dans un autre, et se trouve ainsi momentanément hors de service. Cette perturbation dure plusieurs jours, souvent deux ou trois semaines ; le chronomètre reprend ensuite sa marche ordinaire. Ce qui paraît établi, c'est que des accidents de ce genre ne surviennent guère qu'à des chronomètres ayant plus de trois ans d'huiles. On est rarement à même de les observer sur des instruments marchant dans des conditions normales. — Enfin, il se rencontre des chronomètres qui, au bout d'un service plus ou moins long, se mettent à varier irrégulièrement. Mais, pour employer la comparaison de M. Mouchez, c'est là une maladie qui n'a d'autre remède que le passage chez l'horloger.

— Dans la plupart des cas que nous venons de relater, les effets observés dénotent une altération profonde du mécanisme, à moins que le régulateur n'ait acquis du magnétisme permanent. Ainsi, il arrive souvent que l'huile abandonne les pivots des pièces importantes; alors les frottements variables de l'acier sur la pierre déforment les *pivots* (n° 84), et usent les pierres des *trous*. Ces circonstances ont généralement pour résultat de diminuer les amplitudes. L'effet définitif est alors de faire s'exercer le défaut d'isochronisme, surtout s'il existe déjà un peu. C'est donc à des avaries de ce genre-là qu'on devra généralement rapporter les accélérations *brusques*, qui ne peuvent s'expliquer par une action analogue à celle que la chaleur produit (n° 101) sur les chronomètres neufs.

D'autres fois encore, on se trouve en face d'un échappement trop juste ou trop lâche. Quand la température vient à varier, l'échappement ne fonctionne plus que d'une manière intermittente ; et les mouvements imprimés de l'extérieur au chronomètre doivent parfois en suspendre ou en exagérer le jeu. Dès lors, selon le cas, il se manifeste des retards ou des avances brusques, jusqu'à ce que, soit par un choc, soit par le retour d'une température plus normale, les pièces aient repris leurs positions respectives. — Il peut arriver aussi que le ressort *auxiliaire* du remontage (n° 80) soit avarié, et que la transmission du mouvement du moteur pendant cette opération devienne ainsi plus capricieuse. Cette dernière circonstance est susceptible d'être reconnue, pourvu qu'on exécute les recommandations (n° 152) destinées à apprécier si le remontage n'apporte aucun trouble au fonctionnement du chronomètre.

On ne prétend pas expliquer, par ce qui précède, toutes les variations anormales des marches ; mais M. Caspari affirme, d'après le mûr examen qu'il a fait de l'historique de nos chronomètres, que, le plus souvent, les dérangements se ramènent à une cause du genre de celles qui viennent d'être citées.

— L'accident le plus grave qui puisse arriver à une montre, c'est l'*arrêt*. L'arrêt n'est pas toujours le résultat d'une avarie : il est souvent fortuit. Il y a d'abord celui qui résulte de la négligence de la personne chargée du remontage. En pareil cas, le chronomètre remis en mouvement reprend sa marche habituelle. Mais, même en dehors de ce cas, il peut se produire un arrêt en vertu d'autres circonstances, qui n'influent pas non plus sur la marche primitive de l'instrument. — Les chronomètres s'arrêtent assez souvent pendant le remontage même ; cela peut provenir d'une disposition vicieuse du ressort auxiliaire ou des cliquets (n° 80). D'autres fois, c'est dans l'échappement qu'en réside la cause. Il peut aussi arriver qu'un corps étranger, une parcelle de métal détachée du rouage, s'introduise dans un organe essentiel.

En principe, un chronomètre qui s'est arrêté sans cause apparente, doit inspirer une légitime méfiance. Mais il ne faudra pas pour cela en rejeter les indications, une fois que l'on aura réussi à le remettre en marche. L'expérience a prouvé que des montres sujettes à des arrêts, avaient, néanmoins, dans les intervalles, des marches régulières, et que leurs indications pouvaient être utilisées. Si, par exemple, le corps étranger a été chassé par la secousse circulaire

donnée au chronomètre quand on l'a remis en marche, la montre doit revenir à son régime normal. — Lorsque la cause d'arrêt est dans l'appareil de remontage, il suffit souvent de redoubler de précautions pendant cette opération.

Bref, quand un chronomètre se sera arrêté, et qu'on n'aura pas lieu de soupçonner une avarie grave, on essayera de le remettre en marche après l'avoir remonté, en lui imprimant un mouvement circulaire un peu vif. Si l'on réussit, on pourra continuer à le comparer aux autres montres, et supposer que sa marche n'a pas varié.

L'arrêt résulte souvent d'une usure exagérée des pièces; alors il est toujours précédé de perturbations de marche qui l'annoncent. Plus souvent encore, il est dû à la rupture d'une pièce. Enfin, on sait que les meilleurs ressorts moteurs peuvent se briser sans cause apparente.

N° 105. Variation totale des marches. Marche normale; signes adoptés pour caractériser son sens. Définition des mots *interpolation* et *extrapolation*. — Comme nous en avons déjà prévenu au n° 99, la *variation totale* d'une marche est le résultat de sa variation normale, et de toutes les perturbations simultanées qu'elle peut subir. On conçoit dès lors qu'il n'y a guère moyen d'établir d'une manière absolue dans quel sens la marche a varié, selon le temps depuis lequel le chronomètre est en service et selon la température considérée.

Cependant, en ce qui concerne le temps, il est de règle que c'est la variation *normale* due à l'âge des huiles qui est prépondérante; de sorte qu'en général (n° 100) les chronomètres prennent de l'*accélération* avec le temps. Cette accélération ne pourrait guère être masquée, au moins d'une manière permanente, que par un retard dû à l'oxydation du spiral (n° 101).

Pour la température, en revanche, on ne peut en principe prévoir dans quel sens (*accélération* ou *retard*) les variations *normales* de la marche se font sentir. Cela tient à deux causes. D'abord la température d'où on compte les variations peut être au-dessous ou au-dessus de la *température* de *réglage* (n° 97). Dès lors dans la première hypothèse on a de l'accélération au chaud, jusqu'à ce qu'on ait atteint cette température; puis survient du retard. Dans la seconde supposition, il se manifeste toujours du retard au chaud. En second lieu, si le chronomètre est imparfaitement compensé, la loi de symétrie de la marche autour de la température de réglage

n'a plus lieu (nº 100); et au contraire avec les chronomètres parfaitement compensés, cette température elle-même n'existe pas. — Enfin l'action *normale* de la température est souvent *masquée* plus ou moins complétement par son action irrégulière (nº 101); cette action irrégulière se traduit dans un grand nombre de cas, surtout avec les chronomètres sortant de l'atelier, par une *accélération brusque* et *permanente*, sous l'influence de la chaleur. Tel est l'effet déjà cité audit nº 101, qu'on remarque sur les montres neuves qui passent pour la première fois, et rapidement d'ailleurs, des climats tempérés aux pays tropicaux.

— Heureusement que, pour les besoins de la navigation, on n'a pas besoin d'être édifié sur l'essence des phénomènes produits. Le point capital est de pouvoir les apprécier.

Or nous verrons au nº 108 qu'il y a moyen de mesurer avec une rigueur suffisante l'influence *normale* des variations de la température et de l'âge des huiles. Dès lors, abstraction faite des *perturbations*, on peut chaque jour calculer par *interpolation* ou *extrapolation* (voir ci-après la signification de ces mots), la marche qui convient au chronomètre eu égard à la température et à l'époque, c'est-à-dire la *marche normale.*

Ainsi donc, *la marche* NORMALE *d'un chronomètre à une date donnée est égale à la marche qui convient pour un jour convenu, corrigée de ses variations normales* (nº 100) *dues à la différence de température moyenne entre ladite date et le jour en question, et à l'écart de cette date par rapport à ce même jour.*

On conçoit qu'une fois calculée la valeur *normale* de la marche, la comparaison de cette valeur avec celle obtenue par une observation directe, ou à l'aide d'autres chronomètres, indique s'il y a une perturbation. Car il paraît prouvé que celle-ci, quelle que soit son origine, n'affecte pas en principe l'influence *normale* de la température et de l'âge des huiles.

Enfin, pour les besoins de la navigation, il reste à être avisé que toute *perturbation* peut être spécifiée par un des caractères numériques énoncés au nº 157, et qui résultent de l'étude de leurs effets développés dans le cours du présent paragraphe.

— Il importe de prévenir que dans ce qui suit, nous considérerons les marches en AVANCE comme POSITIVES; et les marches en *retard* comme *négatives.*

Plusieurs auteurs proscrivent tout *signe* pour les marches. Nous

ne saurions partager cette manière de voir, surtout eu égard à la grande utilité des signes pour les graphiques de marche (nos 142, 144, 149 et 150).

— Nous aurons souvent l'occasion, dans ce qui va suivre, de nous servir des mots précités d'*interpolation* et d'*extrapolation*.

D'une manière générale, ils indiquent l'opération qui consiste à trouver un élément (une marche par exemple) en fonction d'autres éléments (la température et le temps), connaissant une série plus ou moins étendue de valeurs du premier élément correspondant à des valeurs des seconds éléments. Suivant que la valeur de l'élément cherché tombe ENTRE ses valeurs données, ou *en dehors*, il y a INTERPOLATION ou *extrapolation*. Les deux circonstances dont il s'agit peuvent du reste se présenter *analytiquement* ou *géométriquement*. Chacun de ces cas a lieu suivant qu'à l'aide des valeurs connues de tous les éléments, on établit (n° 132) une *formule* ou une *courbe* représentant la loi de variation du premier élément en fonction des seconds. — Dans le cas où on opère géométriquement, l'*extrapolation* consiste à prolonger, suivant des moyens propres à chaque cas, la branche de courbe obtenue à l'aide des valeurs précitées. Ceci exige que la branche en question représente le mieux possible la forme rigoureuse de la courbe, et par suite qu'on la trace en se basant sur la théorie des erreurs d'observation. On trouvera de nombreux exemples d'*extrapolation géométrique*, dans les diverses sortes de *graphiques de marche* des chronomètres (nos 142, 144, 149 et 150); et on verra comment l'application de ladite théorie permet de remplir la condition sus-mentionnée.

* **N° 106. Conditions d'admission et de réparation des chronomètres dans la marine militaire en France et en Angleterre.** — L'énoncé de ces conditions fait l'objet d'un règlement ministériel. Il nous a semblé le complément naturel de l'important paragraphe que nous venons de développer.

1°. Les chronomètres de fabrication française sont achetés au concours après une épreuve de *trois mois* au Dépôt de la marine. Pendant cette épreuve ils sont soumis à la température ambiante, et à des températures voisines de 5° d'une part et de 30° de l'autre.

2°. Le plus grand écart des marches à la température ambiante, ajouté au plus grand écart des marches aux températures artificielles indiquées ci-dessus, donne, pour chaque chronomètre, un nombre N qui sert à le classer.

3°. Les chronomètres pour lesquels ce nombre N ne dépasse pas trois secondes, sont déclarés admissibles.

4°. Les chronomètres sont achetés au prix uniforme de *deux mille francs* l'un.

5°. Parmi les chronomètres reçus dans le cours d'une même année, celui qui a obtenu le premier rang reçoit une prime de *douze cents francs*, pourvu toutefois que le nombre N, qui a servi à le classer, ne dépasse pas deux secondes cinq dixièmes.

6°. La réparation des chronomètres, y compris le renouvellement des huiles, quelles que soient son importance et sa nature, est faite au prix normal de *quatre-vingts francs*. Cette réparation est réservée de droit aux artistes qui ont fabriqué l'instrument. Elle ne peut être confiée à d'autres que sur leur refus. — Tout chronomètre réparé, qui, expérimenté au Dépôt pendant un mois, suivant le mode indiqué en 1°, donne un nombre N ne dépassant pas deux secondes, reçoit une prime de *deux cents francs*.

Pour calculer le nombre N, qui, d'après la condition 1° ci-dessus, constitue la valeur de chaque chronomètre, il faut avoir recours aux marches et aux températures moyennes, recueillies avec autant de soin que possible par série de cinq jours, pour chaque expérience à chaud, à froid et à la température ambiante. Toutefois, cette détermination du nombre N offre des difficultés sérieuses; car la clause 2° n'est pas assez explicite pour indiquer exactement la voie à suivre. — Après bien des tâtonnements et un examen très-attentif des conditions dans lesquelles se trouvent les chronomètres essayés, le Dépôt a été amené à adopter la méthode suivante :

On entre-croise les séries d'expériences à la température ambiante avec des séries successivement à chaud et à froid. Soient alors :

m_a, m'_a, m''_a... les marches de diverses séries à la température *ambiante;*
m_c, m'_c, m''_c... les marches aux températures *chaudes;*
m_f, m'_f, m''_f... les marches aux températures *froides.*

On prend la plus petite et la plus grande des marches m_a, m'_a, m''_a.... Leur différence N_a donne le plus grand écart à la température *ambiante.* — On fait ensuite les différences entre chaque marche m_c, m'_c, m''_c...., m_f, m'_f, m''_f,.... aux températures artificielles, et les marches à la température ambiante qui les précèdent et les suivent immédiatement. La plus grande de ces différences donne le plus

grand écart N_f ou N_c dû aux températures artificielles. On déduit de ces deux calculs, abstraction faite des signes :

$$N_a + N_c \text{ (ou } N_f) = N \text{ qui doit être } < 3^s.$$

Les chronomètres pour lesquels N est < 3ˢ sont réputés très-bons;
Id. pour lesquels N est compris entre 3ˢ et 4ˢ, satisfaisants;
Id. *id.* 4ˢ et 5ˢ, médiocres;
Id. *id.* 6ˢ et au delà, très-défectueux.

— En Angleterre, l'observatoire royal de Greenwich est le dépôt général des chronomètres du gouvernement. On y observe les marches de tous ces instruments; et l'on voit comment ils se comportent sous l'action de la chaleur et du froid.

Les horlogers sont invités chaque année à envoyer un chronomètre (quelquefois deux), pour qu'il soit expérimenté et acheté s'il y a lieu. Pendant l'été, les instruments sont soumis à de basses températures artificielles, puis à l'air extérieur. Pendant l'hiver, on les met aussi à l'air extérieur; puis ils sont soumis à des températures élevées produites artificiellement. — De temps en temps, on change leur position relativement au méridien, afin de s'assurer que le magnétisme terrestre n'exerce pas d'action sur leur marche. — Après sept mois d'expériences, l'astronome royal fait un rapport à l'amirauté sur leur mérite relatif, en même temps qu'il donne son opinion sur la valeur que chacun d'eux peut avoir individuellement. Le gouvernement achète alors ceux dont il a besoin, et les autres sont rendus aux horlogers. — Les marches de tous les chronomètres, pendant ces expériences, sont publiées et distribuées à leurs fabricants.

Ce concours annuel est regardé par les horlogers anglais, comme un encouragement que le gouvernement octroie à leur industrie. — Chaque fabricant communique, sous le sceau du secret, à l'astronome royal tout perfectionnement nouveau apporté à ses chronomètres, et pour lequel il peut avoir droit à un brevet.

2ᵉ PARTIE. — § III. FORMULES DE MARCHE DES CHRONOMÈTRES.

Nº 107. Validité de la série de Taylor pour représenter la marche des chronomètres, en tenant compte des variations de la température et du temps. — D'après

tout ce qui a été dit dans les divers numéros du paragraphe précédent, il est impossible d'avoir des chronomètres *parfaits*, c'est-à-dire possédant une marche *constante*. Par ailleurs, il n'y a en général que la température et l'âge des huiles qui puissent être regardés comme des éléments agissant d'une manière régulière et non accidentelle, sur la marche des chronomètres. On est dès lors conduit à admettre que celle-ci, abstraction faite des perturbations, c'est-à-dire la *marche normale* (n° 105), est une *fonction* de la température θ et du temps t, qui n'est pas en principe sujette à des variations *brusques*.

On ne saurait trop déclarer que l'expérience sur ce point est concluante et générale. Il faut comprendre qu'il existe là une véritable loi physique et mécanique; et que, si des perturbations se produisent, elles n'infirment pas le caractère général de cette loi. En principe, la compensation et le réglage ne dépendent que des rapports de quantités dont la relation est bien déterminée par la constitution des pièces métalliques qu'on emploie. Cette relation n'est donc pas capricieuse, et correspond bien à une *fonction*, qui doit du reste en général être regardée comme variable d'un chronomètre à un autre. — L'expression analytique de ladite fonction propre à un chronomètre donné n'est pas connue, il est vrai. Mais cela n'est pas indispensable ; et on peut toujours représenter cette fonction par un développement en série de termes en θ et en t, ayant des coefficients qu'on détermine numériquement, à l'aide de données empruntées à un ensemble d'observations consécutives, comprenant un laps de temps aussi long que possible. Au surplus, la validité de ce mode d'opérer a été vérifiée *à posteriori* pour un grand nombre de chronomètres (n° 109), en comparant les marches fournies par la formule avec les marches calculées directement.

Maintenant quel est le mode de développement à adopter? Le plus rationnel est certainement celui qui découle du théorème de Taylor, dans le cas de deux variables, et que M. Villarceau a proposé le premier. — D'abord ce développement comprend, comme cas particulier, celui qui résulterait de la somme algébrique de deux fonctions distinctes de θ et de t. Il renferme aussi tous les développements algébriques à puissance fractionnaire des variables ; car chaque terme de cette espèce peut se transformer, par ledit théorème appliqué au cas d'une seule variable, en une série composée de termes à puissance entière, pourvu qu'on change l'origine de la variable. — Si au contraire on adoptait d'emblée un développement particulier,

il faudrait démontrer que ce développement convient bien à chaque cas que l'on traite.

N° 108. Formule rationnelle générale de la marche normale des chronomètres. Constantes d'un chronomètre. Réserve afférente à ladite formule. — Les considérations précédentes étant comprises, appelons :

m la marche correspondant à une température θ et à une époque t *quelconques;*

a la marche correspondant à une température θ_1 et à une époque t_1 *déterminées*. Il est avantageux de choisir θ_1 et t_1 au-dessous, mais néanmoins très-près des valeurs minimum de θ et de t, qui servent au calcul indiqué ci-après des coefficients de la formule suivante; car, de la sorte, les différences $(\theta - \theta_1)$ et $(t - t_1)$ employées dans le calcul en question se trouvent toutes positives et de valeurs restreintes.

Nous aurons en appliquant la série de Taylor à deux variables:

$$(\mathrm{I}_0) \qquad m = a + \left(\frac{dm}{d\theta}\right)_1 \times (\theta - \theta_1) + \left(\frac{dm}{dt}\right)_1 \times (t - t_1) + \left(\frac{d^2m}{d\theta^2}\right)_1 \times \frac{(\theta - \theta_1)^2}{1.2}$$
$$+ \left(\frac{d^2m}{d\theta . dt}\right)_1 \times (\theta - \theta_1)(t - t_1) + \left(\frac{d^2m}{dt^2}\right)_1 \times \frac{(t - t_1)^2}{1.2} + \ldots\ldots$$

Pour que cette série ait une rapidité de convergence qui permette de l'utiliser pratiquement, il faut compter sur le décroissement des coefficients eux-mêmes, à mesure qu'on les considère plus loin dans la suite du développement. En effet, l'expression générale du développement est :

$$\left(\frac{d^{p+q}m}{d\theta^p dt^q}\right)_1 \times \frac{(\theta - \theta_1)^p \times (t - t_1)^q}{1.2.3\ldots p \times 1.2.3\ldots q}.$$

Or à mesure que p ou q croît, le facteur du coefficient différentiel peut croître pareillement, jusqu'au moment où $\dfrac{(\theta - \theta_1)}{p+1}$ et $\dfrac{(t - t_1)}{q+1}$, deviennent plus petits que 1. Mais, comme $(\theta - \theta_1)$ et surtout $(t - t_1)$, peuvent avoir des valeurs très-grandes, on voit bien que ce sont les valeurs des coefficients différentiels qui sont les seules aptes à rendre négligeables les termes lointains. Cette condition est d'ailleurs utile, afin que le *reste complémentaire* (n° 7) propre à chacune des deux variables pour parfaire le développement, tende vers zéro, et que le développement lui-même représente bien la marche.

— Quoi qu'il en soit, à l'aide d'un plus ou moins grand nombre d'observations, on trouve un nombre correspondant de valeurs pour m, θ et t. Ces valeurs, introduites dans (I_0), donnent une série d'équations qui permettent de calculer les valeurs particulières des

divers coefficients différentiels qu'on conserve dans la formule, et qui ne vont jamais au delà de ceux du second ordre. Ce sont ces coefficients qu'on appelle les *constantes du chronomètre*.

En principe, il est nécessaire d'obtenir un bien plus grand nombre d'observations, et par suite d'équations, qu'il n'y a de coefficients à déterminer ; car on est ainsi à même d'appliquer à la résolution des équations, la méthode des moindres carrés (n° 133), ou la méthode de Cauchy (n° 134), *qui ont l'une et l'autre pour but essentiel d'amoindrir l'influence des erreurs d'observation*, et de donner par suite à la formule toute la rigueur nécessaire à l'obtention de bons résultats. Nous ajouterons que pour la navigation courante, on substitue d'ordinaire aujourd'hui à la relation algébrique des méthodes graphiques (nos 142, 144 et 150), qui en sont l'interprétation géométrique plus ou moins fidèle.

— Il importe de remarquer que la relation générale (I_0) est soumise à une réserve importante, qui résulte de la fin du n° 100. En d'autres termes, cette réserve provient des variations *normales* que subit, avec le temps, la force élastique du spiral ; elle tient aussi à ce que, le balancier éprouvant des influences analogues, sa forme ainsi que les coefficients de dilatation varient avec une certaine *régularité ;* enfin les huiles elles-mêmes subissent différemment l'action *régulière* de la chaleur, selon qu'elles sont fraîches ou vieilles. Ce serait donc un bien grand hasard, si tout cela n'influait pas plus ou moins sur la manière dont la compensation et le réglage ont été obtenus au début. Il résulte de là, la conclusion capitale que voici :

Il est nécessaire de considérer les constantes du chronomètre qui tiennent compte de l'action de la température et de l'âge des huiles, comme ne convenant que pour une période de temps restreinte, un an à dix-huit mois, et encore (n° 111) en tant qu'il ne s'agit pas de chronomètres neufs.

La réserve précédente revient à supposer que les coefficients de la formule (I_0) sont, en fait, des fonctions de la température et de l'âge des huiles. Mais ces fonctions, développées elles-mêmes suivant les puissances de $(\theta - \theta_1)$ et $(t - t_1)$, donneraient, toutes réductions faites, une nouvelle série allant au moins jusqu'aux termes du troisième ordre, si on s'était primitivement arrêté à ceux du deuxième ordre ; et renfermant de nouveaux coefficients jouissant d'une *constance absolue*, ou du moins d'une *constance plus fixe* que les premiers. — En résumé, la réserve dont il s'agit revient à dire que, pour avoir une

formule tenant compte de la température et de l'âge des huiles, avec des *constantes* susceptibles de servir au delà du terme précité de un an à dix-huit mois, il faudrait employer un développement plus étendu.

N° 109. Vérification expérimentale de la formule rationnelle générale de la marche normale. — Comme nous en avons prévenu au n° 107, il appartenait à l'expérience de prononcer *à posteriori*, sur la validité de l'emploi de la formule (I_0), ou des moyens graphiques y suppléant, et découlant de l'hypothèse faite *à priori* de $m = f(t, \theta)$.

Cette expérience a d'abord été entreprise numériquement par M. de Magnac, dans plusieurs campagnes importantes à bord de la *Victoire* et du *Jean-Bart*, où le long temps qu'on a pu accorder aux recherches voulues, a permis d'éviter les inconvénients, signalés ci-après, de relâches trop courtes pour recueillir un nombre suffisant d'observations. Il a pu établir ainsi que les procédés dont il s'agit convenaient non-seulement pour déterminer m par *interpolation*, autrement dit (n° 105) pour des valeurs de t et de θ comprises entre les limites extrêmes de celles ayant servi à calculer les coefficients; mais même par *extrapolation*, autrement dit pour des valeurs de t et θ en dehors de ces limites. — Depuis lors, il a été fait en Allemagne, à l'observatoire de Kiel, d'importantes vérifications de ladite formule (n° 111). — De son côté, M. Rouyaux est venu donner une nouvelle consécration à sa validité, en se servant, à bord du *Decrès*, des marches de plusieurs chronomètres considérées, non plus avec leurs valeurs INTÉGRALES, mais avec leurs valeurs RELATIVES (n° 148), c'est-à-dire avec leurs différences par rapport à la marche de l'un d'eux pris pour étalon, ce qui n'exige que de simples comparaisons journalières. Il est évident *à priori* que la loi des marches RELATIVES en fonction de la température et de l'âge des huiles, doit être la même que celle des marches INTÉGRALES; et l'existence de l'une entraîne celle de l'autre.

Au surplus, ladite consécration a été établie par M. Rouyaux, non pas analytiquement, mais géométriquement, par la considération très-ingénieuse de diverses sortes de *lignes de marche* (nos 145 à 147). Et, bien entendu, la validité sus-mentionnée de l'hypothèse $m = f(t, \theta)$ s'est trouvée vérifiée du même coup.

En tout état de cause, on ne saurait trop insister sur les avantages de diverses sortes, qu'on retire (n° 148) pour la question qui nous oc-

cupe, de la considération des marches RELATIVES de préférence à celle des marches INTÉGRALES.

✱ N° 110. Simplification analytique de la formule rationnelle générale de la marche normale. — M. Rouyaux a remarqué que la formule générale (I_0) du n° 108, limitée aux termes du second ordre, est susceptible d'être débarrassée des termes du premier ordre.

En effet, comme on dispose des quantités θ_1 et t_1, on est libre de leur donner des valeurs Θ_1 et T_1 telles, que lesdits termes primitifs du premier ordre puissent se grouper avec les termes également primitifs du second ordre ainsi qu'avec le terme constant, de façon à ne plus former en tout qu'un nouveau terme constant a', et trois termes du second ordre de la forme $c \times (\theta - \Theta_1)^2$, $e \times (\theta - \Theta_1) \times (t - T_1)$ et $f \times (t - T_1)^2$. En un mot, de même que dans l'équation générale d'une conique, on est ici à même de faire disparaître les termes du premier degré par un choix convenable de l'origine des coordonnées, lesquelles peuvent être considérées actuellement comme représentées par les variations de la température et du temps. Dans cet ordre d'idées, l'équation générale (I_0) pourrait s'écrire :

$$(I_1) \qquad m = a' + c \times (\theta - \Theta_1)^2 + e \times (\theta - \Theta_1)\,(t - T_1) + f \times (t - T_1)^2.$$

Il faut bien comprendre que cette nouvelle forme renferme le même nombre de coefficients que la première, c'est-à-dire six, qui sont présentement Θ_1, T_1, a', c, e, f. Elle est du reste aussi générale.

La forme en question offre l'avantage pour la détermination *ultérieure* de m, une fois lesdits coefficients déterminés, de n'exiger que le calcul de *trois* termes au lieu de *cinq*. Par contre, elle entraîne l'inconvénient de ne pas être linéaire, par rapport aux coefficients Θ_1 et T_1, ce qui ne permet plus d'appliquer la méthode des moindres carrés (n° 133), ou celle de Cauchy (n° 134), au calcul des coefficients; elle rend d'ailleurs ce calcul, par tout autre procédé, extrêmement laborieux. — Mais il y a moyen d'éviter l'inconvénient dont il s'agit. A cet effet, il suffirait d'établir la formule dans sa forme complète (I_0) en appliquant lesdites méthodes. Puis, d'après ce qui a été dit ci-dessus, on passerait de cette forme à la forme réduite (I_1), par les formules de transformation de l'équation d'une conique, lors du transport, parallèlement à eux-mêmes, des axes de coordonnées à une nouvelle origine, choisie de façon à faire disparaître les termes du premier degré. Pour cela, on écrirait l'équation géné-

rale (I_6) sous la forme adoptée au n° 132, à savoir :

$$(I_6) \qquad z = a + b\times x + c\times x^2 + d\times y + e\times xy + f\times y^2,$$

avec

$$x = (\theta - \theta_1); \quad y = (t - t_1).$$

D'autre part, en désignant par x_0 et y_0 les coordonnées de la nouvelle origine, apte à faire disparaître les termes en x et en y, et par $x' = (\theta - \Theta_1)$ et $y' = (t - T_1)$, les coordonnées se rapportant à cette origine, on poserait :

$$z = a + b\times(x'+x_0) + d\times(y'+y_0) + c\times(x'+x_0)^2 + e\times(x'+x_0)(y'+y_0) + f\times(y'+y_0)^2.$$

En appliquant alors les règles de la géométrie analytique, on aurait :

$$x_0 = \frac{2fb - ed}{e^2 - 4cf}, \qquad y_0 = \frac{2cd - eb}{e^2 - 4cf},$$

$$x' = x - x_0; \qquad y' = y - y_0;$$

soit $\theta - \Theta_1 = \theta - \theta_1 - x_0$, soit $t - T_1 = t - t_1 - y_0$.

ou $\Theta_1 = \theta_1 + \dfrac{2fb - ed}{e^2 - 4cf}$; ou $T_1 = t_1 + \dfrac{2cd - eb}{e^2 - 4cf}$;

$$a' = a + bx_0 + dy_0 + cx_0^2 + ex_0y_0 + fy_0^2 = \frac{ae^2 + cd^2 + fb^2 - bde - 4acf}{e^2 - 4cf};$$

$$z = a' + c\times x'^2 + e\times x'y' + f\times y'^2.$$

Dans la détermination précédente, les coefficients Θ_1 ou T_1 prennent des valeurs élevées lorsque les coefficients des termes en xy et en x^2 ou en y^2 du développement complet (I_6) convergent vers zéro; car, en pareil cas, d'après les équations ci-dessus, x_0 et y_0 tendent vers l'∞; et dès lors il en est de même de Θ_1 ou de T_1. Mais cela importe peu, attendu que les deux dernières quantités représentent une température et une époque *fictives*, qui, n'ayant pas de signification spéciale, sont de nature à prendre toute espèce de valeurs, sans nuire à la logique des choses.

Nous n'insisterons pas davantage sur la réduction que nous venons d'appliquer, parce que, comme toutes les méthodes analytiques, elle ne nous semblerait opportune au besoin que pour les campagnes scientifiques; et parce que dans la navigation courante, elle doit céder la place aux formules de marche réduites (n° 141), ou aux procédés purement graphiques (n° 142, 144 et 150).

N° 111. Simplification expérimentale de la formule rationnelle générale de la marche normale. — Dans ces derniers temps, M. le Dr Peters, déjà cité au n° 101, a étudié d'une

manière spéciale, à l'observatoire de Kiel, la formule générale (I_0) du n° 108 de la marche des chronomètres. Il est arrivé à diverses remarques importantes qu'il a déduites de l'expérimentation d'une centaine de chronomètres. En complétant ces remarques importantes par d'autres renseignements recueillis d'autre part, nous sommes arrivé aux conclusions suivantes :

1° Le groupe de termes $\left(\frac{dm}{d\theta}\right)_1 \times (\theta - \theta_1) + \left(\frac{d^2m}{d\theta^2}\right)_1 \times \frac{(\theta - \theta_1)^2}{1.2}$ de la formule (I_0) du n° 108, qui représente le défaut de compensation, doit en général être conservé en entier. D'ailleurs, le coefficient de la première puissance de $(\theta - \theta_1)$ est généralement plus grand que celui de $(\theta - \theta_1)^2$; et dès lors, dans les variations restreintes de température, l'influence du premier des deux termes ci-dessus est prépondérante. — Enfin, d'après la fin du n° 96, dans les chronomètres imparfaitement compensés, il arrive souvent que le terme en $(\theta - \theta_1)^2$ disparaît.

2° Le groupe de termes $\left(\frac{dm}{dt}\right)_1 \times (t - t_1) + \left(\frac{d^2m}{dt^2}\right)_1 \times \frac{(t - t_1)^2}{1.2}$, qui représente le changement de marche avec le temps, et dont la somme divisée par $(t - t_1)$ est l'expression mathématique de ce que nous avons appelé *l'accélération* (n° 100) appréciée par rapport à l'unité de temps adoptée, se réduit le plus souvent à $\left(\frac{dm}{dt}\right)_1 (t - t_1)$. — Pour les chronomètres *neufs* de médiocre fabrication, l'accélération est *très-forte au début*, et diminue ensuite progressivement; conséquemment cette quantité a besoin en pareille occurrence d'être *rectifiée* successivement, au moins pendant quelque temps.

3° Le terme $\left(\frac{d^2m}{d\theta . dt}\right)_1 \times (\theta - \theta_1) \times (t - t_1)$, qui représente la variation d'efficacité de la compensation avec le temps, est généralement très-faible, et se produit d'ailleurs avec une extrême lenteur. Comme M. Peters, M. de Magnac a trouvé à ce terme des valeurs insensibles pour les nombreux chronomètres qu'il a étudiés, sauf pour l'un d'entre eux, dont les marches d'ailleurs se prêtaient mal à l'interpolation. Plus récemment, M. Rouyaux a vérifié qu'il était à peu près inutile d'en tenir compte. — Toutefois ledit terme était très-important avec les anciennes montres, d'après M. Mouchez, qui fait surtout cette remarque pour les chronomètres Motel.

4° C'est lorsque les chronomètres ont atteint un an à un an et demi

d'âge des huiles, que leurs *constantes* de marche se trouvent avoir leurs valeurs le mieux assises, et aptes à se conserver sans modification aucune pendant 15 à 16 mois.

— Il résulterait des considérations précédentes qu'on pourrait, en général à la mer, au moins pour de *courtes* traversées, se borner à la formule :

$$(\mathrm{I}_2) \qquad m = a + \left(\frac{dm}{d\theta}\right)_1 \times (\theta - \theta_1) + \left(\frac{d^2m}{d\theta^2}\right)_1 \times (\theta - \theta_1)^2,$$

sous la condition expresse que a serait déterminé à nouveau dans chaque relâche.

Il importe de noter, en passant, que cette dernière équation correspond justement aux courbes chronométriques désignées sous le nom d'*isotemps* (n° 147) par M. Rouyaux, et dont cet officier a fait, dès 1875 jusqu'à ce jour, des applications de plus en plus heureuses. Pour ces motifs, nous désignerons désormais ladite équation sous le nom de *formule des isotemps*.

N° 112. Formule particulière de M. Lieussou pour la marche normale des chronomètres. — Les considérations du numéro précédent conduisent à admettre que, lorsque la série de Taylor est applicable, c'est-à-dire lorsque les marches ne sont pas discontinues, et que d'ailleurs on désire avoir une formule de marche *simple* et dont cependant il y ait moyen de faire usage pendant quelque temps, ce qui exige expressément que les chronomètres *ne soient pas neufs*, on peut *le plus souvent* s'en tenir à trois termes de correction, savoir : les termes contenant la variation de température à la première et à la deuxième puissance et le terme proportionnel à la variation du temps. — Dès lors, les considérations dont il s'agit justifient, dans une certaine mesure, la formule de marche proposée, dès 1854, par M. l'ingénieur hydrographe Lieussou, et à laquelle il était parvenu à la suite de la discussion approfondie d'un grand nombre d'observations chronométriques. Cette relation présente la forme suivante, où nous avons adopté des lettres en harmonie avec les notations de la formule (I_1) du n° 110 ; les lettres sans accent représentant d'ailleurs des quantités égales dans les deux cas :

$$(\mathrm{I}_3) \qquad m = a'' + d \times (t - t_1) + c \times (\theta - \tau)^2.$$

Les quantités a'', d, c et τ, sont ici des coefficients à déterminer à l'aide d'un nombre suffisant d'observations ; et τ, en particulier, représente la température de réglage (n° 97).

En développant le terme $(\theta - \tau)^2$, on fait aisément cadrer cette formule avec la relation générale (I_0) du n° 108, dans l'hypothèse sus-mentionnée, qui implique que les coefficients des termes en $(t - t_1)^2$ et en $(\theta - \theta_1)$ $(t - t_1)$ de cette relation, soient négligeables. — Quand on n'effectue pas ce développement, la température de réglage τ, qui joue, répétons-le, le rôle de coefficient, demeure engagée dans un carré. Or cette circonstance rend complexe la détermination de ladite quantité. De plus, elle ne permet pas d'appliquer la méthode des moindres carrés (n° 133) ou celle de Cauchy (n° 134), à la recherche de l'ensemble de tous les coefficients. Or cette application est indispensable, nous ne saurions trop le répéter, afin d'atténuer l'influence des *erreurs d'observation* (n° 116), et de donner à la formule, si tant est qu'on l'adopte, au moins dans de certains cas (n° 114), la rigueur qu'elle exige pour fournir de bons résultats.

D'un autre côté, la forme de la relation Lieussou fait acquérir au coefficient τ des valeurs démesurées, pour les montres où la variation des marches en fonction de la température se trouve sensiblement proportionnelle à ce changement, et où conséquemment le coefficient c du terme $(\theta - \theta_1)^2$ de la formule générale tend vers zéro. En effet, ce coefficient est le même que celui de $(\theta - \tau)^2$ dans ladite relation; et le terme en $(\theta - \theta_1)$ de la formule générale a évidemment son coefficient b égal à $-2c\tau$. Or cette quantité devant avoir une valeur finie, il faut que son second facteur τ devienne très-grand à mesure que c devient très-petit. — En principe, semblablement à ce qui a été dit à la fin du n° 110, une pareille circonstance n'impliquerait aucune objection, si la prétendue représentation par τ de la *température de réglage* ne se trouvait de ce fait perdre toute signification. Nous rappellerons au surplus que, d'après le n° 97, cette température n'a plus aujourd'hui dans beaucoup de cas sa raison d'être.

— Dans un autre ordre d'idées, nous remarquerons que, de même encore qu'au n° 110, on peut éviter ici, pour la détermination des coefficients, les difficultés sus-mentionnées qui proviennent de la présence de τ dans un carré. A cet effet, on développe la formule (I_3) ; et on pose :

$$a'' + c\tau^2 = a''', \quad -2c\tau = b.$$

On obtient ainsi :

$$(I_4) \qquad m = a''' + b\theta + d(t - t_1) + c\theta^2.$$

Les coefficients à déterminer sont alors a''', b, d et c. Cette détermination pourra s'effectuer ici par la méthode des moindres carrés ou par celle de Cauchy, ainsi qu'il a été recommandé plus haut. Cependant s'il n'y a pas moyen, pour un motif ou un autre, de se procurer un grand nombre d'équations, il faudra se borner à en obtenir quatre, qu'on traitera par la méthode algébrique élémentaire. Ainsi, ayant observé les marches m, m', m'', m''', qui correspondent respectivement aux époques t, t', t'', t''', et aux températures θ, θ', θ'', θ''', on aura à résoudre le système des quatre équations :

$$\begin{aligned} m &= a''' + b\theta + d(t - t_1) + c\theta^2, \\ m' &= a''' + b\theta' + d(t' - t_1) + c\theta'^2, \\ m'' &= a''' + b\theta'' + d(t'' - t_1) + c\theta''^2, \\ m''' &= a''' + b\theta''' + d(t''' - t_1) + c\theta'''^2. \end{aligned}$$

— La solution générale est connue; mais les calculs sont longs. M. Caspari a proposé de tourner la difficulté par la voie suivante :

Si l'on a deux marches *isothermes*, c'est-à-dire correspondant à la même température, on fera bien d'en déduire d avant de commencer les calculs, ce qui se fera en retranchant membre à membre les équations relatives auxdites marches. — Si l'on n'a pas de marches rigoureusement isothermes, on peut, dans des limites qui ne dépassent pas 2 à 3 degrés, interpoler proportionnellement, c'est-à-dire ramener les deux marches considérées à leur température moyenne, en appréciant leurs variations respectives d'après la différence entre les deux marches qui, parmi les quatre marches données, correspondent au plus grand écart de température. Dans les deux hypothèses précédentes, on déduira des équations ci-dessus, en les retranchant deux à deux, les relations :

$$\begin{aligned} m - m' &= b(\theta - \theta') + d(t - t') + c(\theta^2 - \theta'^2), \\ m'' - m''' &= b(\theta'' - \theta''') + d(t'' - t''') + c(\theta''^2 - \theta'''^2); \end{aligned}$$

qui ne contiennent que les inconnues b et c, lesquelles se trouvent ainsi déterminées fort simplement.

Pour la facilité et l'exactitude des calculs, on combinera les équations de telle sorte que le dénominateur commun des inconnues soit le plus grand possible. Ce dénominateur est :

$$(\theta - \theta')(\theta''^2 - \theta'''^2) - (\theta'' - \theta''')(\theta^2 - \theta'^2) = (\theta - \theta')(\theta'' - \theta''')\left[(\theta'' + \theta''') - (\theta + \theta')\right].$$

Il faut donc éviter que $(\theta + \theta')$ soit égal à $(\theta'' + \theta''')$, ce que l'on obtiendra en groupant ensemble les deux températures les plus élevées et les deux températures les plus basses.

On voit par ce qui précède comment, selon les circonstances, on est à même de simplifier les calculs.

En tout état de cause, on peut éliminer entre les quatre équations de départ le coefficient a''' par soustraction, et réduire ainsi à trois le nombre des inconnues et des équations.

— Une fois b et c calculés, on aura facilement la *température de réglage* :

$$\tau = -\frac{b}{2c}.$$

On fera bien de déterminer cette constante. Car elle constitue une caractéristique précieuse pour les chronomètres qui *ont effectivement une température de réglage* (n° 97); et elle donne, en cette hypothèse expresse, la meilleure idée de l'allure de la montre aux diverses températures. — Dans tous les cas, la détermination en question, ainsi du reste que celle de a'' doivent toujours être effectuées, afin qu'on puisse, lors du calcul des marches *à posteriori*, se servir de l'équation même de M. Lieussou, dont l'usage est alors plus rapide que celui de sa transformée.

Pour parfaire ce qui concerne cette équation, nous montrerons au n° 148, quelle est son interprétation géométrique.

N° 112. Autres formules particulières pour la marche normale des chronomètres. Considération spéciale de l'hypothèse de la proportionnalité des variations de la marche aux variations de la température. — Nous ne parlerons que pour mémoire des autres formules proposées en leur temps par différents navigateurs, pour tenir compte des variations de la température et de l'âge des huiles. Ces diverses formules rentrent, en fait, dans la relation générale (1_0) du n° 108, en y faisant nuls un plus ou moins grand nombre des coefficients. Du reste, elles n'avaient pas été établies rationnellement, mais seulement d'instinct, pour ne pas dire de fantaisie.

Toutefois, il est un point qu'il nous reste à examiner de plus près : c'est l'hypothèse des variations de la marche proportionnelles aux variations de la température. Cette règle, en principe inexacte, comme cela ressort du n° 111, est pourtant recommandée par des officiers expérimentés; et on la trouve même dans des ouvrages destinés à l'enseignement.

Nous avons indiqué au même n° 111 comment on peut y être amené, quand on a entre les mains des instruments imparfaite-

ment compensés. Il serait donc possible qu'avec de pareils chronomètres, la proportionnalité fût plus exacte qu'avec une montre bien réglée. — C'est ainsi que M. Mouchez, dans son rapport sur la campagne de la *Capricieuse*, a pu dire qu'à certains égards un chronomètre Motel, qui variait de plus de 1 seconde par degré de température, était d'un usage plus sûr, avec la formule de la simple proportionnalité, que d'excellents chronomètres Winnerl suivis en même temps, et sur lesquels les changements de température n'avaient qu'une influence indécise (n° 97). Mais si une pareille sensibilité peut avoir l'avantage de correspondre à une loi de correction bien nette, elle expose, par contre, à des erreurs provenant de la difficulté d'apprécier exactement la température moyenne de chaque jour.

Du reste, aujourd'hui de semblables circonstances ne sont plus appelées à se rencontrer; car les conditions d'acquisition des chronomètres sont réglées de telle sorte qu'on n'admettrait aucun chronomètre qui varierait de plus de 3 secondes, en passant de la température ambiante (variable de 10° à 20°) à la température de 0° ou à celle de 30°.

N° 114. Conclusions relatives aux formules de marche qu'il convient en définitive d'adopter. De leur remplacement par les procédés graphiques. — Si on réfléchit à ce que les résultats de M. Peters (n° 111), comme ceux de M. Lieussou (n° 112), se rapportent à des expériences faites à terre, et que, somme toute, elles ne portent que sur un nombre déterminé de chronomètres, il appert que la voie la plus logique, au moins pour les campagnes scientifiques, est encore d'employer, en principe, la formule générale (I_0) du n° 108.

En opérant ainsi, on ne s'expose à aucun inconvénient; car la détermination des coefficients indique dans chaque cas, ceux d'entre eux qui peuvent être regardés comme nuls. Il importe d'ailleurs de remarquer que cette détermination est presque aussi longue, quelle que soit la formule employée, du moment qu'on a recours aux méthodes (n°s 133 et 134), qui ont pour objet *l'atténuation des erreurs d'observation*, atténuation *indispensable* pour donner à toute formule l'efficacité voulue dans ses applications *à posteriori*. — On ne saurait trop insister sur cette dernière remarque; elle semble avoir échappé à presque tous les auteurs, qui, en comparant entre elles les diverses formules dont nous venons de parler, en ont examiné les *essences* res-

pectives, sans faire attention, dans les exemples cités par eux, que très-souvent le mode de calcul des coefficients n'était pas le même dans les divers cas. Or cette circonstance faussait manifestement lesdites comparaisons, surtout au point de vue de la longueur des opérations.

— D'après les considérations qui précèdent, l'usage de la formule rationnelle générale (I_0) du n° 108, doit être exclusivement adopté quand il s'agit d'avoir des résultats *rigoureux*, et que d'ailleurs on se propose de conserver la même formule pendant longtemps.

De son côté, l'emploi de la *formule des isotemps* (I_2) du n° 111 bornée à la navigation courante, et pour des traversées courtes, surtout avec des chronomètres neufs, est à recommander, sous la condition qu'on *y rectifie* la constante *a* de la marche à chaque nouveau voyage. — Quant à la relation Lieussou, elle peut, d'après le n° 112, être employée en l'état actuel des choses, lorsqu'on se propose de faire usage *pendant un certain temps* de la formule de marche. Mais elle exige expressément alors que les chronomètres *ne soient pas neufs*. On conclut de là incidemment que cette relation n'est pas applicable à un chronomètre quelconque, d'un tempérament inconnu.

—Il nous reste à dire que l'emploi des *graphiques* de marche (n°s 142, 144, 149 et 150), qui tend aujourd'hui à se substituer aux formules, est appelé à prendre le pas sur les procédés analytiques, au moins dans la navigation courante.

Pourvu qu'on emploie une échelle suffisamment grande, et qu'on trace les courbes en tenant compte des *erreurs d'observation* (n° 116), les *graphiques* de marche donnent au moins autant d'exactitude que les formules approximatives précitées. — Ils sont d'ailleurs indispensables pour comparer entre eux *de visu* les divers chronomètres dont on dispose. Ils offrent incidemment l'avantage d'échapper aux interminables discussions, rappelées implicitement dans les numéros précédents, relatives à la conservation d'un plus ou moins grand nombre des termes fournis par la série de Taylor. Enfin, ils représentent, dans chaque cas, la *véritable fonction* qui lie la marche aux variations de la température et de l'âge des huiles, et cela avec d'autant plus de rigueur que leur tracé aura été effectué avec des points plus rapprochés et d'ailleurs obtenus avec les précautions sus-mentionnées.

*** N° 115. Distinction entre la marche normale instantanée et la marche normale moyenne. Formule géné-**

rale de l'état absolu. — Il importe de remarquer que, rigoureusement parlant, la marche normale considérée dans tout ce qui précède n'est qu'une marche *instantanée*. En d'autres termes, elle n'est autre que la dérivée totale à un instant quelconque de l'état absolu R (que l'on ramène toujours aujourd'hui à être un *retard*), prise par rapport au temps, l'unité servant à mesurer ce dernier étant d'ailleurs le jour moyen.

C'est donc en réalité $\frac{dR}{dt}$ qu'on a posé égal à $f(\theta, t)$ au n° 108. M. Villarceau a du reste émis implicitement cette opinion à la page 40 des « *Recherches sur l'emploi des chronomètres* », par M. de Magnac. On est dès lors conduit à regarder la température θ comme une fonction implicite du temps t. Ce point de vue n'est pas sans soulever des discussions. On objecte, en effet, que dans un pareil ordre d'idées, toutes les choses se trouveraient être des fonctions du temps. — A cela nous répondrons qu'il en est ainsi pour toutes les quantités qui ont, comme la température θ, des valeurs déterminées à des époques successives données. La fonction considérée n'est pas plus connue que la fonction générale sus-mentionnée, adoptée pour la marche instantanée; mais elle existe au même titre que cette dernière fonction. Au surplus, l'hypothèse de θ fonction de t ne change rien aux formules à employer; elle rend seulement plus net et plus rigoureux l'établissement de ces formules. — Selon cette manière de voir, qui a été adoptée par M. Crévost, dans son enseignement sur le Borda, on a évidemment pour expression générale de l'état absolu :

$$R = R_1 + \int f(t, \theta) dt,$$

R_1 étant une constante représentant l'état absolu à une époque déterminée.

De son côté, la valeur m de la marche normale *moyenne* par jour moyen, devient :

$$m = \int_t^{t+1} f(t, \theta)\, dt.$$

— Quel que soit le développement adopté pour $f(t, \theta)$ en fonction de $(t - t_1)$ et de $(\theta - \theta_1)$, le premier terme en θ deviendra un terme en $\int_t^{t+1} (\theta - \theta_1)\, dt$, dernière quantité qui n'est autre, à une constante près, que la température moyenne du jour considéré. Mais pour

les termes renfermant θ à d'autres puissances que l'unité, ainsi que pour ceux contenant à la fois θ et t, il surgit une difficulté, parce qu'on se trouve en présence d'intégrations ineffectuables. — On élude cette difficulté en remarquant que, dans l'intervalle d'un jour moyen, la température d'un chronomètre s'écarte peu de sa valeur moyenne, eu égard à ce que les montres sont, en principe, renfermées dans une armoire spéciale. Il est dès lors licite d'admettre que pour chaque jour la quantité θ est une constante, égale à la valeur moyenne de la température du chronomètre pendant le jour considéré, cette valeur étant d'ailleurs obtenue comme il est expliqué plus loin (n° 152).

Cela compris, en admettant le développement sus-mentionné de Taylor pour la marche normale *instantanée*, on trouve que l'expression générale de la marche normale *moyenne* par jour moyen, peut s'écrire :

$$(I_3)\quad m = a + b\times(\theta-\theta_1) + c\times(\theta-\theta_1)^2 + d\times(t-t_1) + e\times(\theta-\theta_1)(t-t_1) + f\times(t-t_1)^2,$$

en ayant soin, du reste, d'ordonner les divers termes d'après les valeurs *décroissantes* des constantes qui y entrent, ainsi que cela nous sera utile par la suite (n° 134). Dès lors la marche en question devra être considérée dans les applications, en particulier au point de vue de la *théorie des erreurs d'observation*, comme une fonction de deux quantités *indépendantes* $(\theta-\theta_1)$ et $(t-t_1)$.

— D'un autre côté, pour la même heure du méridien que celle qui correspond à l'état de départ R_1, et pour le n^{me} jour à compter de l'époque propre à ce dernier état, on aura :

$$R = R_1 + \Sigma m = R_1 + a\times(n-1) + b\times\Sigma(\theta-\theta_1) + c\times\Sigma(\theta-\theta_1)^2 + d\times\Sigma(t-t_1)$$
$$+ e\times\Sigma(\theta-\theta_1)(t-t_1) + f\times\Sigma(t-t_1)^2.$$

Toutefois, on n'a guère en général occasion de se servir de cette dernière formule ; car l'état absolu se calcule ordinairement de jour en jour (n° 155).

2e PARTIE. — § IV. NOTIONS SUR LA THÉORIE DES ERREURS D'OBSERVATION; ET MÉTHODES POUR CALCULER LES CONSTANTES DE TOUTE FORMULE REPRÉSENTANT UN PHÉNOMÈNE PHYSIQUE QUELCONQUE.

* **N° 116. Nécessité du présent résumé de la théorie des erreurs d'observation.** — Après avoir établi dans le pa-

ragraphe précédent les formules de marche qui conviennent aux chronomètres, il reste à montrer comment il convient d'en calculer les *constantes*, de façon que l'emploi de ces formules ne conduise pas à des résultats médiocres, qui les fassent rejeter comme mauvaises par les marins, alors que c'est leur établissement *numérique* seul qui est en défaut. Or, la principale précaution à prendre pour atteindre le but dont il s'agit, c'est de tenir compte des *erreurs d'observation*. Mais ce mode de procéder a besoin, pour être manié avec intelligence, qu'on possède au moins quelques notions succinctes et précises sur la théorie de ces erreurs.

Cette théorie a été complétement ignorée jusqu'ici par les navigateurs; mais aujourd'hui la nécessité de son étude résulte non-seulement de ce que nous venons de dire pour les chronomètres, mais aussi (n° 63) de l'emploi de *Nouvelles méthodes* pour déterminer le point observé. Il y a donc, à tous égards, une incontestable utilité à en donner présentement un résumé méthodique.

Nous ne saurions trop recommander au lecteur de ne pas se laisser rebuter par quelques difficultés premières que présente la théorie qui nous occupe, et qui tiennent surtout à la spécification des différentes sortes d'erreurs. Pour bien comprendre cette spécification, que nous avons d'ailleurs explicitée plus qu'on ne le fait d'habitude, le mieux est de s'exercer sur des exemples numériques. Mais une fois ce point possédé, le reste de la question se présente réellement avec un grand degré de simplicité.

En tout état de cause, pour approfondir la théorie des erreurs d'observation, le lecteur pourra se reporter aux ouvrages suivants:

LIAGRE. *Calcul des probabilités et théorie des erreurs.* — Bruxelles, 1852.

BERTRAND. Traduction française des *Mémoires de Gauss, sur la combinaison des observations.* — Paris, 1855.

FAÀ DE BRUNO. *Traité élémentaire du calcul des erreurs.* — Paris, 1869.

BRÜNNOW. *Traité d'astronomie sphérique et pratique*, édition française. — Paris, 1869.

CHAUVENET. *Manual of spherical and practical astronomy.* — Londres, Trübner et C°. Nous recommandons tout particulièrement ce dernier ouvrage, qui est trop peu connu en France.

* **N° 117. Défaut de précision des observations.** — Quel que soit le soin que l'on apporte dans l'observation d'un phénomène

ou dans la mesure d'une grandeur, le nombre qu'on en conclut est toujours entaché d'erreurs plus ou moins notables. L'imperfection des instruments et surtout celle des sens de l'homme, introduisent dans l'opération des causes simultanées d'inexactitude qui altèrent les résultats. Si les observations ont été faites avec soin, et si l'instrument n'est pas par trop imparfait, les erreurs commises sont généralement renfermées entre des limites restreintes, et sont assujetties à certaines lois de probabilité. C'est de ces limites qu'on déduit la précision des observations et le degré de confiance qu'il convient de leur accorder. La considération des erreurs doit donc être d'un usage continuel dans les sciences d'observation; et leur appréciation exacte est de la plus haute importance. Dans l'état actuel de la science, si l'on veut qu'un résultat puisse être utile et servir de base ou de comparaison à d'autres travaux, on ne doit jamais le publier sans préciser le degré de confiance qu'il mérite, c'est-à-dire sans indiquer l'erreur probable dont il est affecté.

On voit par là combien il importe d'avoir une voie sûre, à l'aide de laquelle on puisse déduire d'un système d'observations, malgré les erreurs inévitables de chacune d'elles, un résultat aussi voisin que possible de la vérité. C'est cette méthode qui constitue ce qu'on appelle la *Théorie des erreurs d'observation.* Elle repose sur les principes du calcul des probabilités, et peut être résumée en quelques règles pratiques, que nous allons indiquer, sans démontrer d'ailleurs toutes les formules auxquelles on est conduit.

*** N° 118. Classification des erreurs d'observation. Erreurs systématiques.** — Abstraction faite de l'emploi d'instruments trop défectueux, ainsi que des erreurs grossières provenant de la négligence ou de la maladresse, et qu'un observateur soigneux parvient toujours à éviter, il y a lieu de diviser les erreurs acceptables en deux grandes classes : les unes sont *régulières* ou *systématiques;* les autres sont *irrégulières* ou *accidentelles.*

Les erreurs *systématiques* sont communes à toutes les mesures faites avec le même instrument ou par le même observateur; elles se reproduisent identiquement chaque fois que l'observation est répétée dans les mêmes circonstances; et leur grandeur est liée à ces circonstances par des lois déterminées. Mais elles peuvent varier d'une observation à une autre, en ayant entre elles une certaine différence. Elles sont susceptibles de provenir soit d'un défaut particulier de l'instrument employé, soit de la personnalité de l'observateur. — Comme

exemples de causes donnant naissance, du fait de l'instrument, à des erreurs de la catégorie dont il s'agit, on peut citer : avec les instruments de géodésie, un mauvais étalonnage des règles destinées à la mesure d'une base ; avec tous les appareils pour observation d'angles, l'imperfection de la graduation et le défaut de parallélisme des axes optiques, par rapport au limbe : avec les sextants, l'adoption d'un *angle de collimation* inexact ; et avec tout instrument à réflexion, l'imparfaite rectification des miroirs, ou le manque de parallélisme de leurs faces ; l'excentricité, c'est-à-dire le défaut de coïncidence entre le centre de rotation de l'alidade et le centre de la graduation. — En ce qui concerne les erreurs *systématiques* propres à l'observateur, il convient de mentionner particulièrement *l'équation personnelle* provenant de l'*oreille* et de l'*œil*. Cette équation se traduit : 1° par le retard normalement constant, que l'observateur met à noter l'instant précis d'un phénomène ; 2° par une erreur d'approximation, normalement constante aussi, dans la mise en contact de deux objets observés.

— Une série de mesures affectées d'erreurs *systématiques*, se trouve absolument impropre à déterminer la vraie valeur de la grandeur à apprécier. Le talent de l'observateur réside principalement dans ce tact, cette sagacité, qui lui font découvrir les causes des erreurs *systématiques*, et lui permettent de se soustraire à leur influence s'il est possible, ou tout au moins d'en corriger les effets. Pour découvrir ces erreurs et arriver à les éliminer, on change, par exemple, la méthode d'observation, l'instrument employé, voire même l'observateur ; et en combinant judicieusement les résultats fournis par chaque combinaison, on parvient à obtenir un résultat final dégagé de la cause constante d'erreur.

Les traités spéciaux indiquent, pour chaque instrument, les méthodes qui permettent d'arriver à la détermination des principales erreurs *systématiques*. Nous n'avons pas à nous en occuper ici même ; mais on trouvera dans NOTRE TROISIÈME PARTIE tout ce qui concerne à ce sujet les divers appareils et instruments qui concourent à la détermination de la position du navire à la mer.

⁎ N° 119. Erreurs accidentelles. Considérations qui leur sont propres. — Quant aux erreurs de la deuxième catégorie, c'est-à-dire quant aux erreurs *accidentelles*, l'observateur le plus soigneux ne peut jamais s'en affranchir complétement.

Leurs causes sont très-variables, et leur influence sur les résultats

n'est assujettie à aucune règle ; car elles les altèrent tantôt dans un sens, tantôt dans un autre. — Telles sont les erreurs qui résultent de l'imperfection de nos organes, non pas ici dans son influence *constante*, qui correspond à la double *équation personnelle* systématique citée au numéro précédent, mais dans son influence *variable* avec notre état physiologique du moment. Ces erreurs correspondent alors *accidentellement* à un mauvais contact, à un pointé inexact, à une mauvaise lecture, etc. — Il faut aussi regarder comme erreurs *accidentelles* celles qui résultent des circonstances particulières des milieux où l'on opère, comme, par exemple, les réfractions latérales, les secousses de l'instrument dues au vent, les trépidations de l'air, qui rendent la vision moins nette, etc.

Si, dans les observations, on se bornait à mesurer le nombre strictement nécessaire d'éléments, les résultats ne fourniraient aucun moyen de contrôle ; et les erreurs les plus grossières pourraient passer inaperçues. Mais si l'on fait plus d'observations qu'il n'est rigoureusement indispensable ; si, en d'autres termes, on se donne plus d'équations que d'inconnues, les opérations se vérifient l'une par l'autre ; et les *erreurs accidentelles* qui ont été commises font naître des contradictions, des incompatibilités entre les résultats. — Lorsqu'on mesure trois fois le même angle, par exemple, les résultats diffèrent en général l'un de l'autre ; et la différence susceptible d'exister entre le premier résultat et l'angle véritable, est incompatible avec les deux autres résultats. Or, comme le propre des erreurs dont il s'agit est de fausser les mesures, tantôt dans un sens, tantôt dans un autre, si l'on répète le plus possible le nombre des observations, on doit s'attendre à ce que le résultat de chacune d'elles soit aussi souvent trop grand que trop petit. De la sorte, dans le résultat final, ces erreurs se compensent en grande partie les unes par les autres.

Pour arriver à un résultat que l'on puisse *admettre comme la vérité*, il faut nécessairement faire disparaître lesdites contradictions ou incompatibilités, entre les diverses mesures de la même grandeur, en appliquant des *corrections* à plusieurs des observations. Mais ceci n'implique nullement qu'un observateur puisse choisir *arbitrairement* un système de corrections amenant la concordance voulue entre les divers résultats. Au contraire, la méthode dont nous allons résumer l'esprit est destinée à écarter, autant que possible, toute opération arbitraire, et à fournir des règles qui con-

duisent, pour toute quantité ou pour toute position déterminée expérimentalement, aux résultats *les plus probables* (n° 122). Il est bon de faire observer néanmoins, afin de mettre en garde contre de fausses applications, que la théorie du calcul des erreurs repose sur l'hypothèse d'un nombre d'observations *suffisamment grand*, pour qu'on puisse apprécier les erreurs probables auxquelles ces observations sont soumises.

— En résumé, les *erreurs accidentelles* (les seules dont il y ait lieu de s'occuper dans la théorie des probabilités) sont dues à des causes dont on ignore la nature ou la manière d'agir; mais qui sont aptes à se combiner entre elles, et à produire des effets tout à fait opposés sur les résultats. Afin que les erreurs puissent être considérées comme entièrement *accidentelles*, il faut que l'observateur ait la même facilité de les commettre soit *positivement*, soit *négativement*. — Si par hasard les résultats penchaient plutôt dans un sens que dans un autre, on devrait en conclure qu'il existe quelque erreur *systématique*, provenant de la construction des instruments, de la manière d'opérer, ou de l'observateur lui-même. Lorsqu'on parvient à connaître cette erreur *systématique*, et qu'on peut en éliminer l'influence sur les observations, les erreurs restantes sont purement *accidentelles*.

Ainsi donc les *erreurs accidentelles* ont pour principal caractère d'altérer indifféremment en plus ou en moins les grandeurs qu'on se propose de déterminer. Elles oscillent entre des limites généralement assez restreintes, limites qui varient avec le genre des observations, la nature et la manœuvre des instruments employés, le talent des observateurs. Au surplus ces erreurs ne se commettent pas toutes avec la même facilité. Il est bien évident qu'avec un observateur exercé les grosses erreurs se présenteront moins souvent que les petites, en sorte qu'une erreur est d'autant *plus probable* qu'elle est *plus petite*. — S'il en était autrement, il faudrait nier la perfectibilité humaine à observer. Ce serait d'ailleurs en contradiction avec ce sentiment instinctif qui porte à admettre qu'on est le plus près de la vraie grandeur d'une quantité, quand les résultats des observations s'écartent le moins possible entre eux.

✱ **N° 120. Valeurs résiduelles des erreurs accidentelles. Loi de répartition de ces valeurs.** — Quand on détermine une grandeur par plusieurs mesures directes, si toutes les observations sont également bien faites, il est naturel de prendre la *moyenne*

arithmétique de tous les résultats comme la quantité s'approchant le plus possible de l'exactitude. Si cette moyenne était l'*exactitude* même, sa différence avec chaque résultat particulier représenterait la valeur *précise* de l'*erreur accidentelle* de ce résultat. — Comme il n'en est pas ainsi, ladite différence s'appelle *valeur résiduelle* de l'*erreur accidentelle*, ou simplement ERREUR RÉSIDUELLE. — Les erreurs résiduelles peuvent être positives ou négatives. Elles sont d'ordinaire inégales entre elles; mais elles se trouvent toujours très-petites, quand on a observé avec soin.

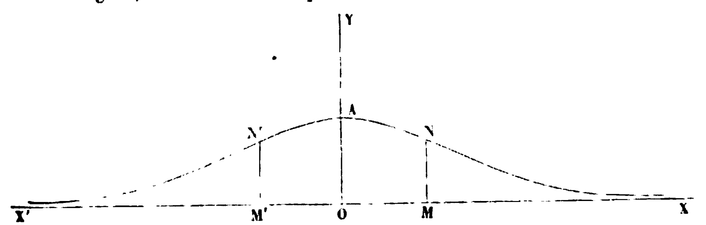
Par leur irrégularité, par leur nature même, les erreurs accidentelles ne semblent pas tout d'abord susceptibles d'être soumises au calcul. Cependant la théorie et l'expérience sont d'accord pour montrer que, lorsque l'on considère un très-grand nombre d'observations d'une même grandeur, les erreurs purement accidentelles sont réparties suivant une loi très-remarquable que nous allons faire connaître.

Si l'on forme des groupes avec les *valeurs résiduelles* de ces erreurs, en assemblant entre elles celles desdites valeurs qui sont égales ou à peu près, on reconnaît que les groupes des erreurs positives et ceux des erreurs négatives sont également nombreux et sensiblement les mêmes de chaque côté de la moyenne arithmétique de toutes les observations. A mesure que l'erreur concernant un groupe augmente, le nombre des termes de ce groupe d'erreurs diminue rapidement suivant une loi régulière. — Après avoir dressé le tableau des groupes d'erreurs en question, on peut en déduire le tracé graphique d'une courbe N'AN, dite *courbe de probabilité*, qui représente la manière dont les erreurs sont distribuées de part et d'autre de la moyenne. Dans ce tracé, qui donnerait une courbe analogue à celle de la *fig.* 34, on porte sur l'axe OX les grandeurs tant positives que négatives des erreurs des divers groupes, et sur l'axe OY le nombre des erreurs comprises dans chacun de ces groupes. Théoriquement cette courbe devrait être symétrique par rapport à l'axe OY, qui correspond à une erreur de *valeur résiduelle* nulle; mais il est rare qu'il en soit complétement ainsi, parce que les causes d'erreur en plus et en moins, ne sont jamais parfaitement égales et indépendantes.

En s'appuyant sur les principes du calcul des probabilités, on peut établir *à priori* la loi de la répartition des erreurs accidentelles. Nous avons déjà dit que les petites erreurs doivent être plus fré-

quentes que les grandes. Par conséquent, le nombre de fois qu'existe une erreur de grandeur déterminée, est fonction de cette grandeur même. — Admettons que la moyenne arithmétique de toutes les observations soit la valeur *la plus probable* (n° 122) de la grandeur *exacte*, et du reste inconnue, correspondant à ces observations ; et désignons par x la *valeur résiduelle* d'une erreur *qu'on se fixe*. Les principes en question mettent à même de trouver la *probabilité* y qu'on a de commettre cette erreur x, c'est-à-dire le rapport entre le nombre 3, par exemple, d'erreurs de cette valeur, et le nombre total 50 des

Fig. 34, relative à la loi de probabilité des erreurs accidentelles.



observations. Ceci, pour parler vulgairement, revient à dire qu'avec les nombres pris pour exemple, il y aurait 3 à parier contre (50 — 3) ou 47 qu'on a commis une erreur de grandeur x sur chaque observation.

On démontre que la probabilité en question y, est exprimée par la formule :

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}; \qquad (54)$$

dans laquelle :

π représente le rapport de la circonférence au diamètre ;
e la base des logarithmes népériens ($e = 2,71828...$) ;
h une constante qui varie avec chaque espèce d'observations, et dont nous expliquerons au n° 122 le mode de détermination, *à posteriori* du reste.

— Si l'on construit, *fig*. 34, la courbe représentée par l'équation (54), elle varie de forme selon les différentes valeurs que l'on attribue à la constante h ; mais elle a toujours l'axe X'X des abscisses pour asymptote.

Les probabilités des erreurs étant représentées par les ordonnées de cette courbe, on voit que plus une erreur est petite, plus on a de chances de la commettre. Cette probabilité décroît rapidement à mesure que l'erreur augmente, ainsi que nous en avons prévenu à la fin du n° 119.

* **N° 121. Formules de probabilité des erreurs accidentelles. Propriété de la constante h.** — L'expression (54) étant admise comme la loi des erreurs *accidentelles*, permet dès lors de calculer les limites entre lesquelles elles ont grande chance de tomber. En effet, la *probabilité* P_1 de commettre une erreur qui soit *comprise* entre les limites $-x$ et $+x$, c'est-à-dire le rapport entre le nombre d'erreurs comprises depuis $-x$ jusqu'à $+x$, et le nombre total des observations, est donné par la formule :

$$(55) \qquad P_1 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{+x} e^{-h^2x^2}\, dx.$$

Mais l'intégrale ci-dessus est évidemment le double de l'intégrale définie, lorsque celle-ci est prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = +x$: on peut donc écrire :

$$(56) \qquad P_1 = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+x} e^{-h^2x^2}\, dx.$$

Il convient de remarquer que la valeur de P_1 n'est autre chose que l'aire de la courbe représentée par l'équation (54), comptée depuis l'ordonnée qui correspond à l'abscisse $-x$ jusqu'à celle qui correspond à l'abscisse $+x$. Comme la courbe est symétrique par rapport à l'axe OY, on peut dire aussi que P_1 représente le double de l'aire comprise entre cet axe et l'ordonnée qui correspond à $+x$.

— La constante h, qui caractérise (n° 120) tout système d'observations, peut servir de mesure à l'exactitude de celles-ci. En effet, d'après ce qui précède, la probabilité qu'une erreur, dans une série d'observations, soit comprise entre les limites $-a$ et $+a$ est exprimée par :

$$P_1 = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_{x=0}^{x=a} e^{-h^2x^2}\, dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{t=0}^{t=ha} e^{-t^2} dt,$$

en prenant $t = hx$ pour nouvelle variable indépendante.

Il importe de remarquer que la notation t avec la précédente signification, est adoptée par tous les auteurs de Calcul des probabilités. On doit bien se garder de confondre le présent usage de cette lettre avec l'emploi habituel qu'on en fait pour désigner le temps.

En tout état de cause, dans une autre série d'observations plus

ou moins exactes que les premières, la probabilité qu'une erreur tombe entre les limites $-a'$ et $+a'$ sera :

$$P'_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{t=0}^{t=h'a'} e^{-t^2}\, dt.$$

Or ces deux intégrales P_1 et P'_1 seront égales si $ha = h'a'$. On déduit de là :

$$\frac{h}{h'} = \frac{a'}{a}.$$

Les constantes h et h' qui se rapportent aux deux systèmes d'observations, sont donc inversement proportionnelles aux limites d'erreurs de même probabilité. Si, par exemple $h = 2h'$, une erreur ayant pour limite $\pm 2a$ est aussi probable dans le second système qu'une erreur ayant pour limite $\pm a$ dans le premier ; par suite, le premier système est d'une exactitude deux fois plus grande que le second. C'est pour ce motif qu'on appelle h la *mesure de précision* ou le *module de convergence* des observations. — Toutefois, nous allons voir, dans le numéro suivant, que cette mesure de précision est avantageusement remplacée en pratique par une autre quantité.

* **N° 122. De l'erreur probable ; ses propriétés. Valeur la plus probable d'une quantité, et position la plus probable d'un point.** — La constante h est essentiellement abstraite et ne représente rien à l'esprit. Il est beaucoup plus commode en pratique de lui substituer ce qu'on appelle l'*erreur probable*. Si, ainsi que le fait Gauss, on pose comme ci-dessus $hx = t$, l'intégrale (56) prend la forme suivante :

$$(57) \qquad P_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{t=0}^{t=hx} e^{-t^2}\, dt.$$

Parmi les différentes valeurs de t, il en est une très-remarquable, c'est celle pour laquelle l'intégrale P_2 acquiert la valeur $\frac{1}{2}$. — Si, dans une longue série d'observations, on rangeait les erreurs suivant leur ordre de grandeur, sans avoir égard aux signes, en écrivant chacune d'elles autant de fois qu'elle se présente réellement, cette valeur de t les diviserait en deux groupes d'égal nombre. La valeur de x correspondant à cette valeur de t est l'*erreur qu'on a une probabilité $\frac{1}{2}$ de ne pas dépasser ;* c'est celle qui occupe exactement le

milieu de la rangée. On la nomme ERREUR PROBABLE *commune à chacune des observations*, parce qu'il n'existe pas plus de raisons pour qu'elle soit dépassée par une quelconque des erreurs commises, qu'il n'y en a pour qu'elle ne le soit pas. — Cournot lui donnait le nom plus rationnel d'*erreur médiane*. Mais cette appellation n'a pas été ratifiée par l'usage.

Au point de vue géométrique, il est bon de noter que l'*erreur probable* est représentée sur la courbe des probabilités, *fig.* 34, par une longueur OM, ou OM′, telle que l'ordonnée correspondante MN, ou M′N′, partage en deux parties égales l'aire ANXO, ou son égale AN′X′O. Cette conséquence découle de l'interprétation géométrique que nous avons indiquée au n° 121 pour l'intégrale (56).

D'ordinaire, on appelle ρ ladite valeur particulière de t pour laquelle $P_2 = \frac{1}{2}$. On trouve facilement que :

$$\rho = 0{,}476\,9363\ldots..$$

— Si l'on désigne par r la valeur de x pour laquelle $t = \rho$, c'est-à-dire si l'on pose $r =$ *erreur probable*, la relation établie plus haut $hx = t$, donne $hr = \rho$. Cette égalité permet de calculer, ainsi que nous l'avons annoncé au n° 120, la constante h, quand on connaît l'erreur probable r afférente à une série d'observations, erreur qu'on détermine elle-même comme il est indiqué au n° 126. Mais ce calcul de h n'offre aucune utilité pratique ; car il faut passer par l'intermédiaire de l'erreur probable r, et nous allons voir que l'inverse de cette erreur peut être substituée à h pour apprécier la *précision* d'une observation ; c'est même un terme de comparaison beaucoup plus habituel que h.

Pour démontrer la validité de la substitution de $\frac{1}{r}$ à h, il suffit de remarquer que si, pour un système d'observations, on a :

$$\rho = hr,$$

pour un autre système, on aura :

$$\rho = h'r' ;$$

d'où l'on conclut :

$$\frac{r}{r'} = \frac{h'}{h}.$$

Cette proportion montre que *les erreurs probables r sont en raison inverse des mesures de précision h*. Elles peuvent donc servir à comparer des observations de qualités différentes ; et, en particulier, on

peut dire que plus l'erreur probable d'un système d'observations est petite, plus les observations sont précises.

— C'est ici le moment de définir mathématiquement une expression dont nous avons déjà fait un fréquent usage, et que nous invoquerons encore souvent dans la suite.

Il s'agit de ce qu'on doit entendre par ***valeur la plus probable*** d'une quantité et par ***position la plus probable*** d'un point. Cette expression correspond au cas où le résultat considéré, supposé d'ailleurs corrigé de ses erreurs ***systématiques*** (n° 118), a son ***erreur probable*** réduite au ***minimum***. Du reste, en vertu du n° 126, il en est de même alors pour l'***erreur moyenne***, dite aussi ***erreur à craindre***.

Lorsqu'on n'a qu'à considérer en ***elle-même*** une série d'observations d'une même quantité, la valeur ***la plus probable*** est évidemment, en vertu de la définition précédente et de celle de l'erreur probable, la moyenne arithmétique de toutes les observations.

Mais lorsqu'il s'agit de quantités devant satisfaire à une suite d'équations de conditions (n° 132) dépendant desdites observations, on démontre que les résultats ***les plus probables*** sont donnés par la Théorie des moindres carrés (n° 133).

⁎ N° 123. Construction et usage de la table de probabilité des erreurs accidentelles. — Si l'on élimine h entre les deux relations $hx = t$, $hr = \rho$, on obtient :

$$t = \rho\left(\frac{x}{r}\right);$$

et l'intégrale P_2 devient :

$$P_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{t=0}^{t=\rho\frac{x}{r}} e^{-t^2}\,dt. \tag{58}$$

On a réduit en table (Table II de la fin du texte) les valeurs de l'intégrale (58). Mais pour simplifier l'usage de cette table dans les applications, on a pris pour argument d'entrée le rapport $\left(\frac{x}{r}\right)$, au lieu du produit $\rho\left(\frac{x}{r}\right)$.

— La Table II donne donc la probabilité que, pour une espèce quelconque d'observations, la valeur ***résiduelle*** x de chaque erreur accidentelle, soit (n° 129) chaque ***erreur résiduelle***, ne dépasse pas une certaine limite exprimée en fonction de l'***erreur probable*** r commune à chacune des observations. On voit, par exemple, que

$0,054 = \frac{54}{1000}$ pris dans la deuxième colonne, représente la probabilité P_2 d'une erreur résiduelle x égale à 0,1 de l'erreur probable r. En d'autres termes, sur 1000 observations, il y en aura 54 où l'erreur x sera plus petite que 0,1 de r. — On trouve de même que sur 1000 erreurs résiduelles, il y en aura 107 au-dessous de 0,2 de l'erreur probable, 160 au-dessous de 0,3, etc.....

Si l'on considère une série d'observations suffisamment nombreuses, la table en question permet de calculer immédiatement le nombre d'erreurs résiduelles comprises (en valeur absolue) entre zéro et x, lorsqu'on connaît le rapport $\left(\frac{x}{r}\right)$ de la limite considérée x à l'erreur probable r. Il suffit, en effet, de prendre, dans la table qui nous occupe, la valeur numérique de l'intégrale P_2 correspondant au rapport $\left(\frac{x}{r}\right)$, puis de multiplier cette valeur numérique par le nombre n des observations : le produit représentera le nombre des erreurs résiduelles plus petites que x en valeur absolue. — Ainsi pour $\left(\frac{x}{r}\right) = 0,1$ comme ci-dessus, et pour $n = 200$, on trouvera $0,054 \times 200 = 10,8$: soit, en nombre rond, 11 erreurs résiduelles plus petites que 0,1 de r.

La différence des deux valeurs de P_2 correspondant aux rapports $\left(\frac{x}{r}\right)$, $\left(\frac{x'}{r}\right)$, multipliée par n, donnera de la même façon le nombre des erreurs comprises entre x et x'.

— En résumé, au moyen de la Table II, il est facile de calculer le nombre des erreurs comprises entre deux limites déterminées; et, quand on dispose d'une longue suite d'observations, on peut se convaincre que les nombres *théoriques*, ainsi trouvés, s'accordent presque exactement avec les nombres *effectifs* obtenus.

Comme preuve de l'accord qui règne entre la théorie et l'expérience, nous ne pouvons mieux faire que de citer un exemple tiré de l'ouvrage de Bessel « *Fundamenta astronomiæ* ». On y trouve discutée une série de 470 observations, faites par Bradley pour la détermination directe de la différence d'ascension droite entre les deux étoiles *Altaïr* et *Sirius*. — Bessel a d'abord trouvé, au moyen des règles indiquées plus loin (n° 126), que l'*erreur probable* pour l'exemple dont il s'agit était $r = 0'',2637$; d'où l'on déduit $0'',1 = 0,3792\,r$.

Dès lors, si l'on veut connaître le nombre des erreurs qui, suivant la théorie, doivent tomber entre 0″,0 et 0″,1, entre 0″,1 et 0″,2, etc..., il faut calculer préalablement, au moyen de la TABLE II, les valeurs de l'intégrale P_2 pour ces diverses limites. On trouve ainsi :

VALEURS DE x.	RAPPORTS $\left(\frac{x}{r}\right)$	VALEURS DE P_2.	VALEURS DE x.	RAPPORTS $\left(\frac{x}{r}\right)$	VALEURS DE P_2.
0″,1	0,3792	0,202	Pour 0″,7	2,6544	0,927
0″,2	0,7584	0,391	0″,8	3,0336	0,959
0″,3	1,1376	0,557	0″,9	3,4128	0,979
0″,4	1,5168	0,694	1″,0	3,7920	0,989
0″,5	1,8960	0,799	....	......	.....
0″,6	2,2752	0,875	∞	∞	1,000

Si, conformément à la dernière règle ci-dessus, on retranche chaque nombre de l'espèce P_2 du suivant, et qu'on multiplie le reste par le nombre des observations $n = 470$, on forme le tableau ci-dessous, dans lequel la dernière colonne a été obtenue en comparant les valeurs des éléments observés avec leur moyenne arithmétique :

LIMITES entre lesquelles on suppose successivement que les erreurs tombent.	DIFFÉRENCE entre deux valeurs consécutives de P_2.	NOMBRE DES ERREURS calculé théoriquement.	NOMBRE DES ERREURS déduit de la comparaison entre tous les éléments observés et leur moyenne.
0″,0 et 0″,1	0,202	95	94
0″,1 et 0″,2	0,189	89	88
0″,2 et 0″,3	0,166	78	78
0″,3 et 0″,4	0,137	64	58
0″,4 et 0″,5	0,105	49	51
0″,5 et 0″,6	0,076	36	36
0″,6 et 0″,7	0,052	24	26
0″,7 et 0″,8	0,032	15	14
0″,8 et 0″,9	0,020	9	10
0″,9 et 1″,0	0,010	5	7
Au delà de 1″,0	0,011	5	8
		469	470

Le nombre total des erreurs indiquées par la théorie est de 469, bien que le nombre des observations soit 470. Mais ce désaccord provient uniquement des fractions décimales qui ont été négligées, après avoir fait les produits des nombres de la seconde colonne par 470. En somme, l'accord entre la théorie et l'expé-

rience, bien qu'il ne soit pas absolument parfait, n'en est pas moins très-remarquable.

Comme on peut le remarquer dans l'exemple que nous venons de traiter, il arrive fréquemment que la pratique présente un nombre *plus élevé* de grandes erreurs que la théorie n'en prévoit. Cela tient à ce que toutes les observations ne sont pas prises *avec le même soin*, et que par suite quelques-unes d'entre elles sont entachées d'erreurs accidentelles plus fortes qu'il ne convient.

* **N° 124. Criterium de Chauvenet pour le rejet d'une observation douteuse.** Quand on possède un nombre suffisant d'observations, on peut facilement reconnaître celles d'entre elles qui donnent des erreurs anormales, et il y a lieu, dès lors, de les écarter de la moyenne. Mais ce rejet ne doit pas être laissé à l'arbitraire; on a donc proposé diverses règles destinées à guider le calculateur dans un sujet aussi délicat : celle que nous allons donner, et qui est due à M. Chauvenet, est basée sur la loi même de probabilité des erreurs accidentelles.

La Table II de la fin du texte se prête à cet usage important. Autrement dit, elle fournit un moyen de savoir si l'on doit rejeter une observation comme douteuse. On vient, en effet, de voir, au numéro précédent, que le nombre des erreurs résiduelles plus petites que x est donné par le produit entre la valeur de P_2 située dans la table en regard de l'argument $\left(\frac{x}{r}\right)$, et le nombre n des observations et en même temps des erreurs. On a donc la relation :

$$\textit{Nombre des erreurs plus grandes que } x = n\left[1 - \textit{probabilité } P_2 \textit{ correspondant à } \left(\frac{x}{r}\right)\right].$$

Si ce nombre est *moindre que* $\frac{1}{2}$, une erreur de grandeur x aura une plus grande probabilité contre elle que pour elle; et conséquemment l'observation qui a donné cette erreur devra être rejetée. Le *criterium*, c'est-à-dire la limite à partir de laquelle on doit rejeter une observation comme douteuse, est donc :

$$n\left[1 - \textit{probabilité } P_2 \textit{ correspondant à } \left(\frac{x}{r}\right)\right] = \frac{1}{2};$$

d'où l'on tire :

$$\textit{Probabilité } P_2 \textit{ correspondant à } \left(\frac{x}{r}\right) = \frac{2n-1}{2n}.$$

La Table III de la fin du texte donne tout calculé le rapport $\frac{2n-1}{2n}$, pour une suite de valeurs de n. En cherchant dans la Table II la valeur de $\left(\frac{x}{r}\right)$ qui correspond à la probabilité $\frac{2n-1}{2n}$, on a la limite inférieure du rapport entre l'erreur résiduelle x que l'on doit rejeter, et l'erreur probable r commune à chaque observation. Par suite cette limite elle-même n'est autre que le produit $\left(\frac{x}{r}\right) \times r$.

— La règle pratique à suivre comme *criterium* du rejet d'une observation douteuse, peut donc s'énoncer ainsi :

1° Prendre dans la Table III la valeur du rapport $\frac{2n-1}{2n}$, n étant le nombre des observations considérées.

2° Chercher dans la Table II la valeur de l'argument $\left(\frac{x}{r}\right)$, qui correspond à la probabilité P_2 représentée par le rapport $\frac{2n-1}{2n}$.

3° Multiplier cette valeur de $\left(\frac{x}{r}\right)$ par l'erreur probable r commune à chacune des observations.

4° Le produit $\left(\frac{x}{r}\right) \times r$ représente la limite à partir de laquelle on doit rejeter comme *douteuse*, toute observation qui donnerait une erreur résiduelle supérieure à cette limite.

Il importe de remarquer que, dans la méthode précédente, on ne peut rejeter à la fois que l'observation la plus erronée, ainsi que, si elles existent, celles qui présentent à très-peu près le même degré d'erreur. En tout cas, avec les observations conservées, on recommence les opérations sus-indiquées ; et on ne s'arrête que quand enfin on arrive à ne plus trouver aucune observation douteuse. — Hâtons-nous de dire qu'en pratique, on n'applique pas la méthode avec toute cette rigueur, et qu'on se borne en général à l'élimination afférente à la série donnée d'observations.

On trouvera une application numérique de la règle précédente au n° 127, ainsi que dans les types de calcul n°s 8 et 9 de la fin du texte.

*** N° 125. Diverses espèces d'erreurs d'une quantité déduite de plusieurs observations. Détermination de**

l'erreur probable. — Supposons que l'on ait à combiner un grand nombre d'observations, pour en *déduire* le résultat *le plus probable* (n° 122), et évaluer ensuite la précision sur laquelle on peut compter. Nous traiterons d'abord le cas le plus simple, celui où l'on n'a à déterminer qu'*une seule* inconnue, dont la valeur est donnée par des observations *directes.*

Si toutes les observations ont été faites avec le même soin, on adopte comme valeur *la plus probable* de cette quantité, la moyenne arithmétique μ prise entre tous les résultats d'observation. — La moyenne arithmétique ne donnant que la valeur la plus probable de la quantité inconnue, les valeurs *réelles* des erreurs accidentelles de chaque observation, ne peuvent pas être déterminées exactement, comme nous l'avons dit au n° 120. De chaque observation on retranche alors la moyenne arithmétique; et on obtient une quantité que nous avons appelée *erreur résiduelle* au même n° 120.

Cela dit, quand on considère une série déterminée d'observations, on appelle *erreur moyenne commune à chacune des observations*, la racine carrée du quotient que l'on trouve en divisant la somme des carrés des erreurs résiduelles, par le nombre des observations diminué d'une unité. — La dénomination ci-dessus provient de ce que, si l'on avait commis ladite erreur sur chaque observation, on aurait *à peu près* pour la moyenne, sous le radical, de la somme des carrés des erreurs, la moyenne qui résulte réellement de la convention faite, et à laquelle conduisent des considérations théoriques.

De son côté, l'*erreur probable commune à chacune des observations* considérées, est telle, comme nous l'avons dit au n° 122, que l'on ait, pour chaque observation, la même probabilité de commettre une erreur qui lui soit inférieure, que d'en commettre une qui lui soit supérieure; c'est-à-dire qu'elle a pour probabilité $\frac{1}{2}$. — On démontre que l'*erreur probable* est égale à l'*erreur moyenne commune à chacune des observations*, multipliée par le facteur constant 0,6745..., c'est-à-dire que l'*erreur probable* est un peu supérieure aux $\frac{2}{3}$ de l'*erreur moyenne.*

L'*erreur moyenne* est aussi nommée avec juste raison *erreur à craindre.* Et effectivement, bien qu'il existe autant de chances pour que contre de tomber sur une erreur plus petite ou plus grande que l'*erreur probable*, on doit *plutôt craindre* les erreurs *supérieures* à

l'erreur probable que les erreurs inférieures, puisque les premières de ces erreurs étant plus grandes que les secondes en valeur absolue, ont une influence plus considérable sur la précision de la *moyenne* déduite de la série donnée d'observations.

A côté de l'erreur moyenne commune à chacune des observations, on considère aussi ce qu'on appelle l'*erreur moyenne de la moyenne arithmétique* des observations. Cette nouvelle espèce d'erreur s'obtient en divisant l'erreur moyenne commune à chacune des observations par la racine carrée du nombre des observations.

Enfin, on fait encore usage de l'*erreur probable de la moyenne arithmétique* des observations. Cette quantité s'obtient en divisant l'erreur probable commune à chaque observation par la racine carrée du nombre des observations; ou, ce qui revient au même, en multipliant l'erreur moyenne de la moyenne arithmétique par le facteur 0,6745...

✱ **N° 126. Formules reliant entre elles les diverses espèces d'erreurs du numéro précédent.** — Désignons par :

$\Sigma(x^2)$ la somme des carrés de toutes les erreurs résiduelles;
n le nombre des observations;
ε l'*erreur moyenne* commune à chacune des observations;
r l'*erreur probable* commune à chacune des observations;
ε_0 l'*erreur moyenne de la moyenne arithmétique* des observations;
r_0 l'*erreur probable de la moyenne arithmétique* des observations.

Étant donnée une série d'observations à peu près également bonnes, on peut déterminer le résultat *le plus probable*, puis en évaluer la précision en ayant recours aux prescriptions et aux relations suivantes qui découlent du n° 125. Pour la première partie de la question, on prend la moyenne arithmétique de toutes les observations, moyenne qui donne (n° 122) la valeur *la plus probable* de l'inconnue.

Pour la seconde partie de la question, on calcule les différences x entre les valeurs observées et la moyenne; on forme les carrés de ces différences, et on en fait la somme $\Sigma(x^2)$.

L'*erreur moyenne* commune à chacune des observations est alors donnée par la relation :

$$\varepsilon = \pm\sqrt{\frac{\Sigma(x^2)}{(n-1)}}. \tag{59}$$

De son côté, l'*erreur probable* commune à chacune des observations s'obtient par la formule

$$r = \pm\,\varepsilon \times 0{,}6745.... \tag{60}$$

Puis, l'*erreur moyenne de la moyenne arithmétique* vaut :

(61) $$\varepsilon_0 = \pm \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} = \pm \sqrt{\frac{\Sigma(x^2)}{n(n-1)}}.$$

Enfin, l'*erreur probable de la moyenne arithmétique* a pour équation :

(62) $$r_0 = \pm \frac{r}{\sqrt{n}} = \pm \varepsilon_0 \times 0{,}6745...$$

— En tout état de cause, les premières erreurs à déterminer sont les *erreurs moyennes* (59) et (61), dans l'expression desquelles il n'entre que des données fournies par l'observation. Pour faciliter le calcul des $\Sigma(x^2)$, il est bon d'avoir une table des carrés des nombres, telle que celles qui ont été publiées dans le *Recueil de formules et de tables numériques* de M. Hoüel, dans les *Tables de logarithmes* de M. Caillet, ou dans le *Traité élémentaire du calcul des erreurs* par M. Faà de Bruno. Les mêmes tables donnent ensuite les erreurs moyennes elles-mêmes en permettant d'extraire à vue, la racine carrée des quotients $\frac{\Sigma(x^2)}{(n-1)}$ et $\frac{\Sigma(x^2)}{n(n-1)}$.

Une fois obtenues les *erreurs moyennes*, on en déduit aisément les deux sortes d'*erreurs probables;* et en particulier l'*erreur probable commune à chaque observation*, quantité dont nous n'avions pu donner au n° 122 que les propriétés, en rejetant d'ailleurs sa détermination au présent numéro.

Le facteur constant 0,6745.... vaut à 1/850 près :

$$\frac{2}{3} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{100} = 0{,}6733...$$

D'après cela, pour avoir l'erreur probable, connaissant l'erreur moyenne, il suffit de prendre les $\frac{2}{3}$ de cette erreur moyenne, et d'y ajouter le $\frac{1}{100}$ de ces ($\frac{2}{3}$).

⁎ N° 127. Application numérique des formules précédentes et du criterium de Chauvenet. — Dans une triangulation on a mesuré 15 fois un angle au théodolite ; et l'on a obtenu les résultats suivants :

ANGLES OBSERVÉS.	x	x^2	ANGLES OBSERVÉS.	x	x^2
43°25'38"	−1",4	1,96	43°25'36"	−3",4	11,56
41"	+1",6	2,56	39"	−0",4	0,16
37"	−2",4	5,76	43"	+3",6	12,96
45"	+5",6	31,36	37"	−2",4	5,76
42"	+2",6	6,76	35"	−4",4	19,36
39"	−0",4	0,16	42"	+2",6	6,76
38"	−1",4	1,96	39"	−0",4	0,16
40"	+0",6	0,36			
			271"		56,72
320"		50,88	Report. 320"	Report.	50,88
			591"		$\Sigma(x^2)=107{,}60$
			Moyenne $\frac{591''}{15}=39'',4$		

On prend d'abord la moyenne arithmétique de tous les angles observés, ce qui donne 43°25'39",4. En retranchant cette moyenne de chacun des angles observés, on obtient les *erreurs résiduelles* x portées dans la seconde colonne. Enfin dans la dernière colonne on inscrit les carrés de ces erreurs; et on en fait la somme $\Sigma\,(x^2)$.

Le nombre n des observations étant égal à 15, l'*erreur moyenne commune à chacune des observations* est :

$$\varepsilon=\pm\sqrt{\frac{107{,}6}{14}}=\pm 2'',78.$$

Par suite, l'*erreur probable commune à chacune des observations* vaut :

$$r=\pm 2'',78\times 0{,}6745=\pm 1'',87.$$

Puis, pour l'*erreur moyenne de la moyenne arithmétique*, on a :

$$\varepsilon_0=\pm\frac{2'',78}{\sqrt{15}}=\pm 0'',72;$$

et pour l'*erreur probable de cette moyenne arithmétique :*

$$r_0=\pm 0'',72\times 0{,}6745=\pm 0'',48.$$

Si donc on répète les mêmes observations dans les mêmes circonstances, il y a probabilité $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire 1 à parier contre 1 qu'on commettra une erreur de $\pm 1'',87=r$ sur chaque angle, et une erreur de $\pm 0'',48=r_0$ sur le résultat final.

— Le *quatrième* angle donnant une erreur résiduelle de $+5'',6$, cette observation peut sembler douteuse; et il est bon de lui appliquer

le *criterium de Chauvenet* (n° 124). Pour cela, avec le nombre des observations $n = 15$, on prend, dans la TABLE III de la fin du texte, le chiffre 0,967; et l'on cherche dans la TABLE II, qui la précède, et qui donne la probabilité des erreurs accidentelles, la valeur de l'argument $\left(\frac{x}{r}\right)$ qui correspond à ce nombre 0,967. On trouve ainsi $\left(\frac{x}{r}\right) = 3{,}17$. Dès lors, dans l'exemple dont il s'agit, r étant égal à $\pm 1'',87$, on a pour la limite x qu'aucune des erreurs résiduelles ne doit dépasser :

$$x = \left(\frac{x}{r}\right) \times r = \pm 1'',87 \times 3{,}17 = \pm 5'',9.$$

Il y a donc lieu de conserver l'observation en question, puisqu'elle ne donne pas une erreur résiduelle supérieure à 5″,9.

— REMARQUE IMPORTANTE. Si l'on n'a pas une table des carrés des nombres, la méthode précédente est assez laborieuse, dès que le nombre des observations devient un peu considérable. En pareil cas, et quand d'ailleurs on ne tient pas à une grande exactitude, il y a moyen de se dispenser de la formation des carrés des erreurs résiduelles, pour parvenir aux valeurs des diverses espèces d'erreurs ci-dessus. A cet effet, on calcule lesdites erreurs au moyen seulement de la somme des premières puissances des erreurs résiduelles. On démontre, en effet, que l'on a :

$$r = \varepsilon_m \times 0{,}8453..., \tag{63}$$

ε_m représentant la moyenne arithmétique de toutes les erreurs, abstraction faite de leurs signes.

Dès lors, de la formule précédente (63) jointe à la relation (60) du numéro précédent $r = \varepsilon \times 0{,}6745...$, on tirera pour expression de l'erreur moyenne commune à chacune des observations, en fonction de la moyenne des erreurs ε_m :

$$\varepsilon = \varepsilon_m \times \frac{0{,}8453}{0{,}6745} = \varepsilon_m \times 1{,}253.... \tag{64}$$

Puis, de r et de ε on déduira r_0 et ε_0 comme précédemment, au moyen des formules :

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}},$$

$$r_0 = \frac{r}{\sqrt{n}}.$$

Les relations (63) et (64) appliquées à l'exemple précédent donnent :

$$r = \pm 1'',87,$$
$$\varepsilon = \pm 2'',76.$$

L'accord de ces résultats avec ceux obtenus par la première méthode est ici parfait. Mais il n'en est pas toujours ainsi. On démontre même que, en employant les premières puissances des erreurs, il faut prendre *cent quatorze* observations pour avoir l'erreur probable avec la même précision que celle obtenue au moyen de *cent* observations traitées par les carrés. — L'application de la théorie des erreurs d'observation aux TYPES DE CALCUL nos 8 et 9, déjà cités au n° 124, a été faite selon ce dernier mode.

✻ N° 128. Erreurs d'une fonction de plusieurs quantités indépendantes, déduites des erreurs respectives de ces quantités. — Dans la pratique, les grandeurs observées servent en général à déterminer d'autres grandeurs qui en dépendent. Nous allons donc montrer comment on peut, connaissant les erreurs d'une ou de plusieurs quantités observées X_1, X_2, X_3,...., calculer celles d'une autre quantité X fonction des premières.

Désignons par :

E	l'erreur moyenne de X ;
ε_1, ε_2, ε_3,...	les erreurs moyennes de X_1, X_2, X_3.... ;
R	l'erreur probable de X ;
r_1, r_2, r_3,....	les erreurs probables de X_1, X_2, X_3.....

Considérons d'abord la fonction simple :

$$X = \pm X_1 \pm X_2 \pm X_3 \pm ...$$

On démontre que l'on a :

$$(65) \qquad E^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + ...$$

$$(66) \qquad R^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + ,...$$

Exemple I. — Les marches *relatives déduites* (n° 148) $(m_B - m_A)_d$ et $(m_C - m_A)_d$ des deux chronomètres B, C par rapport à A, ont été obtenues, l'une avec $0^s,3$, l'autre avec $0^s,4$ d'erreur *probable*. Calculer l'erreur probable de la marche *relative* $(m_B - m_C)_d$ de B par rapport à C, marche qui est liée aux deux autres par la relation :

$$(m_B - m_C)_d = (m_B - m_A)_d - (m_C - m_A)_d.$$

Les formules précédentes donnent :

$$R = \pm \sqrt{(0^s,3)^2 + (0^s,4)^2} = \pm 0^s,5.$$

— Considérons maintenant la fonction linéaire $X = a_1 X_1$; il est évident que les expressions $a_1 \varepsilon_1 = E_1$ et $a_1 r_1 = R_1$ représentent l'erreur moyenne et l'erreur probable de X. Par suite, la fonction

$$X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + \dots$$

donne :

(67) $$E^2 = a_1^2 \varepsilon_1^2 + a_2^2 \varepsilon_2^2 + a_3^2 \varepsilon_3^2 + \dots$$

(68) $$R^2 = a_1^2 r_1^2 + a_2^2 r_2^2 + a_3^2 r_3^2 + \dots$$

Exemple II. — Pour trouver la marche diurne d'un chronomètre, on a déterminé deux états absolus (*retards*) à 10 jours d'intervalle ; et l'erreur probable de chaque état absolu a été trouvée de $0^s,7$. On demande l'erreur probable de la marche diurne.

La fonction qui sert à déterminer la marche est :

$$\text{Marche diurne} = \frac{1^{\text{er}}\text{ état} - 2^{\text{e}}\text{ état}}{10} = 0,1 \times (1^{\text{er}}\text{ état}) - 0,1 \times (2^{\text{e}}\text{ état}).$$

Par suite, l'erreur probable cherchée est :

$$R = \pm\sqrt{(0,1 \times 0^s,7)^2 + (0,1 \times 0^s,7)^2} = \pm\sqrt{(0,1 \times 0^s,7)^2 \times 2} = \pm 0^s,1, \text{ en nombre rond.}$$

— Supposons enfin la fonction quelconque

$$X = F(X_1, X_2, X_3, \dots).$$

Si l'on désigne par $\left(\frac{dX}{dX_1}\right), \left(\frac{dX}{dX_2}\right), \left(\frac{dX}{dX_3}\right) \dots\dots$, les dérivées de la fonction X prises successivement par rapport aux diverses variables $X_1, X_2, X_3, \dots$, on démontre que l'on a pour l'erreur moyenne commise sur X :

(69) $$E^2 = \left(\frac{dX}{dX_1}\right)^2 \varepsilon_1^2 + \left(\frac{dX}{dX_2}\right)^2 \varepsilon_2^2 + \left(\frac{dX}{dX_3}\right)^2 \varepsilon_3^2 + \dots;$$

et pour l'erreur probable :

(70) $$R^2 = \left(\frac{dX}{dX_1}\right)^2 r_1^2 + \left(\frac{dX}{dX_2}\right)^2 r_2^2 + \left(\frac{dX}{dX_3}\right)^2 r_3^2 + \dots$$

Si la fonction donnée est implicite, par exemple

$$F(X, X_1, X_2, X_3, \dots) = 0,$$

on calcule, conformément aux règles de la différentiation des fonctions implicites, les coefficients différentiels $\left(\frac{dX}{dX_1}\right), \left(\frac{dX}{dX_2}\right), \left(\frac{dX}{dX_3}\right) \dots$, de la variable X par rapport aux quantités $X_1, X_2, X_3, \dots$, dont on

connaît les erreurs. — Les deux formules précédentes (69) et (70), donnent ensuite les erreurs moyenne et probable de l'inconnue X dépendant des premières.

Exemple III. — Avec les données suivantes et les erreurs probables indiquées, on a fait un calcul d'heure. On demande l'erreur probable du résultat.

$$\begin{aligned} L &= 43°\,27'\,30''\ \text{N}^{d}, & r_1 &= \pm 2'',0; \\ D &= 7°\,28'\,37''\ \text{S}^{d}, & r_2 &= \pm 1'',0; \\ H &= 17°\,00'\,58''\ , & r_3 &= \pm 5'',0; \end{aligned}$$

heure du lieu déduite du calcul $= 3^{h}\,51^{m}\,43^{s}$.

De la formule $\sin H = \sin L \sin D + \cos L \cos D \cos P$, qui lie ces divers éléments à l'angle au pôle P, et par suite à l'heure, on tire les coefficients différentiels :

$$\left(\frac{dP}{dL}\right) = \frac{\operatorname{tg} D}{\sin P} - \frac{\operatorname{tg} L}{\operatorname{tg} P} = -\,0{,}76.$$
$$\left(\frac{dP}{dD}\right) = \frac{\operatorname{tg} L}{\sin P} - \frac{\operatorname{tg} D}{\operatorname{tg} P} = -\,1{,}20.$$
$$\left(\frac{dP}{dH}\right) = -\,\frac{1}{\sin Z \cos L} = -\,1{,}58.$$

Le calcul numérique des trois coefficients $\left(\frac{dP}{dL}\right)$, $\left(\frac{dP}{dD}\right)$, $\left(\frac{dP}{dH}\right)$, soit dit en passant, est des plus simples au moyen des TABLES de M. Perrin. — Les deux termes qui entrent dans le premier coefficient, sont donnés immédiatement par les *tables* I et II avec leurs signes; leur somme algébrique $(p' + p'')$ fournit $p = \left(\frac{dP}{dL}\right)$. — Le second coefficient $\left(\frac{dP}{dD}\right)$ s'obtient de la même façon, en entrant dans la *table* I avec la latitude considérée comme déclinaison, et dans la *table* II avec la déclinaison considérée comme latitude. Les règles des signes sont du reste les mêmes que pour le problème d'azimut. — Pour avoir le troisième coefficient $\left(\frac{dP}{dH}\right)$, il faut préalablement calculer l'azimut Z au moyen du coefficient p ci-dessus et de la *table* III. Puis on prend dans la *table* I le nombre correspondant au rapport $\left(\frac{\operatorname{tg} 45°}{\sin Z}\right)$. Enfin avec ce nombre regardé comme chemin N.S et la latitude prise comme angle de route, on entre dans une table de point ordinaire, et le

nombre des milles correspondant représente $\left(\frac{dP}{dH}\right)$.

D'après la formule (70), on aura pour erreur probable R sur l'heure du lieu :

$$R = \pm\sqrt{(2'',0 \times 0,76)^2 + (1'',0 \times 1,20)^2 + (5'',0 \times 1,58)^2} = \pm 8'',13 = \pm 0^s,54.$$

On voit par cet exemple, qu'avec des erreurs assez faibles sur chacun des éléments, on n'arrive pourtant à ne connaître l'heure qu'à $\frac{1}{2}$ seconde près.

Les données de l'exemple précédent sont précisément celles qui entrent dans le TYPE DE CALCUL N° 9 de la fin du texte. Dans ce type, après avoir fait la moyenne des heures fournies par les différentes hauteurs, on trouve que l'erreur probable de cette moyenne est de $0^s,36$. Mais, en opérant ainsi, on ne tient compte que des erreurs commises dans l'observation des hauteurs ; et l'on néglige complétement les erreurs inévitables afférentes à la latitude et à la déclinaison. — Si l'on veut apprécier, dans le type en question, l'influence de ces dernières erreurs, en leur supposant les mêmes limites que dans l'exemple que nous venons de traiter, il suffit d'employer le radical ci-dessus, en y remplaçant la quantité $(5'',0 \times 1,58)$ par l'erreur probable sur les hauteurs afférente audit type, et qui y vaut $0^s,36$, soit en secondes d'arc $0,36 \times 15 = 5'',4$. De cette façon l'erreur probable de l'heure deviendrait :

$$R = \pm\sqrt{(2'',0 \times 0,76)^2 + (1'',0 \times 1,20)^2 + (5'',4)^2} = \pm 5'',74 = \pm 0^s,38.$$

— NOTA IMPORTANT. Il est bon de remarquer que toutes les formules relatives aux erreurs des fonctions de fonctions, ne s'appliquent qu'autant que la variable dont on cherche l'erreur dépend *de quantités absolument indépendantes* les unes des autres. — Ainsi, elles ne s'appliqueraient pas à la fonction Y déterminée comme voici :

$$Y = F(X, X', X'', \ldots), \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} X = f(X_1, X_2, X_3, \ldots), \\ X' = f'(X_1, X_2, X_3, \ldots), \\ X'' = f''(X_1, X_2, X_3, \ldots). \\ \ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Comme exemple de fausse application possible des formules précédentes, il est bon de signaler le cas concernant l'erreur probable de la moyenne de plusieurs marches *relatives* (n° 148) consécutives d'un chronomètre B par rapport à un chronomètre A, ces marches étant

déduites de comparaisons $(B_1 - A_1)$, $(B_2 - A_2)$, $(B_3 - A_3)$,...., prises chaque jour. Ces comparaisons donnent, par leurs différences, les marches relatives suivantes :

$$(m_B - m_A)_d = (B_2 - A_2) - (B_1 - A_1) = X_2 - X_1,$$
$$(m_B - m_A)_d = (B_3 - A_3) - (B_2 - A_2) = X_3 - X_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Au bout de n jours consécutifs, on a :

(71) *Moyenne des marches relatives*

$$= \frac{[(B_2 - A_2) - (B_1 - A_1)] + [(B_3 - A_3) - (B_2 - A_2)] + \ldots + [(B_{n+1} - A_{n+1}) - (B_n - A_n)]}{n}.$$

Mais, en simplifiant le numérateur, on obtient aussi :

$$(72) \qquad \textit{Moyenne des marches relatives} = \frac{(B_{n+1} - A_{n+1}) - (B_1 - A_1)}{n},$$

c'est-à-dire que, pour avoir la moyenne des marches relatives, il suffit de diviser par le nombre n de jours, la différence entre les comparaisons du premier et du dernier jour.

D'autre part, si l'on désigne par :

$r_1, r_2, \ldots r_n$, les erreurs probables afférentes aux diverses comparaisons,

on trouverait, en appliquant, sans plus ample informé, la formule (68) :

$$\textit{Erreur probable de la quantité (71)} = \pm \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \ldots r_n^2}}{n},$$

$$\textit{Erreur probable de la quantité (72)} = \pm \frac{\sqrt{r_1^2 + r_n^2}}{n}.$$

D'après ces formules, la première erreur se trouverait toujours supérieure à la seconde. Or, il y a évidemment là un paradoxe; car on est en présence de deux quantités égales; et ces quantités ne sauraient avoir des erreurs probables différentes. — La chose s'explique en considérant que c'est indûment qu'on a appliqué à la quantité (71) la formule (68). Remarquons, en effet, que chaque comparaison simple $(B_1 - A_1)$, $(B_2 - A_2)$,...., est bien une quantité *indépendante* des comparaisons précédentes. Mais les marches relatives ne sont pas, *elles*, indépendantes de l'une à l'autre ; car dans deux marches relatives consécutives, il y a une comparaison commune. Dès lors, pour calculer l'erreur de la moyenne des marches relatives en fonction

des erreurs de comparaison, il ne faut pas considérer cette moyenne comme étant déterminée par la relation (71) ; car ce serait appliquer la formule (68) à une fonction Y de la forme $Y = F(X, X', X'', \ldots)$, *chacune des quantités* $X, X', X'', \ldots$, *dépendant de la précédente ;* or cette dépendance rend inapplicables toutes les formules du présent numéro. Mais il n'en sera plus ainsi, si l'on considère la moyenne qui nous occupe comme déterminée à l'aide de la formule (72), où il n'entre que les comparaisons du premier et du dernier jour, qui sont des quantités complétement indépendantes l'une de l'autre. C'est donc la seconde des erreurs probables ci-dessus qu'il convient d'adopter.

* **N° 129. Définition et expression des poids dans la théorie des erreurs d'observation.** — Dans ce qui précède, nous avons toujours supposé que toutes les observations employées à déterminer l'inconnue étaient à peu près également bonnes. Mais souvent il n'en est pas ainsi ; on peut avoir à combiner des séries de mesures d'une même grandeur prises dans des circonstances tout à fait différentes et par des observateurs inégalement expérimentés. Nous allons montrer comment on doit agir pour ramener *fictivement* les choses au cas d'observations d'*égale précision*.

On a vu au n° 126 que l'erreur probable r_0 de la *moyenne* d'une même série d'observations est liée à l'erreur *probable* r *commune à chacune des observations* de la série, par la relation :

$$(62) \qquad r_0 = \frac{r}{\sqrt{n}} = \varepsilon_0 \times 0{,}6745\ldots$$

Par suite, cette erreur probable r_0 diminue en raison inverse de la racine carrée du nombre n des observations. C'est ce qu'on exprime, eu égard d'ailleurs à la propriété établie dans le cours du n° 122, en disant que *la précision d'une moyenne croît comme la racine carrée du nombre d'observations qui ont servi à la former.*

Imaginons qu'une grandeur ait été déterminée par une série d'observations ayant chacune une erreur probable égale à r. Puis faisons, en vue de mesurer la même grandeur, une deuxième série d'observations ayant chacune r' comme erreur probable. Pour que la *moyenne arithmétique* de ces observations soit aussi précise que la première valeur déjà connue, autrement dit ait une erreur probable $r'_0 = r_0$, il faudra, d'après ce que nous venons de dire, en prendre un nombre n', tel que l'on ait :

$$\frac{r'}{\sqrt{n'}} = \frac{r}{\sqrt{n}};$$

d'où l'on tire :

$$\frac{n'}{n} = \frac{r'^2}{r^2}.$$

— Supposons d'abord $n = 1$. On peut alors dire qu'une observation *unique* ayant pour précision $\frac{1}{r}$, équivaut à n' observations de précision égale à $\frac{1}{r'}$.

Cela posé, nous appellerons, d'après Liagre, *poids* (*) d'une observation *unique*, le nombre Υ d'observations d'*égale précision* qu'il faudrait faire pour que leur moyenne arithmétique ait la même exactitude que l'observation unique. Il suit de là que le poids de la moyenne arithmétique de Υ observations d'égale précision, considérée comme une observation unique, vaut Υ fois le *poids commun* à chacune des observations simples de la série, en convenant de prendre ce dernier poids comme *unité*.

— Supposons maintenant n quelconque. D'après ce qui précède immédiatement, le poids p de la moyenne d'une première série d'observations, toutes d'égale précision, sera n par rapport à l'une quelconque de celles-ci. De même, pour une seconde série de n' observations, encore d'égale précision tant entre elles que par rapport aux premières, le poids p' de la moyenne sera n'. Donc on peut écrire :

$$\frac{p}{p'} = \frac{n}{n'}.$$

Maintenant, remplaçons n et n' par leurs valeurs tirées de la relation (62) rappelée ci-dessus, et qui, appliquée aux deux présents cas, donne :

$$r_0 = \frac{r}{\sqrt{n}}, \quad r_0' = \frac{r'}{\sqrt{n'}}.$$

Remarquons d'ailleurs que $r = r'$, puisqu'il est expressément supposé que toutes les observations simples des deux séries ont même poids et par suite même précision. On obtiendra dès lors :

$$\frac{p}{p'} = \frac{\left(\frac{r^2}{r_0^2}\right)}{\left(\frac{r^2}{r_0'^2}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{r_0^2}\right)}{\left(\frac{1}{r_0'^2}\right)}.$$

(*) Il importe de remarquer que certains auteurs nomment *poids*, les uns ce que nous avons appelé *mesure de précision*, les autres le produit de cette dernière quantité par la racine carrée du nombre des observations. Une pareille multiplicité de dénominations est un des principaux obstacles qui s'opposent à la facile intelligence de la théorie des probabilités. — Le lecteur devra avoir le plus grand soin de s'en tenir strictement à notre définition.

Mais, par suite de ladite formule (62), on a aussi :

$$r_0 = \varepsilon_0 \times 0{,}6745\,; \quad r'_0 = \varepsilon'_0 \times 0{,}6745.$$

Conséquemment on peut aussi écrire :

$$\frac{p}{p'} = \frac{\left(\frac{1}{r_0^2}\right)}{\left(\frac{1}{r'^2_0}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{\varepsilon_0^2}\right)}{\left(\frac{1}{\varepsilon'^2_0}\right)}.$$

On voit donc que : *les poids de deux moyennes d'observations sont inversement proportionnels aux carrés des erreurs probables de ces moyennes* ou *aux carrés de leurs erreurs moyennes.* — En définitive, si l'on appelle p le poids d'une série d'observations d'égale précision, et en particulier le poids d'une observation isolée, on a :

$$p = \frac{C}{r_0^2}, \quad \text{et incidemment} \quad r_0 = \pm\sqrt{\frac{C}{p}}\,;$$

ou

$$p = \frac{C'}{\varepsilon_0^2}, \quad \text{et incidemment} \quad \varepsilon_0 = \pm\sqrt{\frac{C'}{p}}\,;$$

C et C' désignant des constantes arbitraires, sous la seule réserve que toutes les observations simples entrant dans les moyennes, soient considérées comme ayant même précision.

Il y a lieu de remarquer que ce que nous avons appelé la *mesure de précision* d'une observation (n° 121) se distingue du *poids* de celle-ci, en ce que ladite mesure varie (n° 122) en raison inverse de l'erreur probable, tandis que le poids varie en raison inverse du carré de cette même erreur. D'où il suit que *les* POIDS *de deux observations sont proportionnels aux carrés de* LEURS MESURES DE PRÉCISION.

✳ **N° 130. Usage des poids dans la théorie des erreurs d'observation.** — Les *poids* sont très-utiles dans la théorie des erreurs d'observation, en permettant de combiner entre elles des observations d'*inégale* précision. — Supposons, par exemple, que l'on ait obtenu, à l'aide de n séries d'observations, les valeurs suivantes de l'inconnue X :

1re série. X_1	avec l'erreur probable	r_1,	d'où le poids	$p_1 = \frac{C}{r_1^2}$	dans l'hypothèse que les observations simples dont $X_1, X_2, \ldots$, représentent les moyennes, sont toutes d'*égale précision*. — La constante C a d'ailleurs la signification convenue au n° 129.
2e série. X_2	*id.*	r_2,	*id.*	$p_2 = \frac{C}{r_2^2}$	
3e série. X_3	*id.*	r_3,	*id.*	$p_3 = \frac{C}{r_3^2}$	
. . . .					

On devra commencer par rendre les diverses quantités observées comparables entre elles, en multipliant chacune d'elles par sa *mesure de précision*, soit, d'après le numéro précédent, par la *racine carrée de son poids.* Il est alors facile de prouver, suivant la manière indiquée à la fin même du présent numéro, que : 1° la valeur *la plus probable* (n° 122) x de X est :

(73) $$x=\frac{p_1X_1+p_2X_2+p_3X_3+\ldots\ldots}{p_1+p_2+p_3+\ldots\ldots};$$

2° le poids de x est :

(74) $$P=p_1+p_2+p_3+\ldots\ldots$$

On obtient ensuite pour erreur probable R de cette même valeur x :

(75) $$R=\pm\sqrt{\frac{C}{P}}.$$

Comme la constante C peut être prise arbitrairement, on posera par exemple :

$$C=r_1^2r_2^2r_3^2\ldots\ldots$$

De cette façon, les poids p_1, p_2, p_3,..... seront tous des nombres entiers.

Exemple. — Supposons que l'on ait mesuré un angle X par deux séries d'observations, l'une faite avec un théodolite, l'autre avec un sextant, et que l'on ait trouvé les valeurs suivantes :

1re série : $X_1=23°46'12''$, avec une erreur probable $r_1=\pm 2''$;
2me série : $X_2=23°46'19''$, *id.* $r_2=\pm 5''$.

En prenant, comme il vient d'être dit, la constante arbitraire $C=2^2\times 5^2=100$, les poids des deux séries d'observations seront :

$$p_1=\frac{100}{2^2}=25,$$
$$p_2=\frac{100}{5^2}=4.$$

Ces nombres signifient que la première valeur de l'angle X_1 équivaut à la moyenne de 25 observations ; et la seconde X_2, à la moyenne de 4 observations, *toutes d'égale précision* ou de *même poids.* Par conséquent, on peut réduire les deux séries en une seule série de $(25+4)=29$ observations, toutes de même poids, dont la moyenne fournira la valeur la plus probable x. On a donc d'après la relation (73) :

$$x=\frac{25X_1+4X_2}{29}=23°46'+\frac{12''\times 25+19''\times 4}{29}=23°46'13'',0.$$

De son côté, la relation (75) donne pour erreur probable R du résultat précédent :

$$R = \pm\sqrt{\frac{C}{P}} = \pm\sqrt{\frac{100}{29}} = \pm 1'',86.$$

Comme on devait s'y attendre, la *valeur de* R *est moindre que la plus petite des erreurs probables* r_1 et r_2, bien que l'on ait combiné entre elles deux observations de précisions très-différentes. — Il est facile de se rendre compte de ce fait. Supposons, en effet, que r_1 soit la plus petite des erreurs probables des quantités observées. En considérant isolément l'observation y relative, on aura, d'après le n° 129 :

$$r_1 = \pm\sqrt{\frac{C}{p_1}}.$$

Or l'erreur probable R du résultat est :

$$R = \pm\sqrt{\frac{C}{P}}.$$

Le dénominateur P étant égal à $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\ldots$, le quotient $\frac{C}{P}$ est évidemment plus petit que $\frac{C}{p_1}$; par conséquent R est plus petit que r_1.

— La formule (73) montre bien que l'unité de poids est arbitraire : car en adoptant une autre unité, on ne ferait qu'introduire un facteur commun qui disparaîtrait comme se trouvant à la fois au numérateur et au dénominateur.

La formule (73) permet également de justifier un procédé pratique généralement employé, lorsqu'on veut obtenir un angle au moyen de plusieurs séries de répétitions faites avec le même instrument et dans les mêmes circonstances. Il consiste à multiplier le résultat que fournit chaque série, par le *nombre* de répétitions qui lui correspond; et à diviser la *somme* des produits par la somme des nombres de répétitions. On prend ainsi pour unité de poids la précision d'une observation simple. Il est bien entendu d'ailleurs qu'on pourrait choisir toute autre unité de poids, en s'astreignant seulement à la condition du n° 129 :

$$\frac{p}{p'} = \frac{n}{n'}.$$

En général, avant de combiner des moyennes dont chacune a son

poids particulier, il faut d'abord chercher si elles sont rapportées à la même unité de poids. Si cela n'est pas, on doit faire ce que l'on appelle la *réduction des poids*, en ramenant toutes les données à un poids *fictif* commun.

— Dans ce qui précède, nous n'avions affaire qu'à des observations de même espèce et d'inégale précision; et l'élément inconnu dont il s'agissait d'obtenir, à l'aide des *poids*, la valeur la plus avantageuse, n'était autre que la quantité observée elle-même. Mais il peut arriver qu'on se trouve en présence d'observations d'espèces différentes prises concomitamment par groupe, et destinées à déterminer les constantes a, b, c,..., d'une équation générale, telle que la relation (I_6) du n° 132, où les données d'observation z, x, y entrent comme arguments connus. — Si les diverses observations de même espèce ne sont pas d'égale précision, la détermination la plus avantageuse desdites constantes par la *méthode des moindres carrés* (n° 133) ou la *méthode d'interpolation de Cauchy* (n° 134), exige qu'on commence par rendre également précises les équations dérivant des divers groupes d'observations. Il faut donc multiplier chacune de ces équations par un facteur égal ou simplement proportionnel à la *mesure de précision* qui lui convient, ou à la *racine carrée du poids* y afférent. Or l'une et l'autre de ces quantités sont inversement proportionnelles à l'erreur probable correspondante. Il convient par suite de bien se rendre compte de ce qu'on doit entendre ici par cette erreur probable.

A cet effet, imaginons que dans l'équation précitée on fasse passer tous les termes dans un même membre. Nous obtiendrons de la sorte une relation de la forme :

$$0 = -z + a + b \times x + c \times x^2 + d \times y + e \times xy + f \times y^2 + \ldots\ldots$$

Or on est libre de considérer le second membre de cette équation comme une fonction dont la valeur rigoureuse est nulle, mais qui, calculée avec les données z, x, y de chaque groupe d'observations dans la supposition de la connaissance *à priori* des constantes a, b, c,..., différerait plus ou moins de zéro, en raison des erreurs d'observation. Cela posé, l'erreur probable qui nous occupe doit évidemment s'entendre de l'erreur probable propre à ladite fonction, regardée comme dépendante des données en question, et doit dès lors être calculée selon les règles du n° 128. L'inverse du résultat ainsi obtenu ou toute quantité qui lui sera proportionnelle, représentera la *mesure*

de précision ou la *racine carrée du poids* convenant à l'équation considérée. Comme en réalité les constantes précitées, au lieu d'être connues, sont au contraire les éléments dont on se propose la recherche, il faudra, pour déterminer l'erreur probable en question, se procurer d'abord des valeurs approchées de ces constantes, en ne tenant pas compte des différences de poids, et en résolvant les équations par les procédés algébriques élémentaires. — On trouvera au n° 140 une application suffisamment explicite de la question générale que nous venons de traiter.

Il importe de remarquer que le cas d'observations d'une même espèce examiné au commencement du présent numéro, rentre dans cette question générale, en réduisant à ses deux premiers termes le second membre des équations complètes de la forme ci-dessus. Ceci donne, en effet, une série de relations particulières de la forme $0 = -z + a$, qui, traitées par la méthode des moindres carrés, conduisent aux résultats mentionnés à propos du cas que nous rappellons.

* **N° 121. Remarques pratiques sur les poids employés dans la théorie des erreurs d'observation.** — Nous terminerons ce qui concerne les *poids* par quelques remarques importantes au point de vue pratique, et que nous extrayons de l'ouvrage de M. Liagre cité au n° 116.

Le poids des observations n'est pas une quantité qui dépende uniquement et invariablement de l'instrument employé et du nombre des répétitions. Des circonstances extérieures et même des considérations physiques ou morales, peuvent influer sur le poids que l'observateur attribue à ses résultats ; mais il doit noter sur son registre, *avant de faire aucun calcul*, les motifs de sa détermination. Il est impossible, du reste, de prescrire aucune règle positive à ce sujet; car comment soumettre à une appréciation exacte et numérique, ce sentiment intime qui fait qu'un observateur se juge plus ou moins bien *disposé*, qu'il a plus ou moins de confiance dans ses résultats ? Il y a là une affaire de bonne foi, de tact, d'habitude que nous n'essayerons pas d'analyser.

Il arrive très-souvent, dans une série un peu étendue, que des observations qui ne paraissaient nullement suspectes *avant* le calcul, s'écartent ensuite tellement de la moyenne qu'on est tenté de croire qu'une erreur a été commise par inadvertance. Faut-il, pour rétablir l'accord, diminuer le poids de ces observations douteuses ?

Cette marche est condamnée par tous les bons observateurs ; et l'on n'est autorisé à y avoir recours que si les notes inscrites sur le registre, pendant la durée même du travail, signalent l'observation comme ayant présenté quelque particularité qui soit de nature à la rendre douteuse. Encore vaut-il mieux, dans ce cas, rejeter *complétement* l'observation, que d'invoquer le secours équivoque d'un poids arbitraire, afin de modifier à son gré les résultats discordants, et d'établir ainsi, sur le papier, un semblant d'harmonie, qui, au fond, ne prouve rien pour l'exactitude réelle. — Il est d'ailleurs très-dangereux pour un observateur d'entrer dans cette voie de transaction : car on peut assurer qu'il ne tardera pas à s'y laisser entraîner trop loin, et à faillir à cette honnêteté scientifique qui est la sauvegarde des résultats de l'expérience.

∗ N° 132. **Des équations de condition provenant de l'étude d'un phénomène physique quelconque, et servant à spécifier la loi de ce phénomène.** — Pour mieux fixer les idées, nous prendrons l'équation générale :

$$(I_6) \qquad z = a + b\times x + c\times x^2 + d\times y + e\times xy + f\times y^2 + \ldots\ldots,$$

que nous considérerons comme une transformation de la relation (I_0) du n° 108 ou (I_5) du n° 115, en convenant de représenter ici m par z ; $(\theta-\theta_1)$ par x ; $(t-t_1)$ par y ; et où a, b, c, d, e, f correspondront aux diverses constantes de ladite relation. — L'équation générale (I_6) pourra, dès lors, être regardée comme représentant *la loi* d'un phénomène physique quelconque, où un élément variable z dépend à chaque instant de plusieurs autres x, y, etc.

La connaissance la plus approchée de cette loi exige qu'on détermine les *constantes* de l'équation, dans les meilleures conditions d'exactitude compatibles avec le nombre de données dont on dispose. A cet effet, on déduit de l'observation une série de groupes de valeurs de z, x et y ; et on se sert de ces éléments pour déterminer les *constantes* $a, b, c, d, \ldots$, qui jouent maintenant le rôle d'*inconnues*, tandis que les quantités $z, x, x^2, y, xy, y^2, \ldots$, représentent désormais des coefficients. D'après cela, la relation (I_6), une fois fixée, est une véritable *formule d'interpolation* (n° 105) ; puisque, établie à l'aide de valeurs *connues* de z correspondant à des valeurs *déterminées* de x et de y, elle permet réciproquement de trouver des valeurs INCONNUES de z correspondant à des valeurs QUELCONQUES de x et y.

En tout état de cause, si les groupes de valeurs connues de z, x

et y, sont en même nombre que les *constantes* formant les inconnues, on trouve ces constantes par la résolution d'un nombre égal d'équations du premier degré ou linéaires.—Si les groupes sont en plus grand nombre que les inconnues, l'élimination de celles-ci, pratiquée à la manière ordinaire, conduit à des *équations de condition* incompatibles. Mais la cause de cette incompatibilité est dans les erreurs des valeurs numériques de z, x et y, erreurs dues à l'imperfection des moyens d'observation qui ont servi à les déterminer. L'inégalité des deux membres des équations de condition reste en général très-petite et de l'ordre de grandeur des erreurs d'observation, de telle sorte que s'il était possible de connaître ces erreurs, et par suite d'en corriger les coefficients, les équations de condition seraient complétement satisfaites. Dans l'impossibilité où l'on se trouve à cet égard, on est conduit à demander à la théorie des probabilités la solution la plus avantageuse du problème.

Ce que nous venons de dire convient, du reste, d'une manière générale, à tous les cas qui peuvent se présenter dans les sciences appliquées aux phénomènes de la nature; car on est toujours à même de ramener préalablement à la forme linéaire les équations à considérer, lorsqu'elles ne se présentent pas d'elles-mêmes sous cette forme. En pareille conjoncture, en effet, on commence par obtenir une valeur approchée de chaque inconnue; et on substitue à celle-ci, dans les équations, la valeur approchée augmentée d'une correction très-petite, qui devient alors l'inconnue. Ceci fait, on développe les termes qui renferment les nouvelles inconnues; et eu égard à la petitesse de celles-ci, on néglige, dans les développements, leurs produits et leurs puissances.

En tout état de cause, les équations *linéaires* provenant, d'une manière ou d'une autre, de l'étude d'un phénomène physique qu'il s'agit de soumettre à la théorie des probabilités, prennent dans leur ensemble le nom générique d'*équations de condition*.

✻ **N° 133. Résolution d'une suite d'équations de condition par la méthode des moindres carrés. Propriété dont jouissent les résultats. Interprétation géométrique dudit mode de résolution.** — Si on admet que le meilleur parti à tirer d'un certain nombre de mesures directes, est d'en prendre la moyenne arithmétique, ce qui suppose des erreurs également possibles sur les observations, le calcul des probabilités conduit, comme Gauss l'a fait voir, à appliquer à la résolution des

équations de condition la méthode bien connue de Legendre, dite *des moindres carrés*. Toutefois le point de départ de Gauss a été attaqué. Mais Laplace a démontré, qu'en dehors de toute hypothèse sur les erreurs afférentes aux données, la méthode des moindres carrés est celle qui donne les résultats *les plus probables* (n° 122), comme nous l'avons annoncé à ce même numéro ainsi qu'au n° 63. Toutefois, la démonstration de Laplace suppose expressément que le nombre des équations de condition soit *grand* par rapport au nombre des inconnues à déterminer.

Enfin, dans ces derniers temps, M. Faye a donné le moyen d'établir une loi de probabilité (n° 121) des *erreurs accidentelles*, en se basant sur l'étude directe des écarts des séries de mesures d'espèces très-variées (observations astronomiques, expériences sur le tir des armes à feu, etc.). Puis, il a fait voir que la méthode des moindres carrés convient aussi à un nombre *restreint* d'observations, lorsque les écarts y manifestent ladite loi de probabilité avec la même netteté que dans les nombreux exemples qui ont servi à établir cette loi. — D'après cela, pour parvenir à appliquer sûrement la méthode des moindres carrés, il faudrait faire, dans chaque cas, une épreuve afin d'établir que les écarts satisfont bien à la condition susmentionnée. Mais on peut considérer comme certain que pareille opération réussira d'ordinaire avec les chronomètres; et dès lors il y a lieu d'admettre, en principe, la validité de la méthode des moindres carrés pour la détermination des *constantes* des formules de marche des montres marines.

Au surplus, il importe de bien noter qu'avant d'appliquer la méthode des moindres carrés, on doit : 1° faire un *choix sévère* des observations à employer, conformément à la recommandation mentionnée au n° 64; 2° dépouiller, au moins autant que possible, les observations des erreurs *systématiques* (n° 118), comme celles qui peuvent résulter de ce qu'on n'a pas observé le phénomène lui-même qu'il s'agit de soumettre au calcul, mais seulement quelque phase plus ou moins voisine; ou de ce que les instruments d'observation étaient en défaut, etc. — Tel serait ce qui aurait lieu, dans notre exemple particulier des chronomètres, si on déterminait les états absolus appelés à déterminer les *constantes* a, b, c,..., à l'aide d'un instrument dont la construction laisserait à désirer en un ou plusieurs de ses points.

En tout état de cause, pour appliquer la méthode des moindres carrés à la formule (I_6) du n° 132, il faut commencer par ramener à

l'hypothèse d'erreurs également possibles, les différentes équations résultant des divers systèmes de valeurs de z, x, y introduits dans ladite formule. A cet effet, conformément au n° 130, on multipliera chacune de ces équations par la racine carré d'un *poids* convenable, approprié au genre particulier d'observations considérées. Indiquant par v l'expression générale de la racine carrée du poids d'une équation, nous serons en présence d'une nouvelle série de relations de la forme :

$$vz = a \times v + b \times vx + c \times vx^2 + d \times vy + e \times vxy + f \times vy^2 + \ldots$$

L'application des moindres carrés revient, on le sait, à trouver les valeurs de a, b, c,..., qui rendent minimum l'expression suivante :

$$\Sigma v^2 (z - a - b \times x - c \times x^2 - d \times y - e \times xy - f \times y^2 - \ldots)^2 = \Sigma v^2 \varepsilon^2,$$

en appelant ε l'erreur afférente à chaque valeur observée de l'élément z.

La recherche du *minimum* en question, basée sur les principes du calcul différentiel, conduit à une série d'équations, d'où on tire pour chaque constante sa valeur *la plus probable.*

— La formule (I_6), considérée dans toute sa généralité, représente une surface du second ordre dont les éléments z sont les coordonnées suivant l'axe des z, et les éléments x et y, les deux autres coordonnées.

Conséquemment, l'opération en question interprétée géométriquement revient à trouver une surface telle, que les distances, suivant les z, entre cette surface et tous les points de l'espace dont les trois coordonnées correspondent respectivement aux observations effectuées, aient une valeur *minimum* pour la somme des produits de leurs carrés par les poids.

*** N° 134. Résolution d'une suite d'équations sous forme de séries par la méthode d'interpolation de Cauchy. Propriété fondamentale de cette méthode. —** L'emploi de la méthode des moindres carrés pour la résolution d'une suite d'équations résultant d'un développement en série, exige qu'on fixe *à priori* le *nombre* des termes à conserver dans chaque équation. C'est afin de remédier à cet inconvénient que souvent, et en particulier pour les formules de marche des chronomètres, on préfère à ladite méthode le mode de résolution des équations de l'espèce en question proposé par M. Cauchy, toujours dans l'hypothèse expresse d'erreurs également possibles sur les observations.

Ce mode est connu sous le nom de *Méthode d'interpolation de*

Cauchy, c'est-à-dire de méthode pour trouver une *formule générale d'interpolation*, dont les équations considérées soient des expressions particulières. La méthode de Cauchy jouit de la propriété importante suivante :

Supposons que les constantes telles que a, b, c, d, e,..., faisant fonction d'inconnues dans l'expression générale (I_6) (n° 132) des équations qu'il s'agit de traiter, soient *rangées par ordre de grandeur décroissante.* Chacune des inconnues se détermine successivement; et on ne passe à la suivante que quand on s'est assuré que la substitution dans lesdites équations des valeurs obtenues pour les inconnues précédentes, donne, pour satisfaire à ces équations, des écarts en dehors de l'ordre de grandeur des *erreurs probables* (n° 122) d'observation. On est dès lors prévenu du terme auquel il est licite de s'arrêter, dans le développement en série qui forme l'expression générale des équations de condition à considérer. Ce procédé met aussi à même de reconnaître si l'on a fait entrer en ligne de compte des observations par trop erronées, et de les distinguer des autres. En pareil cas, on rejette les observations erronées; et l'on recommence les calculs avec les données conservées.

La propriété fondamentale que nous venons de signaler, caractérise la supériorité de la méthode d'interpolation de Cauchy sur la méthode des moindres carrés. Mais les ouvrages qui en parlent ont omis de spécifier cette propriété, en laissant ainsi le lecteur dans l'ignorance complète du principal esprit de la méthode de Cauchy. Comme cette méthode est peu répandue, nous allons en donner l'exposé succinct sur le cas spécial de l'équation générale (I_6) susmentionnée.

Il nous reste à dire que les résultats obtenus ici ne sont pas les résultats *les plus probables*, comme le sont les éléments fournis par la méthode des moindres carrés (n° 133). Mais, d'après ce qui a été dit ci-dessus, ces résultats jouissent de la propriété de satisfaire aux équations considérées avec des écarts ne dépassant pas l'ordre de grandeur des erreurs *probables* d'observation.

* **N° 135. Formules afférentes à la méthode d'interpolation de Cauchy.** — Les raisonnements qui vont suivre admettent (n° 134) l'hypothèse expresse d'erreurs également possibles sur les observations. Il faudra donc commencer, de même qu'au n° 133, par rendre comparables les différentes équations résultant des divers systèmes de valeurs de z, x, y, introduites dans les re-

lations générales de la forme (I_a) du n° 132. A cet effet, on multipliera aussi chacune d'elles par la racine carrée ν du poids qui lui convient, et choisi conformément aux indications du n° 130. — Nous nous trouverons donc encore ici en présence d'une suite de relations de la forme :

$$\text{(I)} \qquad \nu z = a \times \nu + b \times \nu x + c \times \nu x^2 + d \times \nu y + e \times \nu xy + f \times \nu y^2 + \ldots.$$

où les constantes a, b, c, d,..., sont du reste rangées par ordre de grandeur décroissante (n° 134).

Le problème consiste à déterminer le nombre strictement *nécessaire* de ces constantes, au moyen d'un grand nombre de systèmes donnés de valeurs de z, x, y. D'ailleurs, conformément à ce qui a été annoncé au numéro précédent, et comme cela découle de la suite de ladite recherche, on n'effectuera les carrés x^2, y^2, et le rectangle xy, qu'à mesure que l'on aura reconnu la nécessité d'aller jusqu'aux termes qui les renferment.

Afin de donner à la démonstration la généralité qu'elle comporte, et plus encore afin d'arriver à une suite de relations offrant entre elles une entière symétrie, nous écrirons la formule ci-dessus sous la forme :

$$\text{(I)} \qquad Z = a \times A + b \times B + c \times C + d \times D + e \times E + f \times F + \ldots$$

Lorsqu'il s'agit des formules de marche des chronomètres, qui sont en définitive notre objectif dans l'application de la méthode Cauchy, le premier coefficient A vaut $+1$ dans les diverses séries d'équations de l'espèce (I), si ces équations ont toutes *même poids*. Bien que ce soit là un cas particulier, quand il se présente, le coefficient A n'offre plus le même degré de généralité que les autres coefficients B, C, D.... Mais alors rien n'empêche de supposer que cette différence n'existe pas, et d'arriver à des formules complétement générales, qu'on adaptera facilement au cas particulier en question. Cette manière de faire est parfaitement licite, et évitera de traiter à part la détermination de la constante a du coefficient A, ce qui jetterait de la confusion dans l'esprit, en ne lui permettant pas d'embrasser avec facilité l'enchaînement des relations d'ensemble qu'il s'agit d'établir. — Ceci convenu, supposons *à priori* que toutes les constantes b, c, d,... après a soient négligeables ; et réduisons, pour un moment, le second membre à son premier terme. Nous aurons, en désignant par α une première valeur approchée de a :

$$Z = \alpha \times A.$$

Chaque système de valeurs de Z et de A pourrait fournir une valeur de l'inconnue α. Mais à cause des erreurs d'observation, ces différentes valeurs ne seraient pas identiques. Afin d'employer toutes les données à la détermination de α, multiplions chaque équation de la forme précédente par un coefficient indéterminé k particulier à chacune d'elles, et plus petit que 1, ou au plus égal à 1. En faisant la somme de toutes les équations partielles ainsi modifiées, et que nous supposerons en nombre n, et en tirant ensuite la valeur de α, il viendra :

$$\alpha = \frac{\Sigma k Z}{\Sigma k A}.$$

Soit δZ l'erreur inconnue dont Z est affectée, et ζ la véritable valeur de cette fonction, de sorte que l'on ait :

$$Z + \delta Z = \zeta; \quad \text{soit} \quad Z = \zeta - \delta Z.$$

La substitution de cette valeur de Z dans l'équation ci-dessus en α, donnera :

$$\alpha = \frac{\Sigma k \zeta}{\Sigma k A} - \frac{\Sigma k \delta Z}{\Sigma k A}.$$

Le *premier terme* du second membre de cette nouvelle relation sera égal à la véritable valeur de a dans la supposition de $b, c, d, \ldots\ldots$, négligeables; et le *second terme* représentera l'erreur de cette quantité calculée par la formule précédente. Il s'agit de rendre ce second terme *minimum.* On y parviendra, si l'on dispose des indéterminées k de manière à rendre le dénominateur un maximum, et si les valeurs de k qui satisfont à cette condition, rendent en même temps le numérateur un minimum. — Or, par hypothèse, le maximum de k en valeur absolueest égal à l'unité. Il est clair, dès lors, que le *dénominateur* atteindra un *maximum*, si l'on donne à k le signe de A, afin que tous les termes prennent le même signe, et si, de plus, on donne au facteur k sa valeur absolue maximum qui est l'unité. En un mot, la condition pour le maximum du dénominateur consiste à faire chaque quantité $k = \pm 1$, suivant que la valeur correspondante de A est positive ou négative. — Il reste à faire voir que cette même circonstance tend à rendre le *numérateur* un *minimum.* Désignons par $\delta_{+1}Z$ et $\delta_{-1}Z$, les valeurs de δZ correspondant aux valeurs positives et négatives de A; le numérateur $\Sigma k \delta Z = \Sigma (\pm 1) \delta Z$, pourra s'écrire $\Sigma \delta_{+1} Z - \Sigma \delta_{-1} Z$, et se composera ainsi de deux groupes distincts de valeurs de δZ. Or, dans l'hypothèse d'erreurs également possibles, ainsi que nous l'avons supposé expressément au début des

opérations, après d'ailleurs que toutes les équations ont été ramenées au même poids, il suffit que les valeurs δZ de chaque groupe soient assez nombreuses pour que leur somme algébrique approche d'être nulle par une compensation des erreurs. Il est visible qu'il n'en saurait généralement être ainsi, que dans le cas où les δZ seraient affectés de coefficients ayant des valeurs absolues égales entre elles, et valant 1 entre autres. D'après cela, si, au numérateur aussi bien qu'au dénominateur de l'expression de l'erreur commise sur la *valeur approchée* α de a, on *prend* le facteur k égal à $+1$ ou -1, dans les sommes Σ, suivant que les valeurs correspondantes de A sont positives ou négatives, on réduira ladite erreur à son *minimum*.

Afin de simplifier les énoncés, nous nommerons *somme subordonnée* à certains coefficients d'une espèce donnée, aux quantités de l'espèce A, par exemple, une somme d'éléments correspondant à des valeurs données de A, formée en changeant les signes de ceux de ces éléments qui sont associés aux valeurs négatives de A. En désignant par S_A une semblable somme, on voit d'abord que $S_A A$ se compose de la somme positive des valeurs absolues des quantités A. De son côté, $S_A Z$ se compose de la somme algébrique des valeurs des éléments Z, après qu'on a ramené chacun de ces éléments au signe de la quantité A correspondante. — Nous désignerons en outre les quantités, telles que A de notre exemple, qui règlent les changements de signe à opérer dans les autres fonctions, par la dénomination de *dominantes*.

Dans ce qui va suivre, nous nous trouverons en présence des quantités B_1, C_2, D_3,..., qui joueront successivement le *rôle de dominante*. — Pour éviter la confusion des relations, les sommes subordonnées à ces dominantes seront notées S_{B_1}, S_{C_2}, S_{D_3}, etc.

— En vertu des raisonnements et des conventions qui précèdent, l'équation donnant une première valeur α de a avec une erreur minimum, s'écrira :

$$\text{(II)} \qquad \alpha = \frac{S_A Z}{S_A A}.$$

Substituons (II) dans les équations de la forme (I) ; et voyons la quantité Z_1 qu'il faut ajouter, pour changer chacune de ces équations en une autre de la forme :

$$\text{(III)} \qquad Z_1 = Z - \frac{A}{S_A A} \times S_A Z = Z - \alpha \times A.$$

On examinera alors si les quantités de l'espèce Z_1 ne dépassent

pas l'ordre de petitesse des erreurs probables d'observation. — Supposons que toutes lesdites quantités, ou au moins presque toutes, satisfassent à cette condition. On en conclura que l'on est en droit de négliger les termes qui suivent celui en a dans les équations générales de l'espèce (I); et que l'expression (II) convient à la question, après toutefois qu'on l'aura recalculée, ***en laissant de côté le très-petit nombre d'équations pour lesquelles la condition dont il s'agit n'est pas satisfaite***, et qui correspondent très-vraisemblablement à des observations manquées. — Si, à l'encontre de notre supposition, c'est pour un nombre important d'équations que cette condition n'est pas remplie, il faut en conclure qu'on n'a pas le droit de se borner au terme en a dans les relations générales de l'espèce (I). Éliminons alors de ces équations la quantité a. A cet effet, commençons par sommer ces mêmes équations par rapport à la dominante A. Nous trouverons :

$$\text{(I } bis) \qquad S_A Z = a \times S_A A + b \times S_A B + c \times S_A C + d \times S_A D + \dots$$

Puis multiplions les deux membres de cette équation par $\frac{A}{S_A A}$, il viendra :

$$\frac{A}{S_A A} \times S_A Z = a \times A + b \times \frac{A}{S_A A} \times S_A B + c \times \frac{A}{S_A A} \times S_A C + d \frac{A}{S_A A} \times S_A D + \dots$$

Tirons de là a; et introduisons-le dans chaque équation (I), après avoir d'ailleurs remplacé Z par sa valeur tirée de (III). On trouvera, tout calcul fait :

$$\text{(I')} \quad Z_1 = b \times \left(B - S_A B \times \frac{A}{S_A A}\right) + c \times \left(C - S_A C \times \frac{A}{S_A A}\right) + d\left(D - S_A D \times \frac{A}{S_A A}\right) + \dots$$

Or on peut représenter par B_1, C_1,.. les nouveaux coefficients de b, c.... Il vient encore ainsi :

$$\text{(I')} \qquad Z_1 = b \times B_1 + c \times C_1 + d \times D_1 + \dots$$

— Cette relation est tout à fait de la même forme que l'équation (I) au point de vue des constantes b, c, d,..., à déterminer; on pourra donc la traiter comme cette équation. A cet effet, on admettra *à priori* que les constantes c, d,..., sont négligeables ; et on déduira une première valeur approchée β de b, savoir :

$$\text{(II')} \qquad \beta = \frac{S_{B_1} Z_1}{S_{B_1} B_1}.$$

Supposons maintenant cette valeur introduite dans les équations dont elle dérive, c'est-à-dire dans les équations de l'espèce (I');

et voyons la quantité Z_2 qu'il faut ajouter pour changer chacune de ces équations en une autre de la forme :

(III') $$Z_2 = Z_1 - S_{B_1}Z_1 \times \frac{B_1}{S_{B_1}B_1} = Z_1 - \beta \times B_1.$$

On examinera alors si les quantités de l'espèce Z_2 remplissent la condition de ne dépasser pour aucune ou presque aucune équation, la limite des erreurs d'observation; en pareil cas, on n'ira pas plus loin. — Sinon, en continuant à suivre la même marche que ci-dessus, on obtiendra évidemment la série de relations suivantes, pour arriver à une première valeur approchée γ de c :

(I' *bis*) $$S_{B_1}Z_1 = b \times S_{B_1}B_1 + c \times S_{B_1}C_1 + d \times S_{B_1}D_1 + \ldots\ldots;$$

(I'') $$Z_2 = c \times \left(C_1 - S_{B_1}C_1 \times \frac{B_1}{S_{B_1}B_1}\right) + d \times \left(D_1 - S_{B_1}D_1 \times \frac{B_1}{S_{B_1}B_1}\right) + \ldots..,$$

ou

(I'') $$Z_2 = c \times C_2 + d \times D_2 + \ldots;$$

(II'') $$\gamma = \frac{S_{C_2}Z_2}{S_{C_2}C_2};$$

et ainsi de suite.

— Enfin, quand on sera arrivé à un coefficient remplissant la condition précitée, on s'arrêtera là, c'est-à-dire qu'on considérera les coefficients venant après lui comme négligeables; ou, si on préfère, on regardera le développement général donné comme n'allant pas au delà de ce coefficient.

Il restera alors à revenir sur ses pas, pour trouver les deuxièmes valeurs des diverses constantes qui *précèdent* la constante à laquelle on vient de s'arrêter. — La deuxième valeur de l'avant-dernière des constantes calculées s'obtiendra en introduisant la dernière de ces constantes dans la formule *sommée* qui a servi à établir la relation d'où dérive l'avant-dernière constante, et limitée au terme qui renferme la dernière constante, et qui est alors le second. La deuxième valeur ainsi obtenue de l'avant-dernière constante sera introduite à son tour, en même temps que la dernière constante, dans la formule *sommée* précédente, où cette deuxième valeur fait partie du second terme, et qu'on arrêtera à son troisième terme; et ainsi de suite.

Par exemple, si la valeur approchée γ de c obtenue en prenant la relation (I'') comme point de départ, est bonne, on obtiendra une deuxième valeur approchée et suffisamment exacte de la constante précédente b, en introduisant γ à la place de c dans l'équation (I' *bis*),

bornée aux deux premiers termes, et en tirant b de cette équation ainsi réduite. — Il ne restera plus alors qu'à se procurer une valeur suffisamment bonne de a. Ceci se fera en introduisant la dernière valeur que nous venons de trouver pour b d'une part, et $c=\gamma$ d'autre part, dans l'équation (I *bis*) bornée à ses trois premiers termes, et en résolvant cette équation par rapport à a.

On trouvera, au TYPE DE CALCUL n° 10 de la fin du texte, une application numérique complète de la méthode que nous venons d'exposer.

* **N° 136. Remarques diverses; preuve des opérations, et interprétation géométrique de la méthode d'interpolation de Cauchy.** — Comme cela a lieu en général (n° 111) pour les chronomètres d'après les applications qui leur ont été faites de la méthode de Cauchy, il arrive souvent, avec cette méthode, qu'il n'est pas nécessaire d'aller au delà de la constante du terme qui correspond à la première puissance de y de la première formule (I) du numéro précédent. — Quand on est conduit à atteindre la constante du terme en y^2, il faut bien examiner si on a eu soin, dans la discussion de la valeur approchée de chaque constante, de rejeter les quelques observations qui peuvent avoir été manquées, et dont l'existence se révèle ainsi qu'il a été expliqué dans ce qui précède. Si néanmoins, on est obligé de descendre jusqu'à la constante en question, cela prouve que la série de Taylor converge lentement pour le phénomène considéré.

Par ailleurs, il peut être utile, quand on est conduit à s'arrêter aux deux ou trois premières constantes, de pousser outre néanmoins. Car si on trouve que les constantes suivantes ne satisfont pas à la condition relative à la limite des erreurs d'observation, alors que les précédentes constantes la remplissent, c'est que le développement (I) sus-rappelé a été mal ordonné *à priori* suivant l'ordre de grandeur décroissante des constantes.

Il va de soi que, dans tout le cours du calcul, on se servira des logarithmes pour effectuer les produits et les quotients, quand cela en vaudra la peine.

— Il importe de prévenir que la nature particulière des sommes $S_{,1}$, S_{a_1}, S_{c_2},..., du n° 135 offre, entre plusieurs autres, une preuve assez simple des opérations. Cette preuve consiste en ce que les sommes formées de quantités d'une espèce donnée, et *subordonnées* à des dominantes qui précèdent ces quantités dans l'ordre des calculs, sont égales à zéro.

En effet, en vertu de l'équation (III) du numéro précédent, on a :

$$S_A Z_1 = S_A Z - S_A \left(\frac{A}{S_A A} \times S_A Z\right) = S_A Z \left(1 - \frac{S_A A}{S_A A}\right);$$

soit :

$$S_A Z_1 = 0;$$

et on obtient semblablement, d'après les valeurs mêmes de B_1 et C_1 :

$$S_A B_1 = 0; \quad S_A C_1 = 0.$$

On démontrerait d'une manière analogue la proposition de proche en proche pour les sommes *subordonnées* de la forme S_{a_1}, S_{a_2}, etc.

Les vérifications fournies par cette proposition sont d'un usage très-commode. En effet, lorsqu'en suivant l'ordre des calculs, on est sur le point de *subordonner* une somme par rapport à une certaine *dominante*, il convient d'effectuer préalablement, au moyen des quantités de l'espèce que l'on considère, une somme subordonnée à la dominante qui précède immédiatement. De cette manière, il est presque impossible qu'il se glisse des erreurs, sans que l'on s'en aperçoive sur-le-champ.

— Il nous reste à interpréter géométriquement la méthode d'interpolation de Cauchy.

Si on se reporte à l'équation générale (I) mentionnée au commencement de ce numéro, il est manifeste que la détermination des constantes de l'équation par ladite méthode, revient à trouver une surface qui satisfasse à la condition de passer à des distances de chacun des points (z, y, x) obtenus par l'expérience, moindres que les erreurs *probables* d'observation, ces distances étant d'ailleurs estimées suivant l'axe des z.

2e PARTIE. — § V. Régulation des chronomètres; graphiques de marche; installation et service des chronomètres.

N° 127. Considérations et recommandations générales sur la régulation des chronomètres. — On entend par *régulation* des chronomètres, la détermination de leurs états absolus et de leurs *marches*. Comme nous l'avons déjà dit au n° 115, les états absolus sont, en principe, aujourd'hui, ramenés à être des *Retards*, afin de faciliter les calculs.

En tout état de cause, la détermination dont il s'agit, doit s'effectuer d'une manière différente, suivant qu'il s'agit d'une *campagne scientifique* ou de la *navigation courante*.

— Par *campagnes scientifiques*, il faut entendre les campagnes où

on se propose de relier à des points déjà connus, la longitude de points inconnus secondaires comme importance, ou appartenant à des îles isolées, dans lesquelles on n'est pas d'ailleurs appelé à séjourner.

Les localités considérables de tous les points du globe sont aujourd'hui reliées entre elles par des télégraphes électriques; et l'emploi de signaux obtenus par l'intermédiaire de ceux-ci, constitue des procédés aussi exacts et aussi commodes que possible de la détermination de la longitude. — De leur côté, les points où on séjourne un certain temps se prêtent, pour la détermination de leur longitude, à l'usage des *culminations lunaires*, qui est, somme toute, avec les bons instruments *ad hoc* dont on dispose aujourd'hui, supérieur à l'emploi des chronomètres. D'ailleurs, cet emploi exige qu'on attende le retour du navire à une station connue, afin (n° 140) d'employer les formules de marche par *interpolation*, ce qui est beaucoup plus rigoureux que par *extrapolation*.

Ledit emploi des chronomètres pour les campagnes scientifiques se trouve donc, en l'état actuel des choses, réduit à un rôle bien moins important que par le passé. Dans tous les cas, il nécessite expressément (n° 114) qu'on adopte la formule de marche *complète* (I_0) du n° 108, et qu'on détermine les *constantes* de cette formule par les moyens les plus perfectionnés.

— Pour la *navigation courante*, la régulation des chronomètres comporte deux méthodes (n° 114), l'une avec les formules de marche *réduites* (I_2) du n° 111 ou (I_3) du n° 112; l'autre avec des *graphiques* de marche (n°s 142, 144 et 150).

Mais aussi bien pour le présent cas que pour le précédent, les éléments doivent être calculés par les moyens les plus perfectionnés.

— Ces moyens comportent, entre autres, la détermination, pour les états absolus et les marches, de leurs *erreurs probables* (n° 122), en se basant pour cela sur la théorie des erreurs d'observation. Ils exigent d'ailleurs, avant tout, qu'ils soient appliqués par un habile observateur, et que ce soit la même personne qui se charge de toutes les opérations : comparaisons du compteur avec les chronomètres tous les matins vers 9 heures; lecture de la température de l'armoire des montres à ce même instant; observations des hauteurs, etc. — Il ne servirait à rien d'indiquer à un observateur médiocre des procédés de calcul perfectionnés. L'examen des "*journaux des chronomètres*" apprend avec évidence que tant vaut l'officier des montres, tant vaut le chronomètre.

On doit, par ailleurs, se rappeler les précautions à prendre pour obtenir de bons états absolus et par suite de bonnes marches, à savoir : évaluer et corriger toutes les causes d'erreurs *systématiques* (n° 118) des instruments ; — observer aux environs des instants favorables ; — prendre, autant que possible, les hauteurs à l'horizon artificiel ; — noter les hauteurs du baromètre et du thermomètre au départ du bord et au retour ; et corriger les hauteurs des astres de l'influence de ces éléments sur la réfraction, en employant la pression et la température moyennes ; — n'employer pour la détermination des marches, que les hauteurs observées à peu près aux mêmes heures ; — espacer les états absolus de cinq jours au moins, afin qu'il s'écoule un laps de temps suffisant entre chaque couple d'états, d'où l'on déduit la marche se rapportant à l'époque et à la température moyenne entre les deux observations ; car il importe de comprendre que, d'après l'*exemple* II du n° 128, plus l'intervalle entre les deux états est grand, plus est petite l'*erreur probable* sur la marche calculée ; — quand la température de l'armoire des montres a changé dans l'intervalle de deux observations, ne se servir de celles-ci qu'autant que cette température n'a pas varié de plus de 2 à 3 degrés, laps de température pour lequel, eu égard à l'excellente compensation des chronomètres actuels, il est loisible de considérer la variation de la marche comme proportionnelle à celle de la température, et par suite pour lequel la marche déduite des états absolus afférents à chacune des deux observations peut être regardée comme une marche *isotherme* correspondant à la température moyenne ; — rejeter *à priori* les états observés dans des circonstances mauvaises, ou dont les séries ne concordent pas suffisamment ; et *à posteriori* ceux qu'indique le *criterium de Chauvenet* (n° 124) appliqué comme il est expliqué au n° 138 ; — enfin calculer les états absolus au dixième près, et les marches au centième.

Quand on prend une longue suite d'états absolus, il est bon, à l'instar de M. Mouchez, de dresser un graphique de ces états à grande échelle. A cet effet, on porte le temps sur l'axe des x, et on compte les états sur des parallèles à l'axe des y. On joint ensuite par des bouts de droites toutes les extrémités des ordonnées ainsi obtenues. Quand un plus ou moins grand nombre de points successifs sont sensiblement en ligne droite, on est à peu près certain qu'entre les deux époques correspondant aux deux extrémités de la droite, la marche est demeurée *isotherme*. Pour qu'il en fût

autrement, il faudrait qu'entre chaque paire d'états consécutifs, il y eût des variations alternatives de température finissant par se compenser, ce qui est infiniment peu probable, et ce dont on peut s'assurer en consultant le registre des températures diurnes de l'armoire des montres.— Quoi qu'il en soit, le graphique dont il s'agit a l'avantage de frapper les yeux, et de bien indiquer quels sont les états *les plus écartés* qu'on puisse considérer pour en tirer une marche *isotherme*, au grand avantage de l'exacte détermination de cette marche.

Un point que nous ne saurions trop recommander, c'est, lorsqu'on observe à terre, de s'exercer à compter soi-même les battements du compteur, de s'appliquer à fractionner ces battements par la pensée, afin d'obtenir des résultats aussi exacts que possible. Il ne sert à rien de lire les angles à 5 secondes sur un sextant, de les répéter six à huit fois avec un cercle, de calculer les déclinaisons à la seconde d'arc, si l'on se contente de la seconde de temps, et si l'on introduit ainsi des erreurs de 15 secondes d'arc. —La même recommandation est à faire pour les comparaisons des chronomètres entre eux : prises à 1/2 seconde près, elles donnent des marches RELATIVES (nº 148) discontinues, et laissent échapper parfois des différences significatives. Malgré les mouvements et le bruit du navire, nous pensons qu'on peut se servir de l'oreille pour évaluer les petites fractions de seconde. — Nous donnerons en détail au nº 195 les *divers* modes de procéder. Présentement, nous nous bornerons à dire que d'habitude on compare successivement les chronomètres au compteur, que l'on tient près de l'oreille ; et on déduit de cette comparaison les heures simultanées des diverses montres. Le compteur n'agit ici que comme intermédiaire ; et il est toujours licite de négliger sa marche par rapport à chaque chronomètre dans l'intervalle des deux ou trois minutes nécessaires pour faire les comparaisons. D'après l'expérience d'observateurs très-compétents, ce procédé réussit parfaitement à bord.

Pour justifier l'ensemble des précautions que nous venons d'énumérer, il importe de dire que si on n'a pas besoin à la vérité de connaître les états absolus en eux-mêmes au *dixième* de seconde près précité, en revanche les marches exigent la précision sus-mentionnée d'un *centième*. Or, en principe, cela n'est possible qu'à la condition d'apporter à la détermination des états l'exactitude que nous venons de rappeler.

— Il est essentiel, pour compléter les indications pratiques précédentes, d'avertir que l'emploi simultané de plusieurs chronomètres

n'entraîne pas pour chaque chronomètre, la répétition des opérations exigées pour la régulation de l'un d'entre eux.

En d'autres termes, il suffit de prendre l'un des chronomètres comme *Étalon;* puis on ne calcule *directement*, c'est-à-dire par les observations, que l'état absolu et les marches de ce chronomètre; et on en déduit par des comparaisons (n° 148) les marches des autres chronomètres. — Réciproquement, à la mer, on ne calcule que l'état absolu de l'*Étalon*, en se servant pour cela (n° 155) de sa marche préalablement corroborée par celle des autres montres.

Il importe dès lors qu'on choisisse pour étalon le chronomètre qui inspire le plus de confiance; puisque, d'après ce que nous venons de dire, c'est en définitive à sa formule ou à sa courbe de marche *extrapolée* qu'on se reporte pour fixer à la mer l'heure de Paris, et que les autres montres ne servent qu'à le contrôler.

— C'est ici le moment d'expliquer, d'après M. Caspari, pourquoi le Dépôt de la marine a laissé exclusivement aux officiers chargés des montres, le soin de déterminer eux-mêmes les *constantes* des formules de marche, ainsi que la marche *normale* convenant à une température et à une époque données, c'est-à-dire la *constante* même de la marche, et pourquoi les observatoires des ports ne communiquent à cet égard que des renseignements officieux et sur la demande des officiers responsables.

Autrefois chaque montre, à sa sortie du Dépôt, était accompagnée d'un bulletin donnant la valeur des *deux constantes* de la température et la valeur de la constante de la *première puissance* des variations du temps. Du reste, soit dit en passant, on donnait à cette dernière constante le nom d'*accélération;* car, d'après l'expression exacte de l'accélération donnée au n° 111, celle-ci se confond avec ladite constante, quand on regarde comme négligeable le terme renfermant le *carré* des variations du temps. — En tout état de cause, on fournissait ainsi les trois constantes propres à la formule Lieussou (n° 112).

On a renoncé à cette pratique pour les raisons que voici :

L'expérience a prouvé qu'il est généralement imprudent de se fier aux marches d'un chronomètre dont les huiles ont plus de trois ans de date. Aussi est-il de règle, dans la marine de l'État, qu'une montre ayant atteint cet âge d'huiles rentre au Dépôt, et passe chez l'horloger. Le nettoyage doit se faire avec tout le soin imaginable. On ne change rien au balancier, ni au spiral; ces deux organes sont replacés ensuite exactement dans les positions qu'ils avaient auparavant. Tout au plus touche-t-on légèrement aux vis de réglage, si la

constante de la marche est trop forte, en plus ou en moins. Mais les nombreuses précautions requises dans ces opérations délicates ne sont pas toujours prises avec la rigueur voulue ; et il y a en général peu de chance pour que la compensation reste exactement la même après le nettoyage. — Ce fait a été constaté sur beaucoup de montres qui ont fait retour aux observatoires des ports après le changement des huiles, et principalement sur des chronomètres qui, ayant été primés lors de leur achat, ne donnaient plus que des résultats d'une médiocre valeur après le nettoyage. D'ailleurs, *tant vaut* (n° 114) *le mode* employé pour calculer les constantes d'un chronomètre, *tant valent ces constantes* elles-mêmes.

D'après les diverses considérations précédentes, il semble prudent, en se conformant à la réserve dont il s'agit, de ne pas hasarder des prédictions, qui risqueraient de partager le sort des prophéties météorologiques, et qui auraient ainsi le grave inconvénient de donner à l'officier des montres une fausse sécurité ; ou bien quand l'événement viendrait les démentir, de lui inspirer une méfiance exagérée.

N° 128. Détermination perfectionnée des états absolus d'un chronomètre et des marches qu'on en déduit; et appréciation de leurs erreurs probables. — Quels que soient les procédés employés pour la *régulation* des chronomètres, nous venons de voir au numéro précédent qu'il y a lieu, à tous égards, de *perfectionner* la détermination actuelle des états absolus. Mais il importe d'arriver à ce résultat sans allonger outre mesure l'ensemble des opérations. On doit au surplus se servir, à chaque calcul, d'un bon nombre de hauteurs, afin d'apprécier sûrement les résultats par la *théorie des erreurs d'observation*, et de pouvoir, par cette appréciation, rejeter les observations douteuses.

Le TYPE DE CALCUL N° 9 de la fin du texte, dû à M. Rouyaux, nous semble satisfaire aux conditions du problème. Du reste, si le lecteur n'en accepte pas les *deux parties intermédiaires*, 2° et 3°, qui sont susceptibles de se traiter autrement, il pourra, en toute circonstance, se servir de la *partie 4°*, pour la manière de s'y prendre dans l'appréciation du degré d'exactitude des résultats. — Le type complet de M. Rouyaux peut s'effectuer en 50 ou 60 minutes. Il nécessite les divers commentaires et explications que voici :

1° On observe à l'horizon artificiel et aux environs des circonstances favorables ; et on prend, au sextant, des hauteurs distantes les unes des autres exactement de 20′, en disposant d'avance l'alidade. Si le Soleil

se déplaçait trop lentement, on espacerait les hauteurs de 10′ en 10′. — Cette manière de faire permet de saisir le sextant des deux mains au moment du contact, et d'obtenir de très-bonnes observations, grâce au surcroît de fixité de l'instrument ainsi tenu. En outre, elle met à même de réduire l'écriture pendant l'opération au simple enregistrement des secondes de temps. Car les minutes de la hauteur et les minutes du compteur se suivent à des distances constantes; et on a tout le loisir d'écrire exactement les valeurs de ces éléments pour la première et la dernière hauteur, avant et après la séance d'observation. Cette réduction si grande de l'écriture procure la facilité d'observer tout seul, ce qui est quelquefois nécessaire. Enfin, si l'on dispose d'un timonier pour compter et inscrire les résultats, on a le temps de relire l'angle mesuré, afin de s'assurer que l'alidade n'a pas bougé; et il devient possible d'obtenir, par cette double lecture, une approximation plus grande, qui peut aller jusqu'à 5″ avec les bons instruments.

2° Autant que possible on observe un nombre impair de hauteurs, de façon que les deux hauteurs extrêmes, et en général les hauteurs également éloignées des extrêmes, soient *équidistantes* de celle du *milieu*.

3° Pour l'heure M du compteur au moment de l'observation de la *hauteur milieu*, on calcule l'heure approchée de Paris, la déclinaison D et l'équation du temps E correspondantes. — Puis, on détermine les variations ΔM, ΔD, ΔE (= Δ′T) de ces éléments entre leurs valeurs correspondant à la *hauteur milieu* et leurs valeurs concernant la *dernière* hauteur observée; ΔD et ΔE se déduisant, bien entendu, de ΔM. — Cela fait, à l'aide des TABLES de M. Perrin, on calcule, comme il est indiqué dans le type, la variation Δ″T de l'heure T du lieu, qui correspond à la variation ΔD de la déclinaison. — Enfin, au moyen du carnet d'observation, on trouve la variation Δ‴T de l'heure du lieu, qui résulte de la différence de la valeur de la réfraction pour la *hauteur milieu* et pour la *dernière* hauteur. — Quant aux signes de ces différentes variations, ils suivent les règles que voici :

Δ′T a le signe de la variation *diurne* de l'équation du temps, tel qu'il résulte de l'examen de cette variation dans la *Connaissance des temps;*
Δ″T a le signe qui résulte de la combinaison du signe de la somme $(p' + p'')$ déduite des TABLES de M. Perrin et du signe propre de ΔD;
Δ‴T est toujours positif.

4° Avec toutes les hauteurs corrigées de la même quantité que la hauteur milieu, et avec la même déclinaison que pour cette hauteur,

on calcule un nombre égal d'états absolus du compteur. On se borne d'ailleurs à estimer ces états par rapport au *temps vrai*.

5° On détermine la correction totale ΔT à faire subir à l'état absolu du compteur déduit de la dernière hauteur, pour tenir compte de l'erreur commise dans le calcul de cet état par l'emploi d'éléments ne convenant rigoureusement qu'à la *hauteur milieu*. Cette correction est donnée par la relation :

$$\Delta T = \Delta' T + \Delta'' T + \Delta''' T;$$

et la fraction :

$$\frac{q}{\frac{1}{2}(n-1)} \Delta T,$$

représente alors la correction ΔR de l'espèce dont il s'agit à faire subir à chaque état absolu du compteur provenant d'une hauteur autre que la *hauteur milieu*, dans le cas d'un nombre total et impair n d'observations, q étant, par rapport à la *hauteur milieu*, le rang de l'observation considérée, pris *positivement* (*après*), ou négativement (avant).

6° D'après cela, les divers états R du compteur sur le *temps vrai* entendus comme nous venons de le dire, étant considérés deux à deux à égale distance de la *hauteur milieu*, devraient être affectés de corrections égales et de signes contraires ; leur *moyenne* est donc la même, qu'on les corrige ou non. — D'ailleurs, on a pour chaque *erreur résiduelle* x (n° 120) des R :

$$x = \mathrm{R} - \textit{moyenne des}\ \mathrm{R}.$$

De cette égalité on tire pour l'expression générale Δx de la correction à faire subir à chaque erreur résiduelle, en raison de la correction de l'espèce sus-mentionnée propre à chaque état absolu : $\Delta x = \Delta R$, puisque la *moyenne des* R ne varie pas du fait de la correction des états. Comme d'ailleurs $\Delta R = \frac{q}{\frac{1}{2}(n-1)} \Delta T$, on aura pour expression générale x' des erreurs résiduelles *corrigées* :

$$x' = x + \frac{q}{\frac{1}{2}(n-1)} \Delta T.$$

7° Des erreurs résiduelles corrigées, on déduit, d'après le n° 126, l'*erreur probable* commune à chacun des états, puis l'erreur probable de leur moyenne. L'application du *criterium de Chauvenet* (n°ˢ 124 et 127) indique alors les observations qui doivent être rejetées, et celles qui doivent être conservées. — Avec ces dernières seules, on détermine une nouvelle moyenne, qui est le *retard* moyen

du compteur sur le temps vrai ; et on évalue ensuite l'erreur probable de ce même élément.

8° L'équation du temps, combinée avec le retard moyen du compteur sur le *temps vrai*, donne son retard sur le *temps moyen* du lieu, lequel retard est affecté de la même erreur probable que le premier. — En combinant le retard du compteur sur le temps moyen avec son retard sur le chronomètre A dont il s'agit d'avoir la régulation, on trouve l'*état absolu* R_A de ce chronomètre. Puis, eu égard à l'erreur probable due au défaut de précision des comparaisons avec le compteur, on détermine l'erreur probable qui convient audit état absolu R_A.

9° On retranche alors ce même état absolu d'un autre état R'_A obtenu antérieurement d'une manière analogue, pourvu que la température n'ait pas varié de plus de 2° à 3° dans l'intervalle des observations ; et en divisant la différence par le nombre de jours écoulés, on obtient la *marche m* correspondant à la température et à l'époque moyennes de cet intervalle, déduites l'une et l'autre des températures et des dates et heures afférentes aux deux états. En d'autres termes, on pose :

$$m = \frac{R'_A - R_A}{N}, \tag{4}$$

N étant le nombre de jours écoulés ; et l'ordre des termes du numérateur résultant des signes adoptés au n° 105 pour distinguer les marches en *avance* d'avec les marches en *retard*.

L'erreur probable de la marche se déduit des erreurs probables des deux états, d'après les règles du n° 128. Il est intéressant, à propos du résultat ainsi obtenu, de remarquer que les erreurs *systématiques* n'ont pas, dans le calcul d'état absolu, une influence aussi fâcheuse (n° 64) que dans la détermination du point le plus probable. En effet, les hauteurs variant peu ici, les erreurs systématiques (excentricité de l'instrument à réflexion, défaut de parallélisme des miroirs, etc.) sont sensiblement les mêmes pour chaque angle successif pris à l'horizon artificiel. L'état absolu est donc affecté de la résultante des erreurs systématiques propres à *une* des observations ; et cette résultante constitue ainsi une portion bien distincte de l'erreur totale, dont la seconde partie est intégralement formée de l'erreur probable. L'influence des erreurs systématiques dans la détermination de la marche se fait sentir dans la différence qu'elle comporte entre des états absolus pris deux à deux. Mais elle est bien faible, si les observations ont été prises environ à la même heure de la journée.

— Quoi qu'il en soit, le mode de calcul précédent appliqué à plusieurs séances d'observations, distancées entre elles d'un certain nombre de jours, au moins cinq (n° 137), fournira :

1 En premier lieu, une série d'états absolus du chronomètre consi-

déré, ayant chacun son erreur probable connue, et parmi lesquels on pourra dès lors choisir celui qui inspirera le plus de confiance pour servir d'état absolu de départ ;

En second lieu, une série de marches dudit chronomètre, correspondant respectivement à une température et à une époque déterminées, et ayant aussi chacune son erreur probable connue.

Ce dernier élément permettra d'apporter toute la rigueur désirable au calcul (n° 140) des *constantes* de la formule de marche adoptée, particulièrement en mettant à même, d'après le n° 129 et la fin du n° 130, d'avoir exactement la *mesure de précision* propre à chaque observation. Il procurera le même avantage au tracé des graphiques de marche (n°s 142, 144, 149 et 150).

*** N° 189. Raffinement de la détermination précédente par l'emploi des moindres carrés, dans le cas d'une température sensiblement constante.** — Il peut arriver que la température demeure constante dans l'armoire des montres, à 2° ou 3° près (c'est-à-dire dans les limites indiquées au n° 137), pendant toute la période qui a été employée à déterminer une suite d'états absolus et de marches, et qu'en outre cet intervalle ne dépasse pas 20 à 25 jours, et par suite se trouve assez restreint pour qu'il n'y ait pas à se préoccuper du changement d'âge des huiles. En pareille occurrence, il est bon d'appliquer la méthode des moindres carrés (n° 133), pour déduire de tous ces éléments la *valeur la plus probable* de l'état absolu de départ, ainsi que la *valeur la plus probable* de la marche pour la température et l'époque considérées. — On peut suivre, pour le cas dont il s'agit, la voie indiquée par M. Daussy, en ayant bien soin de se rappeler qu'elle suppose d'une manière expresse que la température demeure sensiblement constante ; toutefois, l'éminent hydrographe ne s'était pas préoccupé de cette condition ; car, de son temps, la question chronométrique était, sur ce point particulier, encore fort ignorée.

Prenons pour état absolu approché le premier retard observé R_0 ; et soit R_1 le dernier retard observé. Calculons une première marche approchée par la formule (I_7) du numéro précédent ; nous aurons :

$$\frac{R_0 - R_1}{N} = a_0.$$

A l'aide de cette première marche a_0, réduisons tous les états absolus à la même heure de la journée. Puis, déduisons du premier état R_0 les états suivants. On trouvera généralement ainsi des nombres différents de ceux que l'observation a donnés. — Soient maintenant :

ΔR l'erreur de l'état absolu R_0;
Δa l'erreur la plus probable sur la marche réelle, provenant de ce qu'on prend a_0 pour cette marche;
R' l'état absolu *observé* pour un jour de rang q;
R l'état pour ce jour-là *déduit* de R_0.

On aura :

$$\textit{État observé} = \textit{état déduit} + \Delta R + q\Delta a;$$

soit :

$$R' = R + \Delta R + q\Delta a;$$

d'où il vient :

$$\Delta R + q\Delta a = R' - R.$$

On formera ainsi autant d'équations qu'on a d'observations. — Conformément à ce qui a été dit au n° 133, il faudrait, à la rigueur, avant d'aller plus loin, multiplier chacune de ces équations par la *racine carrée du poids* qui lui convient; ce facteur se calculerait d'après le n° 129, à l'aide de l'*erreur probable* afférente à R', et déterminée comme il a été expliqué au n° 138. Mais nous négligerons ce nouveau raffinement de calcul. — Dès lors, soit n le nombre des observations, on appliquera aux n équations qui leur correspondent, la méthode des moindres carrés. Ceci conduira d'abord à ajouter ces n équations, ce qui donnera :

$$n\Delta R + \Delta a \times \Sigma q = \Sigma\,(R' - R).$$

On multipliera ensuite chaque équation par le coefficient q de Δa dans cette équation; et on sommera encore les nouvelles équations obtenues de la sorte. L'équation résultante sera :

$$\Delta R \times \Sigma q + \Delta a \times \Sigma q^2 = \Sigma\,(R' - R)\,q.$$

La résolution des deux équations précédentes du premier degré en ΔR et Δa donnera les valeurs de ces quantités. On aura alors pour la marche cherchée $(a_0 + \Delta a)$; et pour l'état absolu demandé $(R_0 + \Delta R)$, cet état ayant d'ailleurs pour date celle de R_0. — Il importe d'ajouter qu'on pourra, conformément au n° 128, déterminer l'erreur probable afférente à $(R_0 + \Delta R)$, d'après la connaissance (n° 138) de celle de chaque quantité de l'espèce R'. On trouvera de même l'erreur probable qui convient à $(a_0 + \Delta a)$.

— Si l'on parvenait à obtenir, avec le degré de raffinement que nous venons d'indiquer, une suite d'états absolus de l'espèce $(R_0 + \Delta R)$, ainsi qu'une suite de marches de l'espèce $(a_0 + \Delta a)$ correspondant respectivement à la température moyenne relative à la période des observations d'où on les a déduites, on se servirait de ces éléments suivant les indications de la fin du n° 138, en apportant ainsi un nouveau degré de précision dans l'emploi qu'on en ferait.

* **N° 140. Régulation des chronomètres pour les campagnes scientifiques.** — D'après ce qui a été dit aux nᵒˢ 114 et 137, nous devons prendre ici la formule de marche complète (I_0) du n° 108, qui devient en y remplaçant les différentes dérivées par des lettres :

$$m = a + b\times(\theta-\theta_1) + c\times(\theta-\theta_1)^2 + d\times(t-t_1) + e\times(\theta-\theta_1)(t-t_1) + f\times(t-t_1)^2 + \ldots$$

Dans cette formule, nous rappellerons qu'on représente par :

θ_1 et t_1 la température et l'époque de comparaison, lesquelles correspondent à la valeur particulière a de la marche *normale* (n° 105), soit à la *constante* de cette marche;
θ et t une température et une époque quelconques, correspondant à la valeur générale m de la marche *normale*.

La relation précédente peut s'écrire, pour simplifier :

$$(I_0\ bis)\qquad m = a + b\times x + c\times x^2 + d\times y + e\times xy + f\times y^2 + \ldots.$$

Le problème à résoudre consiste alors à déterminer les *constantes* a, b, c....., de la manière la plus rigoureuse pour les divers chronomètres embarqués, en se procurant d'ailleurs, pour le chronomètre *étalon*, un état absolu de départ aussi exact que possible. — Cet état absolu pourra s'obtenir en choisissant parmi les derniers états observés celui qui inspire le plus de confiance (n° 138). On aurait encore plus d'exactitude en combinant tous ces derniers états d'après les indications du n° 139; mais il faudrait que les observations fussent dans les conditions de température voulues à cet effet. Enfin, le dernier degré de raffinement serait obtenu si les circonstances indiquées à la fin du n° 139 venaient à se réaliser.

La détermination des *constantes* de la formule de marche ne se présente pas aussi facilement, tant s'en faut, que celle de l'état absolu de départ. Car elle exige un nombre considérable d'observations différentes entre elles, *par groupes*, et comme température et comme époque, et d'ailleurs réparties de part et d'autre du moment où on passe aux lieux dont on se propose de déterminer la longitude, cette dernière condition étant nécessitée par l'utilité d'employer (n° 137) la formule de marche par *interpolation* plutôt que par *extrapolation*.

Si on reste longtemps en rade, avant le départ, 4 ou 5 mois, par exemple, et que l'on traverse des températures très-variables, on se trouvera dans d'excellentes conditions pour effectuer au moins la plus grande partie des observations voulues, et pour déterminer de premières valeurs des constantes de marche. On rectifiera ensuite ces premières valeurs quand on aura réuni de nouveaux groupes d'ob-

servations, après avoir passé dans les lieux dont on a à reviser la position.

Quand on ne disposera pas, avant le départ, d'un temps suffisant de rade, on pourra avoir recours aux états absolus antérieurs fournis par l'observatoire du port avec les températures y relatives. Mais il importe de considérer que ces données hétérogènes devraient, à la rigueur, être affectées chacune d'un *poids* (n° 129) particulier tenant compte du changement d'observateur, et que ce poids est inconnu. En outre, eu égard à la perturbation presque générale qu'éprouvent (n° 103) les chronomètres dans le transport de terre à bord, la constante de marche a relative à la température θ_1 et à l'époque t_1 de comparaison, doit être expressément déterminée sur le navire, ainsi du reste que les éléments servant à donner l'état absolu de départ.

Pour toutes ces raisons, dans l'*hypothèse qui nous occupe*, on devra se borner à mettre de côté, avec soin, les divers états absolus observés à bord dans de bonnes conditions. Puis, avec ces états et ceux fournis par l'observatoire, on se contentera d'établir une régulation de navigation courante (n° 141) ; et on attendra patiemment que l'on ait pu, pendant toute la campagne, réunir un nombre suffisant d'observations, faites dans des conditions convenables d'écarts de température et d'époque, permettant un excellent établissement de la formule complète de marche de chaque chronomètre. On appliquera du reste, quand les groupes d'observations s'y prêteront, la méthode du n° 139 pour la détermination des marches à introduire comme coefficients dans le calcul des constantes. — Toutefois, il semble prouvé que, pour un même chronomètre, en dehors de la constante a, dont nous avons rappelé plus haut le tempérament particulier, les autres constantes b, c, d....., afférentes aux variations de température et à l'âge des huiles, conservent en général leurs grandeurs, aussi bien pour des valeurs *interpolées* qu'*extrapolées* de la marche. En admettant ce fait, il y aurait tout intérêt à ce que les établissements qui fournissent les chronomètres directement aux navires, étudiassent à fond, pour les campagnes scientifiques, le régime de chaque chronomètre, conformément à la formule complète des marches.

En tout état de cause, il conviendra de donner un *poids* moindre aux observations les plus écartées de celles qui doivent servir à rectifier les longitudes des lieux inconnus, et même d'exclure complètement du calcul celles qui en seraient éloignées de plus de huit ou dix mois en deçà ou en delà. Ces poids, qu'on multipliera par ceux

dont il est parlé plus bas, seront pris, comme cela résulte des explications concernant ces derniers, proportionnels aux carrés des intervalles des observations par rapport à l'époque où l'on aura passé par les deux stations à rectifier.

Il est indispensable d'ajouter qu'il faudra suivre avec le plus grand soin, pendant tout le cours de la campagne, les chronomètres les uns par les autres, de façon à reconnaître (n° 159) les *sauts de marche* ou *d'état absolu*, ainsi que les *modifications continues de marche*, qui viendraient à se produire. — En tout cas, l'état absolu de l'étalon se rectifiera à chaque relâche dans un lieu bien connu; et on aura soin, pour le calcul des constantes de marche, d'éliminer les sauts précités d'état absolu dans la comparaison des divers états absolus de départ et d'arrivée. On déduira d'ailleurs (n° 137) par des comparaisons les marches des autres montres. Au surplus, pour les chronomètres ayant éprouvé des perturbations de marche, il n'y aura guère moyen de rien calculer, puisque leur constante de marche a cesse d'être une même quantité entre les diverses observations destinées au calcul général des constantes.

Exclusion faite de ces chronomètres, supposons-nous présentement vis-à-vis du nombre suffisant précité d'observations. On appliquera à celles-ci la méthode d'interpolation de Cauchy, conformément au TYPE DE CALCUL N° 10 de la fin du texte. — Dans ce type, chaque équation de l'espèce (I_0) est préalablement multipliée par *la racine carrée de son poids* (n° 129), laquelle racine est représentée par l'inverse de l'*erreur probable* afférente à l'équation considérée. Les erreurs en question sont, de leur côté, déterminées comme il est expliqué à la fin du n° 130, en considérant la fonction obtenue, pour chaque équation, par le passage dans son second membre de la marche observée m. — D'ailleurs, les produits de ces erreurs par les racines carrées des poids représentent les limites respectives que les différences de l'espèce Z_1, Z_2, Z_3....., du type, ne doivent pas dépasser.

— Quand, pour une raison ou une autre, on n'a pu calculer lesdites *erreurs probables*, voici comment il y a possibilité d'y suppléer :

On évalue d'abord dans des conditions moyennes l'erreur totale susceptible d'affecter un état. Cette erreur comprend : 1° les erreurs des comparaisons entre le compteur et le chronomètre prises avant et après l'observation; 2° les erreurs de hauteur; 3° les erreurs de comptage pendant l'observation; 4° la différence de marche du compteur et du chronomètre dans l'intervalle des comparaisons. On peut estimer, sans

crainte d'être loin de la vérité, les moyennes de ces diverses erreurs à :

$\pm 0^s,6$ pour les erreurs provenant de la hauteur de l'astre et du compteur pendant l'observation;
$\pm 0^s,3$ pour chacune des erreurs de comparaison avant et après l'observation;
$\pm 0^s,1$ pour la différence de marche du compteur et du chronomètre dans l'intervalle de l'observation.

L'erreur maximum sur un état sera donc $\pm(0^s,6+0^s,3+0^s,3+0^s,1) = \pm 1^s,3$; et d'après le n° 128, l'erreur *probable* vaudra : $\pm\sqrt{(0^s,6)^2+(0^s,3)^2+(0^s,3)^2+(0^s,1)^2} = \pm 0^s,74$.

Considérons présentement les états absolus par paire, dont la différence devra être divisée par l'intervalle y relatif de n jours, pour avoir la marche concernant successivement chaque équation. Nous les supposerons affectés de la même erreur probable; on aura alors, toujours d'après le n° 128, pour l'*erreur probable* sur cette marche $\pm\frac{0^s,74\sqrt{2}}{n}$.

Nous devons maintenant tenir compte de l'erreur due à l'évaluation des deux températures correspondant au premier et au second état, et d'où on conclut la température moyenne afférente à l'équation considérée. Pour apprécier l'influence de cette dernière erreur, il serait nécessaire d'apprécier l'augmentation algébrique qu'elle produit sur les termes en x, x^2 et xy de chaque équation de l'espèce (I_0 *bis*), pour une variation de x de $\pm 0°,5$, qui représente la valeur moyenne de l'erreur de lecture sur le thermomètre. Il y aurait aussi, à la rigueur, à évaluer de la même manière l'influence des erreurs sur les y. Mais, en y regardant de près, on voit que ces dernières erreurs ne sauraient être qu'insignifiantes. — Il n'en est pas de même des erreurs précédentes. Mais le mode de les déterminer que nous venons d'indiquer est long; car il faudrait préalablement, comme on en a prévenu à la fin du n° 130, se procurer des valeurs approchées des constantes a, b, c,... Il nous suffira, en nous reportant à des résultats moyens connus, d'augmenter de $0^s,30$, le chiffre $0^s,74$ obtenu plus haut, ce qui donnera en tout 1^s environ. — Nous arriverons ainsi pour l'expression générale de l'*erreur probable* convenant à chaque fonction de l'espèce sus-mentionnée, à $\pm\frac{1^s\sqrt{2}}{n} = \frac{\pm 1^s,4}{n}$. Comme ce résultat suppose un *excellent* observateur, nous le doublerons en nombre rond, afin de pouvoir l'étendre à une supposition plus habituelle; et, en définitive, nous

adopterons pour l'hypothèse où les données spéciales font défaut :

$$\textit{Erreur probable propre à chaque équation} = \pm \frac{3^s,0}{n}.$$

C'est l'*inverse* de ce nombre qui, dans ladite hypothèse, devra être pris pour la *racine carrée du poids* propre à chaque équation. Comme il n'y a ici de variable que le nombre n de jours représentant l'intervalle afférent à chaque paire d'observations, il sera plus simple de se borner à prendre pour ladite racine ce nombre lui-même, ou mieux, afin d'avoir un multiplicateur moindre, son *dixième*. C'est ainsi que dans le TYPE DE CALCUL N° 10 sus-mentionné, nous avons posé la *racine carrée du poids* $= \frac{n}{10}$.

De son côté, l'erreur probable à laquelle il convient de comparer les quantités de l'espèce Z_1, Z_2, Z_3, devra évidemment être prise égale à $\pm \frac{3^s,0}{n} \times \frac{n}{10} = 0^s,30$ pour chaque équation. En d'autres termes, le chiffre $0^s,30$ représentera la limite *commune* des quantités en question.

— En terminant cet important numéro, il convient de remarquer que la longueur des calculs ne croît relativement que très-peu avec le nombre des chronomètres ; car les valeurs des x et des y, et par suite celles de leurs carrés et de leur produit, demeurent les mêmes pour toutes les montres.

N° 141. Régulation des chronomètres pour la navigation courante, en se servant des formules de marche réduites. — Pour cette sorte de régulation, on doit en principe, avons-nous dit au n° 137, se borner à l'usage de formules de marche *réduites*. Au surplus, il y a deux cas à considérer.

Dans le premier, on ne dispose que d'observations trop rapprochées pour qu'on puisse rien en tirer concernant l'influence de l'âge des huiles. Il convient alors (n° 114) d'avoir recours à la formule (I_2) du n° 111, dite formule *des isotemps*, et que l'on peut écrire :

$$(I_2\ bis) \qquad m = a + b \times (\theta - \theta_1) + c \times (\theta - \theta_1)^2 = a + b \times x + c \times x^2.$$

Dans le second cas sus-mentionné, on possède des observations suffisamment espacées, pour qu'on puisse en déduire l'influence de l'âge des huiles. Si l'on est en présence d'un chronomètre *ayant déjà servi*, et qu'on désire avoir une formule dont il y ait moyen de faire usage pendant un certain temps, on est en droit (n° 114) d'employer une

relation qui tienne compte, en dehors de l'influence des changements de température, du premier terme des variations du temps. La relation à adopter ici n'est autre que la formule Lieussou (n° 112), savoir :

$$(I_4) \qquad m = a''' + b\theta + d(t - t_1) + c\theta^2;$$

qu'on peut écrire :

$$m = a + b(\theta - \theta_1) + c \times (\theta - \theta_1)^2 + d \times (t - t_1) = a + b \times x + c \times x^2 + d \times y.$$

Une fois calculés les coefficients de la relation précédente, on fera bien, suivant la recommandation de la fin dudit n° 112, de rétablir cette relation dans la forme primitive (I_3) donnée par M. Lieussou et rappelée à ce même numéro, laquelle forme rend beaucoup plus rapide le calcul des marches *à posteriori*. Il importe d'ajouter que, pour bien des instruments *neufs*, avec lesquels on désirerait employer une formule qui tienne compte de l'*accélération*, on pourrait pareillement avoir recours à la formule Lieussou, mais sous l'obligation formelle, spécifiée en 2° du n° 111, d'y rectifier fréquemment le coefficient du terme en $(t - t_1)$, au moins pendant un certain temps.

— Dans l'une ou l'autre des deux formules précédentes, l'élément important à calculer est la *constante de marche a*, c'est-à-dire la marche afférente à la température θ_1 et à l'époque t_1 de comparaison. De même qu'au n° 140, cette détermination devra se faire une fois le chronomètre à bord, et autant que possible suivant la méthode du n° 139, qui fournira du même coup l'*état absolu* de départ. Si non, on devra se borner à choisir pour la marche et l'état absolu de départ, parmi les divers éléments de l'espèce déduits des observations, ceux qui se trouveront affectés des plus petites erreurs probables déterminées comme il est expliqué au n° 138.

Quant aux autres constantes des formules, il n'y a pas besoin ici pour les calculer d'éléments ni aussi nombreux, ni aussi précis qu'au n° 140. Il suffira donc de les extraire tant des renseignements fournis par l'observatoire du port (marches par décades et températures correspondantes), que de ceux qu'on aura eu la possibilité d'obtenir par des observations faites en rade. Le calcul même desdites constantes pourra s'effectuer par les moindres carrés. Mais si l'on n'a pas assez de données, ou si l'on veut opérer sans raffinement, on obtiendra les constantes par la simple résolution d'un nombre d'équations égal à leur propre nombre, et établies avec les éléments offrant le plus de garantie. L'essentiel pour la détermination des constantes de la température, sera de les déduire d'observations

entre lesquelles celle-ci aura subi des variations suffisamment étendues.

— Dans tous les cas, on ne saurait trop insister sur la nécessité de rectifier à chaque relâche l'*état absolu* ainsi que la *constante de marche*, et de plus la *constante de l'accélération* pour les chronomètres *neufs*. On aura du reste soin de toujours ramener la constante de marche à la même température et à la même époque de comparaison, en s'aidant à cet effet des autres constantes, dont les valeurs antérieures, même sans être très-exactes, le seront néanmoins suffisamment pour l'opération en vue. M. Mouchez pense, à cet égard, que la dernière marche observée sera toujours la meilleure, et celle qui donnera le plus de probabilité d'exactitude, après, bien entendu, ladite application des corrections de température et d'accélération.

De leur côté, les constantes autres que celle de la marche se rectifient aussi, ou même s'établissent si elles n'ont pu l'être avant l'appareillage, en employant à cet effet les marches déduites de la comparaison des états absolus de départ et d'arrivée, défalcation faite des *sauts d'état absolu* (n° 157) qui ont pu se produire pendant la traversée, et reconnus comme il est indiqué au n° 159.

— Il importe de ne pas oublier que, dans la pratique ordinaire de la navigation, avec la durée des traversées actuelles, nos chronomètres sont assez bons pour faire suffisamment bien atterrir, sans que les constantes de température et d'âge des huiles aient besoin d'être très-rigoureuses. Dès lors, on arrivera bien vite au bout de quelques relâches, à fixer pour chacune des constantes en question une valeur suffisamment exacte. — Pour plus de sûreté, on s'assurera si la formule ainsi trouvée rend compte, dans une certaine mesure, des écarts observés au concours du Dépôt, lorsque toutefois celui-ci aura fourni les indications nécessaires à cet égard. Il sera bon de voir en même temps si les chronomètres suivent encore la même loi que lorsqu'ils étaient neufs.

Avec les chronomètres où la marche se représente bien par une formule à quatre termes, on pourra conserver pendant tout le cours de la campagne les constantes de température et d'âge des huiles, sauf à modifier légèrement les premières pour les faire s'accorder avec les observations ultérieures, surtout si celles-ci correspondent à des températures notablement différentes de celles employées pour l'établissement de la formule. Au surplus, les coefficients de température une fois bien déterminés sont ce qu'il y a de plus constant dans un chronomètre, surtout avec des huiles de un an à dix-huit mois.

— Il va de soi que si on a plusieurs chronomètres, on choi-

sira encore l'un d'eux pour *Étalon*, comme il est dit au n° 137.

C'est pour ce chronomètre qu'on fera alors toutes les observations; et c'est par comparaison avec lui qu'on obtiendra les marches des autres montres. *Vice versâ*, à la mer, on s'aidera (n° 155) de ces dernières marches pour corroborer celle de l'étalon et l'état absolu qu'on en déduit.

— Si on vient à prendre le large inopinément, et qu'on n'ait, outre un état absolu et une marche de départ, que des données très-incomplètes, on pourra, suivant les circonstances, tirer tant bien que mal parti de ces données, en se reportant aux remarques suivantes :

On doit d'abord se rappeler que la plupart des chronomètres retardent aux températures extrêmes, et ont une marche maximum entre 10° et 20°. On aura de la sorte une base sur laquelle il y aura moyen de se guider pour la première traversée.

Si on part de France en été, que le chronomètre ait une température de réglage (n° 97) et qu'elle soit assez basse, on appliquera sans inconvénient, pour commencer, la règle des variations de marche proportionnelles aux changements de température.

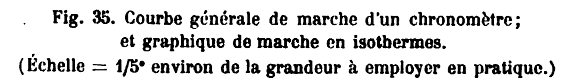
Quand on part pour les pays chauds, on peut être à peu près certain, avec les chronomètres qui ne sont pas neufs, de voir la marche retarder graduellement, jusqu'à ce qu'elle ait diminué de 2 à 3 secondes, en arrivant aux températures de 27° à 30°. Les comparaisons entre elles de toutes les montres dont on dispose, indiquera d'ailleurs si l'une d'entre elles a pris de *l'accélération*, ce qui pourra arriver (2°, n° 111) si elle est neuve et en outre de médiocre fabrication. — La plupart des navires ayant aujourd'hui deux chronomètres et un compteur, on ne sera généralement pas indécis sur le sens des variations accusées par les comparaisons.

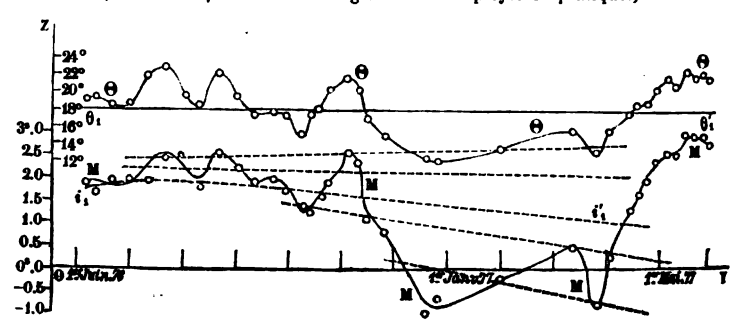
— *En résumé*, on voit que la méthode de régulation par formule pour la navigation courante, est une méthode de tâtonnements, ou plutôt d'approximations successives. Il serait difficile de tracer des règles générales, surtout pour la manière de se procurer des données.

Nous pensons même qu'il vaudra beaucoup mieux que chaque officier se fasse un système à lui, dont il sera parfaitement maître, et qu'il modifiera pour l'adapter aux nombreux cas particuliers qui peuvent se présenter. C'est à leur expérience personnelle que les navigateurs doivent demander les meilleurs renseignements. Il faut que chaque montre soit étudiée à fond par celui qui est appelé à s'en servir.

N° 142. Courbe générale de marche d'un chronomètre; tracé de cette courbe. Des graphiques de marche en général; graphique de marche naturel. — L'usage des procédés graphiques (n° 137) pour remplacer les formules de marche remonte déjà loin; et le commandant Mouchez en a été le promoteur. Ces procédés ont été, dans ces dernières années, améliorés d'une manière rationnelle par diverses personnes, notamment par MM. de Magnac, Rouyaux et Caspari, auquel on doit en particulier la considération des petits ronds d'*erreur probable*. — La méthode ainsi perfectionnée peut se résumer comme il suit, pour tracer ce que nous appellerons désormais *la courbe générale de marche d'un chronomètre*, c'est-à-dire la courbe des marches en fonction du temps, déterminée le plus exactement possible.

1° Sur une feuille de papier quadrillé ou mieux de papier millimétrique, tirer deux axes rectangulaires OY et OZ, *fig.* 35; et construire d'abord, par rapport à ces axes, la courbe des températures en fonction du temps, courbe dont la connaissance est nécessaire, comme nous le verrons plus loin, au tracé *définitif* de la courbe générale de marche. Pour ladite construction, porter sur l'axe OY les époques, et cela à une échelle d'une grandeur telle que la période de cinq jours, qui représente (n° 137) l'écart minimum de deux observations consécutives, soit facilement appréciable. On peut prendre de 2 à 5^{mm} pour chaque *unité* de 5 jours, suivant les circonstances. — Porter de même les températures, en choisissant une échelle telle (5^{mm} par degré) que les 0°,2 soient également faciles à apprécier; les compter d'ailleurs à partir d'un axe auxiliaire $\theta_1\theta'_1$ correspondant à peu près à la moyenne des diverses températures


Fig. 35. Courbe générale de marche d'un chronomètre; et graphique de marche en isothermes.
(Échelle = 1/5e environ de la grandeur à employer en pratique.)



observées, et mené assez loin de l'axe OY pour prévenir tout enchevêtrement avec la courbe ci-après.

2° S'occuper maintenant de la courbe cherchée des marches en fonction du temps. A cet effet conserver les divisions de l'axe OY; et porter sur l'axe OZ des longueurs proportionnelles aux marches observées, en prenant une échelle qui permette d'apprécier aisément $0^s,05$, soit en prenant 20^{mm} par *seconde;* puis marquer tous les points correspondant à chaque nouveau groupe de coordonnées, marche et époque. Entourer alors chaque point d'un petit rond de rayon égal à *l'erreur probable* afférente à la marche considérée, et calculée comme il a été dit au n° 138. On aura ainsi la limite extrême des déviations qu'il est loisible de faire subir à la courbe qui nous occupe, sans abuser de la faculté que l'on a de tourmenter plus ou moins les résultats obtenus. — Au surplus, dessiner provisoirement et au crayon ladite courbe, en menant un trait continu, coupant, ou au moins tangentant tous les petits ronds d'erreur probable, tout en ayant la forme la plus régulière possible.

3° Étudier la loi générale que suit la courbe ainsi obtenue par rapport à celle des températures. La courbe des marches doit suivre les inflexions de la courbe des températures, c'est-à-dire avoir avec elle un certain parallélisme, ou au contraire lui être antiparallèle, suivant que les variations des températures et des marches sont de même signe ou de signes contraires, le parallélisme ou l'antiparallélisme étant d'ailleurs d'autant plus marqué que les constantes de température sont plus élevées. — Toutefois cette règle est expressément soumise à la restriction formulée au n° 150, et qui n'avait pas été signalée jusqu'ici.

4° Reconnaître ainsi les fortes anomalies provenant soit de perturbations tout à fait temporaires, soit d'erreurs extraordinaires d'observation; et effacer les points et par suite les petits ronds correspondant à ces anomalies.

5° Tracer alors par les petits ronds conservés, au crayon d'abord, à l'encre ensuite, la courbe MMM... de la même manière qu'en 2°.

— Il importe de remarquer que l'ensemble des deux courbes dont nous venons d'exposer la construction, représente en définitive la loi générale de la marche du chronomètre considéré, en fonction de la température et du temps, sans qu'on ait à se préoccuper, comme avec les formules de marche, du développement analytique de cette loi, et du nombre de termes jusqu'où il convient d'aller dans ce

développement. Il faut joindre à cet avantage le fait que l'emploi sus-mentionné des ***petits ronds d'erreur probable***, donne ici aux résultats un degré de rigueur analogue à celui qu'on obtient numériquement par la méthode d'interpolation de Cauchy (n° 134). Il n'y a à reprocher au procédé qui nous occupe, que les erreurs provenant de l'évaluation numérique des longueurs représentant les marches. Sans cela, il est manifeste que ce procédé l'emporterait sur tout autre pour la représentation de la loi générale précitée.

— L'ensemble des courbes qui figure ladite loi s'appelle un ***graphique de marche***. Il en existe d'autres que celui dont nous venons de nous occuper, et qui est à proprement parler le ***graphique de marche naturel***. Les autres graphiques de marche dont il s'agit se désignent sous le nom de ***graphiques*** en ***isothermes*** et en ***isotemps***. Nous traiterons à fond ce qui les concerne aux n°s 144, 149 et 150.

Une fois un graphique de marche établi avec toutes les données que l'on peut se procurer, il reste à l'***extrapoler*** (n° 105) pour en déduire les marches à la mer. C'est un problème délicat, qui se trouve résolu avec soin dans les numéros que nous venons de citer. Nous devons nous hâter d'ajouter que la solution concernant le ***graphique naturel*** ne peut jamais être qu'un à peu près, et que dès lors ce n'est que tout à fait exceptionnellement qu'on est conduit à avoir recours à ce graphique. Heureusement que pour les autres graphiques l'***extrapolation*** peut donner toute la rigueur désirable.

En tout état de cause, comme avec le choix d'échelles suffisamment grandes pour les diverses sortes d'éléments à considérer, les erreurs des tracés précités sont susceptibles d'être réduites à très-peu de chose, il convient de conclure que ***l'usage des graphiques de marche***, en général, ***doit être exclusivement recommandé comme mode de régulation des chronomètres pour la navigation courante***, quand d'ailleurs on dispose, pour leur établissement, d'observations suffisamment espacées comme temps, et suffisamment variées comme changement de température. — Lorsque ces conditions sont imparfaitement satisfaites, le procédé graphique ne perd pas pour cela ses avantages pratiques sur les formules de marche : on se trouve, avec l'un et l'autre système, réduit à tirer le meilleur parti du peu d'éléments dont on dispose ; et chaque système garde ses propriétés. Le plus souvent, c'est la première des conditions voulues qui n'est pas remplie ; et la seconde l'est suffisamment. On devra alors,

pour le graphique des chronomètres, avoir recours (n° 150) à la courbe des isotemps, dont nous donnons plus loin les propriétés (n° 147), et qui est appelée à jouer désormais un rôle de premier ordre dans la régulation des chronomètres.

N° 143. Interprétation analytique du graphique de marche naturel. — Ce graphique offre une interprétation analytique toute rationnelle. Reportons-nous, en effet, à l'équation générale des marches (I_6 *bis*) du n° 140, écrite comme il a été dit au n° 132 :

$$(I_6) \qquad z = a + b \times x + c \times x^2 + d \times y + e \times xy + f \times y^2 + ...$$

Cette équation représente une surface dont on ne connaît en définitive que la courbe SSS....., *fig.* 36, laquelle correspond, abstraction faite des erreurs probables d'observation, aux divers groupes de points ayant leurs coordonnées, telles que Ll', Ol' et $l'l$, déduites des observations, et fournies par les relations de l'espèce : $z = m$, $x = (\theta - \theta_1)$, $y = (t - t_1)$. — La projection *horizontale* ΘΘΘ...., de cette courbe, n'est évidemment autre que la courbe des températures, comptées à partir de la température moyenne θ_1, qui entre dans l'expression générale des x. Dès lors, cette projection et la courbe de même nom ΘΘΘ...., de la *fig.* 35, se confondent, pourvu que l'on ait fait faire un demi-tour à l'une ou l'autre d'entre elles autour de l'axe de la température moyenne $\theta_1\theta'_1$.

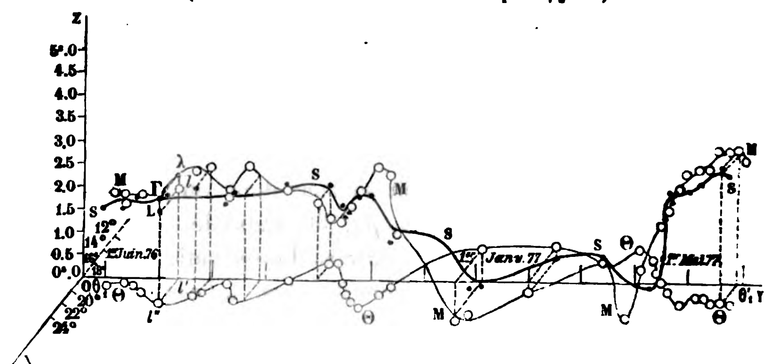
De son côté, la projection *verticale* MMM...., *fig.* 36, de la courbe SSS...., se confond aussi avec la courbe de même nom de la *fig.* 35.

Nous n'avons émis, dans ce qui précède, aucune supposition pour le nombre des termes du second membre de l'équation (I_6). Dans l'hypothèse habituelle, où on ne va pas au delà des termes du second ordre, cette équation représente une surface du second degré. Mais l'équation de la courbe SSS...., *fig.* 36, peut être d'un ordre quelconque, eu égard surtout au mode de variation de la température, qui est de nature à se présenter sous une forme *quelconque*.

A un autre point de vue, il y a lieu de remarquer, ainsi que nous l'avons annoncé au n° 142, que la prise en considération des *erreurs probables* d'observation dans le tracé des graphiques de marche, forme de ce tracé le pendant, ou du moins à peu près, de la détermination (n° 140) des constantes de la formule (I_6) par la méthode d'interpolation de Cauchy. — Pour établir ce fait, considérons les points mêmes, comme L, donnés par les divers groupes d'observations, et dont les coordonnées sont fournies par les relations sus-mentionnées de l'es-

pèce $z = m$, $x = (\theta - \theta_1)$, $y = (t - t_1)$, et correspondent, soit dit en passant, aux points marqués en noir sur la *fig.* 36. Les distances telles que LΓ, entre les points en question et la surface représentée

Fig. 36, relative à l'interprétation géométrique du graphique de marche naturel. (Même chronomètre et même échelle qu'en *fig.* 35.)



par l'équation (I_6) avec ses constantes calculées par la méthode précitée, ont leurs valeurs respectives au plus égales aux *erreurs probables* d'observation. Ces points jouissent évidemment aussi de la même propriété par rapport à la courbe SSS..., qui représente la série d'intersections telles que Γ, de la surface par chaque coordonnée en z, telle que l'' L prolongée s'il est nécessaire; autrement dit les distances de l'espèce LΓ sont moindres que lesdites *erreurs probables*. De son côté, la ligne MMM..., qui est la projection de SSS..., représente une courbe vis-à-vis de laquelle les projections verticales, telles que l, des points de l'espace jouissent de la même propriété que ces points eux-mêmes, comme L, vis-à-vis de SSS...; en d'autres termes, les distances de l'espèce $l\lambda$ sont pareillement au plus égales aux erreurs en question. Dès lors, ladite ligne projetée se confondra sensiblement avec la courbe de même nom MMM... de la *fig.* 35, eu égard aux conditions qu'on s'est imposées (n° 142) pour le tracé de celle-ci, ce qui démontre bien le fait que nous nous étions proposé d'établir.

— Si les coefficients de la formule (I_6) avaient été déterminés par la méthode des moindres carrés, on se trouverait, d'après le n° 133, en face de la propriété suivante : les distances telles que LΓ, *fig.* 36, dans la direction de l'axe OZ, entre les points sus-mentionnés, correspondant aux observations, et la surface représentée par la formule, auraient la somme du produit de leurs carrés par les *poids* afférents

aux diverses équations, qui serait un minimum. Il en serait de même pour les distances entre lesdits points et la *courbe* SSS... ; puis pour les distances entre les projections de ces points sur le plan ZOY et la courbe MMM... formant la projection de SSS.... Mais pour que la projection MMM... se confondît cette fois avec la courbe de même nom de la *fig.* 35, il faudrait que cette dernière courbe eût été tracée de manière à rendre minimum la somme des produits des poids des équations par les carrés des distances suivant les z, entre les points marqués d'après l'observation sur les graphiques de marche et la courbe définitive à laquelle on s'arrête. On voit tout de suite que cette condition ne répond à aucune construction pratiquement réalisable.

N° 144. Des lignes de marche dites isothermes. Graphique de marche en isothermes; son tracé et son extrapolation. — Si l'on coupe la surface représentée par la formule (I_6) rappelée au numéro précédent, et envisagée de la manière la plus générale, par des plans parallèles au plan des ZOY, on obtient une série de courbes qui correspondent évidemment aux marches de même température. Pourvu qu'elles soient continues, ces courbes peuvent en principe être quelconques. Dans le cas habituel, où l'on suppose que le second membre de ladite formule ne va pas au delà des termes du second degré, elles représentent des *paraboles*, eu égard à la forme que prend l'équation de la surface. Ces paraboles jouissent d'ailleurs de diverses propriétés dont nous parlerons au n° 145.

Les courbes en question, considérées d'une manière générale, s'appellent *lignes de marche isothermes*. Elles se projettent en véritable grandeur sur le plan ZOY. Conséquemment elles s'obtiennent en joignant par un trait continu sur la courbe MMM..., *fig.* 35, les marches afférentes à différentes époques, mais correspondant à une *même température*. C'est ainsi que $i_1 i'_1$ représente la courbe isotherme convenant à la température θ_1. — Pour tracer les points d'une pareille ligne, il suffit évidemment de mener, à travers la courbe des températures, *une horizontale* correspondant à la température considérée, et de projeter *verticalement* sur la courbe générale des marches les intersections ainsi obtenues. L'emploi de papier quadrillé facilite singulièrement cette dernière opération.

Si l'on trace plusieurs courbes isothermes, on voit qu'elles diffèrent toutes entre elles. La courbure de l'arc qui correspond à chacune d'elles est évidemment plus ou moins prononcée, suivant le rapprochement de cet arc avec le sommet de la parabole qui le représente, du

moins approximativement. La plupart du temps, les arcs à considérer ont assez peu de courbure, et peuvent être remplacés par des lignes droites auxquelles on donne le nom de *tangentes isothermes*.

Au lieu de se servir de l'intermédiaire de la ligne MMM..., pour tracer les courbes isothermes, on peut tracer celles-ci directement, à l'aide des différents points, ou mieux des différents *petits ronds d'erreurs probables* (n° 142) correspondant à des marches de même température, en ayant soin de mener ces courbes de façon qu'elles aient une forme régulière, tout en coupant ou en tangentant *lesdits ronds*. — D'autre part, pour tracer directement une tangente isotherme, il faut qu'entre les dates des marches diurnes les plus éloignées il y ait un intervalle assez grand, un mois par exemple, afin que la direction soit nettement déterminée. Quand on a trois, quatre ou un plus grand nombre de tangentes isothermes, on examine comment varie l'inclinaison de ces droites; et on en conclut facilement l'inclinaison de toutes les tangentes isothermes intermédiaires, ou peu en dehors des tangentes extrêmes. Il importe de remarquer que, d'après le n° 145, les inclinaisons des tangentes isothermes ne dépendent que tout à fait secondairement des températures correspondantes, eu égard à ce que le coefficient du terme xy de la formule générale de marches est toujours extrêmement faible, sinon nul. Ces tangentes sont donc sensiblement parallèles entre elles, du moment que leurs points de contact se trouvent sur une *même verticale*. Mais en revanche leurs écartements dépendent essentiellement des variations des températures; ils sont d'ailleurs plus ou moins que proportionnels à ces variations, suivant le signe du terme en x^2 de ladite formule.

—Les lignes isothermes, courbes ou droites, d'un chronomètre étant tracées, on a le *graphique en isothermes* de ce chronomètre. — Étant données une date et une température, il n'y aura, pour avoir la marche relative à ces deux éléments, qu'à chercher sur la ligne isotherme voulue le point correspondant à la date proposée, et à mesurer l'ordonnée de ce point sur l'échelle des marches diurnes. Ce mode d'opérer ne convient qu'à des dates comprises entre les deux époques extrêmes des diverses séries d'observations qui ont servi à tracer le graphique.

— Pour obtenir la valeur de la marche en dehors de ces limites, comme cela est nécessaire pour la navigation, il faut avoir recours à l'*extrapolation* (n° 105). Dans cet ordre d'idées, quand on veut avoir à la mer une marche diurne propre à une certaine date et à une température donnée, soit tous les 4 à 5 jours suivant l'habitude actuelle (n° 154),

on prend la dernière marche avant le départ indiquée par la courbe pour la température donnée. On prolonge la ligne isotherme correspondante, si elle est déjà tracée. Si non, on mène par le point correspondant à cette marche diurne une parallèle à la tangente isotherme la plus voisine. On peut encore, pour plus de rigueur, avoir recours aux arcs isothermes eux-mêmes qu'on prolonge à la règle pliante. L'ordonnée du point où l'une ou l'autre de ces lignes coupe l'ordonnée de la date considérée, représente la marche diurne cherchée, à la condition que le chronomètre n'ait pas subi de perturbations anormales. — Dans le cas où les données seraient insuffisantes pour assurer aux lignes isothermes *extrapolées* des directions suffisamment exactes, on pourrait encore se procurer par *extrapolation* une courbe générale de marche, et par suite un *graphique naturel* (n° 142). A cet effet, au fur et à mesure que la courbe des températures se tracerait à la mer, on prolongerait, à main levée, la branche de rade de la courbe générale de marche, en lui conservant présentement la même *concordance* avec la courbe des températures qu'en rade, c'est-à-dire un parallélisme ou un antiparallélisme analogue à celui existant entre les deux branches de rade. — Ce moyen, *in extremis*, que nous donnons *valeat quod valeat*, est expliqué avec plus de détails au n° 150, où on trouvera en outre spécifiée une réserve expresse à laquelle il est soumis.

— Afin d'en finir avec le *graphique en isothermes* propre à un chronomètre, on doit recommander de le tenir au courant à la mer et dans les relâches.

Dans ce but, il faut d'abord avoir soin de marquer sur le graphique le point correspondant à chaque marche obtenue comme il vient d'être dit, et de joindre, au fur et à mesure, les divers points par un trait continu formant le prolongement de la courbe générale MMM..., *fig.* 35. S'il y a perturbation de marche et qu'on puisse la reconnaître (n° 159), on aura soin de tracer, concomitamment à la courbe normale dont nous venons de parler, la nouvelle courbe qui se produira, ainsi que ses propres isothermes. Enfin, on se procurera encore une nouvelle portion de courbe à l'aide des marches qu'on viendra à déterminer en vue de côtes connues ou au mouillage. — Les lignes isothermes correspondant aux nouveaux points devront, en principe, se trouver parallèles aux lignes primitives ou en former le prolongement, si, toutefois, il n'y a pas eu de perturbations; car, ainsi que nous l'avons déjà dit (n° 108), les coefficients de la tempéra-

ture et de l'âge des huiles demeurent constants pendant d'assez longues périodes. — On trouvera au n° 149 des indications plus explicites applicables aux détails que nous venons de signaler.

* **N° 145. Propriétés des lignes de marche isothermes dans le cas où la formule générale des marches est supposée ne pas dépasser le second degré.** — En principe, l'équation d'une ligne de marche isotherme est caractérisée par la distance $(\theta - \theta_1)$ au plan ZOY, *fig.* 36, de la section qui la renferme ; et elle s'obtient dès lors en faisant x constant et égal à cette distance dans la formule générale des marches :

$$(I_6) \qquad z = a + b \times x + c \times x^2 + d \times y + e \times xy + f \times y^2 + \ldots$$

Dès lors, dans l'hypothèse que les termes du second membre de cette formule ne dépassent pas le second degré, l'équation des lignes isothermes se présente évidemment sous la forme ;

$$z = a_1 + d_1 \times y + f \times y^2.$$

On déduit de cette équation les diverses propriétés suivantes, qui ont été données pour la première fois par M. Rouyaux :

Dans l'hypothèse en question, *toutes les lignes de marches isothermes sont des paraboles ayant leurs axes parallèles à l'axe des z, et par suite à l'axe des marches.* — Cette propriété permet de construire lesdites lignes dès qu'on en connaît trois points. Soient, en effet, trois points obtenus par trois marches isothermes. La direction de l'axe qui est parallèle, venons-nous de voir à l'axe des z, forme aussi, d'après une propriété bien connue des diamètres, la direction des milieux de toutes les cordes parallèles entre elles. Dès lors, pour avoir un quatrième point de la parabole, on tracera la corde joignant deux des points connus. Puis, par le milieu de cette corde, on mènera une parallèle à l'axe des z, ce qui donnera un diamètre de la parabole cherchée. Il ne restera plus alors qu'à mener par le troisième point connu une parallèle à ladite corde, et de prolonger cette parallèle d'une quantité égale à elle-même au delà du point de rencontre avec le diamètre déterminé. On obtiendra, en suivant la même voie, autant de points qu'on voudra de la courbe. La construction point par point des paraboles isothermes sera donc toujours bien simple, quand on aura à sa disposition trois marches convenant à cette parabole.

Par ailleurs, les diverses paraboles isothermes que l'on obtient en prenant différentes valeurs pour la température θ, ne sont évidem-

ment pas indépendantes entre elles. On démontre facilement les nouvelles propriétés que voici :

Si le coefficient e du terme en xy, dans la formule générale, et conséquemment ce terme lui-même sont négligeables, ainsi que cela est généralement admis aujourd'hui d'après l'expérience : 1° l'abscisse de tous les sommets des paraboles isothermes est constante, et dès lors tous ces sommets sont sur une même parallèle à l'axe des marches ; — 2° la courbure au sommet est la même pour toutes les paraboles ; — 3° deux paraboles quelconques ne peuvent se couper que pour une valeur très-grande du temps, c'est-à-dire qu'elles peuvent être regardées comme s'étendant parallèlement entre elles dans une période limitée.

Toutes ces conséquences, jointes au caractère commun et rigoureux des axes parallèles, permettront, au besoin, d'établir un graphique de marche du moment qu'on sera en possession de trois marches isothermes, et par suite de trois points d'une même parabole isotherme, et que de plus on connaîtra un certain nombre de marches afférentes chacune à une température différente, soit un certain nombre de points *uniques* de diverses paraboles isothermes.

— Nous savons (n° 112) que la formule Lieussou revient à faire e et $f = o$ dans la relation générale (I_6). En pareille supposition, l'équation des marches *isothermes* devient :

$$z = a_1 + d \times y,$$

ce qui est l'équation d'une ligne droite. Ainsi donc l'hypothèse de M. Lieussou revient à placer les marches isothermes en ligne droite, ce qui forme un cas particulier de la parabole. Toutefois, si on a affaire à un chronomètre pour lequel l'hypothèse n'est pas licite, il se trouve, en fait, qu'on a substitué à l'équation :

$$z = a_1 + d_1 \times y + f \times y^2,$$

l'équation

$$z = a_1 + d \times y.$$

Il est facile de voir que, eu égard à ce que d diffère toujours très-peu de d_1, cette dernière équation représente sensiblement la tangente au point où la parabole isotherme coupe l'axe des z. En effet, la distance entre deux points correspondants de la droite et de la parabole, comptée parallèlement à l'axe en question, vaut très-approximativement $f \times y^2$. Or quand y est un infiniment petit du premier ordre, cette distance $f \times y^2$ devient un infiniment petit du deuxième ordre, ce qui rentre dans la propriété analytique qui sert de définition à la

tangente. La formule de Lieussou, *appliquée à faux*, sera donc d'autant moins acceptable que la quantité y sera plus grande.

— La considération des paraboles isothermes permet de vérifier si la formule générale des marches, bornée aux termes du second degré, représente bien la loi des variations *normales* (n° 100) de celles-ci en fonction de la température et du temps.

Cette considération aide même d'autant mieux à une pareille vérification que, quand on a plusieurs chronomètres, on peut (n°s 109 et 148) substituer aux marches INTÉGRALES, les marches RELATIVES, c'est-à-dire les différences de marche des diverses montres comparées deux à deux; et que dès lors on est à même de continuer *à la mer* l'investigation dont il s'agit, en ayant ainsi un nombre indéfini de données pour tracer des courbes relatives.

* **N° 146. Des lignes de marche dites isomarches; et de leurs propriétés dans le cas où la formule générale des marches est supposée ne pas dépasser le second degré.** — Au lieu de couper la surface représentative de la formule générale des marches (I_6), encore mentionnée au numéro précédent par des plans parallèles au plan ZOY, *fig* 36, on peut la couper par des plans parallèles au plan XOY. Cela revient à faire z constant dans ladite formule, et donne lieu à une suite de courbes correspondant chacune à une même valeur *déterminée* de la marche, et que l'on appelle pour cela des *isomarches*.

Ces nouvelles courbes sont entièrement corrélatives des isothermes (n° 144), et jouent vis-à-vis de la courbe des températures exactement le même rôle que les isothermes vis-à-vis de la courbe générale des marches. Tout ce qui a été dit au n°s 143 et 145 est dès lors présentement applicable. Si donc on veut substituer aux isothermes les isomarches dans le graphique de marche d'un chronomètre, *fig.* 35, on mènera, à travers la courbe générale des marches, des horizontales correspondant à diverses valeurs de la marche; puis, on projettera verticalement sur la courbe des températures les intersections afférentes à chaque horizontale; et on joindra par un trait continu les projections de même horizontale ainsi obtenues.

Comme les isomarches ne donnent rien absolument de plus que les isothermes, au point de vue de l'étude du tempérament d'un chronomètre; et que pour les besoins de la pratique on n'a pas recours à leur usage, nous n'avons à les recommander d'une manière particulière à l'attention du lecteur que pour les propriétés suivantes, qui

offrent un nouveau moyen de contrôler la formule générale des marches.

— Dans l'hypothèse où cette formule peut être bornée aux termes du second degré, l'équation des isomarches s'obtient en faisant $z = constante = h$, par exemple, dans ladite formule. On trouve ainsi une relation de la forme :

$$h = a + b \times x + c \times x^2 + d \times y + e \times xy + f \times y^2.$$

Or, c'est là l'équation d'une section conique. Remarquons de plus que, dans cette équation, la valeur spéciale h que l'on a choisie pour z ne change que la valeur numérique du terme indépendant quand on passe d'une valeur de la marche à une autre valeur. En se rappelant que *la position du centre* d'une conique ne dépend pas de ce terme indépendant, et que la *similitude* n'est affectée que par les coefficients des termes du second degré, on arrive à cette conclusion, qui constitue une propriété fondamentale des isomarches relative à l'hypothèse sus-mentionnée :

Les lignes isomarches sont des coniques. Toutes les coniques ainsi obtenues pour différentes valeurs de la marche ont même centre, et de plus sont homothétiques.

Dans la supposition généralement admise de la faible valeur de e, la condition $e^2 = 4cf$ ne sera généralement pas remplie. Comme c'est là la condition pour que les coniques soient des paraboles, on devra s'attendre à ce que les isomarches soient à la fois toutes des ellipses, ou toutes des hyperboles. Ces courbes ayant même centre et des rayons vecteurs proportionnels, à cause de leur similitude, ne doivent pas se couper. — *Or ceci constitue une épreuve bien facile à faire de la validité de la formule des marches,* dont ce caractère n'est qu'une conséquence. Cette épreuve devra, du reste, pour les mêmes motifs qu'au n° 145, se tenter avec les marches RELATIVES (n° 148) plutôt qu'avec les marches INTÉGRALES.

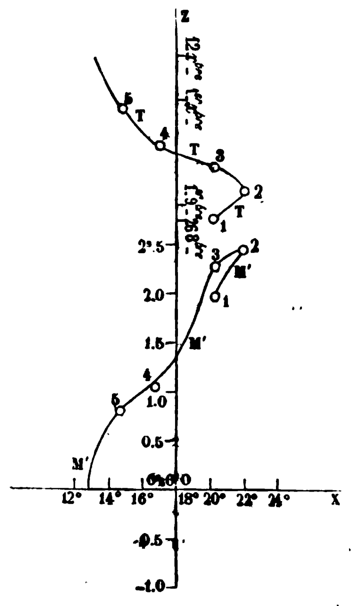
Il reste à dire qu'avec la formule Lieussou (n° 112), e et f étant égaux à zéro, les isomarches deviennent des paraboles.

N° 147. Des lignes de marche dites isotemps ; * et de leurs propriétés dans le cas où la formule générale des marches est supposée ne pas dépasser le second degré. — Nous devons encore, pour avoir fini d'envisager les diverses combinaisons possibles, couper la surface représentative de la formule générale des marches par des plans parallèles au

plan XOZ, *fig.* 36. On obtient ainsi une série de courbes qui correspondent au cas où on regarderait le temps comme constant, et qu'on appelle des *isotemps*. Ce cas est entièrement *fictif*. Néanmoins, quand on vient à faire une traversée en changeant rapidement de latitude, il arrive fréquemment qu'en 20 ou 25 jours la température éprouve de grandes variations. Or l'expérience conduit à la *remarque fondamentale* que, dans un intervalle de trois à quatre semaines environ, l'épaississement des huiles n'influence la marche que d'une manière insignifiante, même en valeur absolue, et *à fortiori* par rapport à la température, quand celle-ci a beaucoup varié durant ledit intervalle. Dans ces conditions, on pourra tirer un excellent parti de la courbe isotemps qui convient pendant la période de temps considérée aux variations subies par la température.

Pour tracer cette courbe, on se servira de deux axes rectangulaires OZ et OX, *fig.* 37. Les marches se compteront suivant l'axe des *z*, et les températures suivant l'axe des *x*. On suivra, d'ailleurs, pour ledit tracé, toutes les indications stipulées au n° 142, y compris la prise en considération des *petits ronds d'erreur probable*. On obtiendra ainsi M'M'M'... pour la *ligne isotemps* cherchée. — Il importe de remarquer que cette ligne n'est autre que la projection d'une *portion* de la courbe SSS...., *fig.* 36, sur le plan XOZ, courbe dont la génération et l'existence ont été expliquées au n° 143. Et effectivement, eu égard à la remarque fondamentale ci-dessus, les diverses sections parallèles à ce plan, menées dans la surface représentative de l'équation générale des marches, par des points de l'axe des *y* correspondant à deux époques écartées de moins de trois à quatre semaines entre elles, doivent sensiblement se confondre *deux à deux*, en projection sur le plan ZOX; et par suite les parties de ces projections interceptées entre les deux époques données, qui com-

Fig. 37. Graphique de marche d'un chronomètre avec courbe isotemps se rapportant à une courte période. (Même chronomètre et échelle double par rapport à la fig. 35.)



prennent une portion de la courbe SSS...., doivent se confondre avec la projection de cette portion.

En tout état de cause, il pourra être utile d'accoupler à la ligne *isotemps* obtenue comme il vient d'être dit, une deuxième courbe trouvée en portant les dates le long de l'axe des z, et en continuant à prendre pour abscisses les températures. Cette seconde courbe TTT.... figurera une courbe des époques ou du temps, eu égard au point de vue particulier où nous nous plaçons présentement. Mais, en fait, elle ne sera autre que la portion de la courbe ΘΘΘ.... de la *fig.* 35, comprise entre les deux mêmes stations extrêmes que ladite courbe TTT..., orientée de façon que la ligne $\theta_1\theta_1'$ se confonde avec l'axe OZ de la *fig.* 37, après d'ailleurs qu'on l'aura fait tourner de 180° autour de cette même ligne $\theta_1\theta_1'$. — Grâce à la courbe TTT...., on pourra avoir pour chaque point de la ligne isotemps la date correspondante. Il suffira pour cela de projeter verticalement le point sur TTT... ; et de reporter, à son tour, l'intersection trouvée sur l'axe des z. — Toutefois, au lieu d'avoir recours au moyen précédent, on se contente en pratique de marquer, sur la courbe *isotemps* elle-même, M'M'M'..., à côté de chaque point qui a servi à la tracer, la date ou un numéro d'ordre relatif à ce point. Les chiffres chevaucheront quand l'ordre des variations des températures ne se produira pas dans le même sens que celui des dates. C'est même à une pareille circonstance qu'est dû le crochet qu'on aperçoit en 1, 2, 3 de la *fig.* 37. Il y a là chevauchement. De plus, la courbe, en revenant sur ses pas, comme fonction de la température, s'est dédoublée par rapport à la branche déjà tracée : ceci tient à ce que l'*isotemps* dessiné sur notre figure est affecté des erreurs probables d'observation ; car, théoriquement parlant, ce point, en revenant sur ses pas, devrait décrire la même courbe que celle qu'il a tracée en s'avançant dans le sens des augmentations de température. — Les *lignes isotemps* correspondent évidemment à l'équation (I_3) citée aux n°s 111 et 141 ; et elles jouissent de toutes les facilités que présente cette équation pour la navigation courante. Par ailleurs, son emploi avec les marches RELATIVES (n° 148) est d'une extrême utilité (n° 162) pour découvrir la nature et la grandeur des perturbations qui viennent affecter simultanément plusieurs chronomètres.

On peut donc dire que les lignes dont il s'agit sont appelées à jouer un rôle important entre les mains d'un officier intelligent ; et nous ne saurions trop appeler l'attention des navigateurs sur tout ce qui les concerne.

* — L'équation des courbes isotemps se déduit de la formule générale des marches en y faisant y constant. Dans l'hypothèse où cette formule se borne aux termes du second degré, ladite équation devient évidemment :

$$z = a_2 + b_1 \times x + c \times x^2,$$

ce qui est, comme au n° 145, *l'équation d'une parabole ayant son axe parallèle à l'axe des z et par suite à l'axe des marches.*

Considérons la formule précédente pour deux époques très-éloignées. On voit que b_1 conserve sensiblement la même valeur, eu égard à ce que le coefficient du terme en xy dans la formule générale des marches est toujours très-petit, sinon nul. D'ailleurs, c ne varie pas. On conclut de là une propriété fort importante particulière aux isotemps, savoir :

Deux paraboles isotemps, même éloignées comme époque, ne diffèrent que par la position de leur sommet et de leur axe; mais elles sont identiques de forme et d'orientation. — Nous avons eu recours au n° 141 à une induction analytique correspondant à la propriété précédente, pour la rectification à faire subir, en navigation courante, à la *formule des isotemps.* Nous verrons au n° 150 comment on utilise cette même propriété pour rectifier les graphiques de marche en *isotemps.*

Les suppositions inhérentes à l'équation Lieussou (n° 112) ne changeraient, ici, rien aux résultats sus-mentionnés.

Il nous reste à remarquer qu'il y aura aussi lieu de tirer, comme au n° 145, du tracé des paraboles isotemps une nouvelle vérification de la formule générale des marches.

N° 148. Des marches relatives dans l'emploi concomitant de plusieurs chronomètres. Avantages notables de la considération de ces marches. — Jusqu'ici nous ne nous sommes occupés que du cas d'un seul chronomètre ; et tous les tracés effectués ou indiqués, aussi bien que les formules de marche, concernaient sa marche INTÉGRALE, c'est-à-dire sa marche considérée dans sa grandeur complète. Mais quand on a à conduire de front plusieurs chronomètres, il y a tout avantage à ne considérer les marches INTÉGRALES que pour le chronomètre *Étalon*, et à prendre, au contraire, pour toutes les autres montres, leurs marches RELATIVES par rapport à cet étalon. — L'emploi des marches RELATIVES remonte à une époque assez éloignée, et est due à M. Mouchez. Leur inscription sur le journal des chronomètres a été depuis rendue réglementaire. Mais jusqu'à présent on s'était surtout servi des marches RELATIVES comme d'un intermédiaire pour passer de la marche IN-

TÉGRALE d'un chronomètre à la marche INTÉGRALE d'un second chronomètre, et comme d'un moyen de contrôle qui s'exerçait du regard. M. Rouyaux, en substituant les marches RELATIVES aux marches INTÉGRALES pour tous les chronomètres autres que l'*Étalon*, a abordé le problème par un côté nouveau, qui donne aux marches RELATIVES un rôle particulier et capital mis en évidence dans la suite du présent numéro.

En tout état de cause, l'établissement d'une formule concernant les marches RELATIVES, ainsi que le tracé des courbes afférentes à de pareilles marches, est identiquement le même que pour les marches INTÉGRALES. Il n'y a donc qu'à s'occuper de la manière d'obtenir les premières de ces marches, et de les relier aux secondes. Pour opérer avec méthode, on désigne par A l'étalon, et par B, C,..., les autres chronomètres. On nomme aussi par ces lettres les heures qu'on lit sur ceux-ci, en se servant d'ailleurs d'accents pour distinguer les différentes heures lues à un même chronomètre. Puis, on convient de représenter par :

m_A, m_B, m_C les marches INTÉGRALES *normales*, c'est-à-dire extraites des formules ou des graphiques de marche;
$m_{B,A}$, $m_{C,A}$ les marches INTÉGRALES de B, C..., *déduites* de la marche de l'étalon A;
$m_{A,B}$, $m_{A,C}$ les marches INTÉGRALES de l'étalon A *déduites* des marches de B et de C....

Avec ces conventions, les marches RELATIVES de B et de C, correspondant aux marches INTÉGRALES sus-mentionnées, seront $(m_B - m_A)_d$ et $(m_C - m_A)_d$: l'indice d servant à rappeler que les quantités se *déduisent* de comparaisons comme il est expliqué plus bas. — On a alors pour chaque montre B, C, deux relations générales de la forme suivante, dont nous aurons à faire ultérieurement un usage fréquent :

$$\text{(IV)} \qquad m_{B,A} = m_A + (m_B - m_A)_d.$$
$$\text{(V)} \qquad m_{A,B} = m_B - (m_B - m_A)_d.$$

La marche RELATIVE $(m_B - m_A)_d$ se déduit des comparaisons faites par intervalle convenu de n jours, à la même heure (ou à très-peu près seulement, à cause de la petitesse des marches). Elle n'est autre que le quotient par n de la différence $(B' - A') - (B - A)$ entre la dernière et la première comparaison, pourvu que, dans chaque comparaison, ce soit l'heure de l'étalon A qu'on retranche de l'heure du chronomètre comparé. Il demeure d'ailleurs expressément entendu que dans l'intervalle des comparaisons les températures moyennes diurnes ne doivent pas s'écarter de plus de 2° à 3°; et que toutes les marches considérées doivent être re-

gardées comme correspondant à la moyenne de ces températures.

L'intervalle n, dont nous venons de parler, est en général de 4 à 5 jours (n°s 137 et 154). Néanmoins les comparaisons se prennent chaque jour à la mer, comme le montre le TABLEAU de la fin du n° 153. Mais cela a pour but de suivre pas à pas les montres, et d'être prévenu, dès le premier instant, des perturbations qui viennent à se produire.—A propos de ces séries de comparaisons, on pourrait croire, puisqu'on les a sous la main, qu'il serait plus rigoureux, pour avoir les marches RELATIVES, de prendre la moyenne de leurs différences établies de proche en proche, au lieu de se borner au mode d'opérer précédent. Nous avons montré au n° 128, à l'occasion d'un principe général dont il a été fait justement application, en l'*exemple* IV, sur le cas qui nous occupe, que l'on arrivait, dans l'un ou l'autre mode d'opérer, exactement au même résultat, mais que l'emploi des moyennes était beaucoup plus long.

Quoi qu'il en soit, on ne doit pas, en principe, confondre chaque marche RELATIVE $(m_B - m_A)_d$ obtenue à l'aide de comparaisons, avec la différence $(m_B - m_A)$ des marches INTÉGRALES tirées respectivement des formules ou des graphiques de marche. — Ces deux quantités sont en principe *égales* entre elles, aux erreurs près d'observation (n° 156); mais il cesse d'en être ainsi quand il survient quelque perturbation à l'un au moins des chronomètres pendant l'intervalle de temps séparant les deux comparaisons. Ladite différence représente alors la marche RELATIVE *normale* (n° 105), c'est-à-dire abstraction faite des perturbations; et l'autre constitue la marche RELATIVE *déduite*. Notons en passant que ce que nous venons de dire pour l'égalité ou l'inégalité des marches RELATIVES *normales* et *déduites*, s'applique évidemment aux marches INTÉGRALES.

L'équation (IV) ci-dessus servira *en rade* à déduire de la marche de l'étalon, celles des autres chronomètres, pour déterminer leur formule ou leur graphique propre; et l'équation (V) sera, de son côté, employée *à la mer* (n° 155) pour obtenir les valeurs de la marche de l'étalon en fonction des marches des autres chronomètres tirées de leurs formules ou de leurs graphiques de marche.

— Maintenant que nous savons obtenir les marches RELATIVES, examinons, d'après M. Rouyaux, les *avantages* que présente leur usage.

1° *Diminution du temps d'étude du tempérament des chronomètres que l'on a à sa disposition.* — Le temps nécessaire pour que la

loi des variations de marche apparaisse est très-abrégé, puisque chaque jour fournit une comparaison moyennement exacte à $\pm 0^s,30$, et chaque période de trois jours, par exemple, une moyenne de marche RELATIVE exacte (n° 128) à $\pm \frac{0^s,30\sqrt{2}}{3} = \pm 0^s,14$ environ.

2° *Lacunes dans les observations supprimées.* — Cela est évident, puisque, venons-nous de dire, chaque jour fournit sa comparaison. D'ailleurs, dans le cas le plus habituel de la navigation courante, la vérification (n° 109) de la loi générale de la variation *normale* des marches est presque impossible par l'étude des marches INTÉGRALES. En effet, en admettant d'abord que l'état du ciel permette les observations, on a d'ordinaire pour chaque traversée au plus trois marches, une première au port de départ, peut-être une deuxième dans une relâche intermédiaire, si la longitude en est bien déterminée, enfin la troisième au port d'arrivée. Les comparaisons à la mer entre deux chronomètres fourniront, au contraire, une différence de marche exacte à $\pm 0^s,14$, comme nous l'avons expliqué en 1°, en prenant une moyenne de trois en trois jours. On obtiendra ainsi 8 à 9 points par traversée de 30 jours, ce qui suffit amplement pour reconnaître le degré de concordance soit analytique, soit graphique, que la courbe relative afférente à deux chronomètres donnés possède avec la parabole correspondante (n° 145), attendu que trois points seuls suffisent à la déterminer.

3° *Observations mieux distribuées.* — Les observations sont naturellement aussi bien distribuées que la campagne le permet, tant dans l'échelle des temps que dans l'échelle des températures.

4° *Talent d'observation moins nécessaire.* — Il n'est plus besoin de calculer les marches par des hauteurs; et dès lors il n'y a pas à se préoccuper d'une grande habileté d'observation, toujours lente à acquérir, et qui exige en outre une excellente vue et un bon instrument. Il suffit de savoir prendre une comparaison à $\pm 0^s,30$; et tout le monde y arrive au bout d'une ou deux semaines d'exercice.

5° *On surveille beaucoup plus facilement qu'avec toute autre combinaison plusieurs chronomètres à la fois. De plus, on obtient avec plus de précision la marche intégrale de chaque chronomètre autre que l'étalon, dans le cas où l'on voudrait la connaître;* ce qui du reste, en principe, n'est pas nécessaire, quand on adopte l'usage des marches relatives. — La première circonstance tient à ce que le contrôle de l'étalon par les autres chronomètres (n° 155) s'effectue tout natu-

rellement et avec une grande simplicité. — Le second point résulte de ce que la courbe *extrapolée* (n° 105) des marches INTÉGRALES du chronomètre étalon, qui est supposé le meilleur des instruments dont on dispose, offrira en général une exactitude bien supérieure aux courbes extrapolées des marches intégrales des autres chronomètres. Il en sera de même des courbes extrapolées des marches RELATIVES des autres chronomètres, lesquelles sont basées sur la courbe de l'étalon. Dès lors, la combinaison de ces troisièmes courbes avec la première donnera de meilleurs résultats que l'emploi *direct* des deuxièmes courbes. — Ce qui vient d'être dit s'applique évidemment aux formules de marche extrapolées.

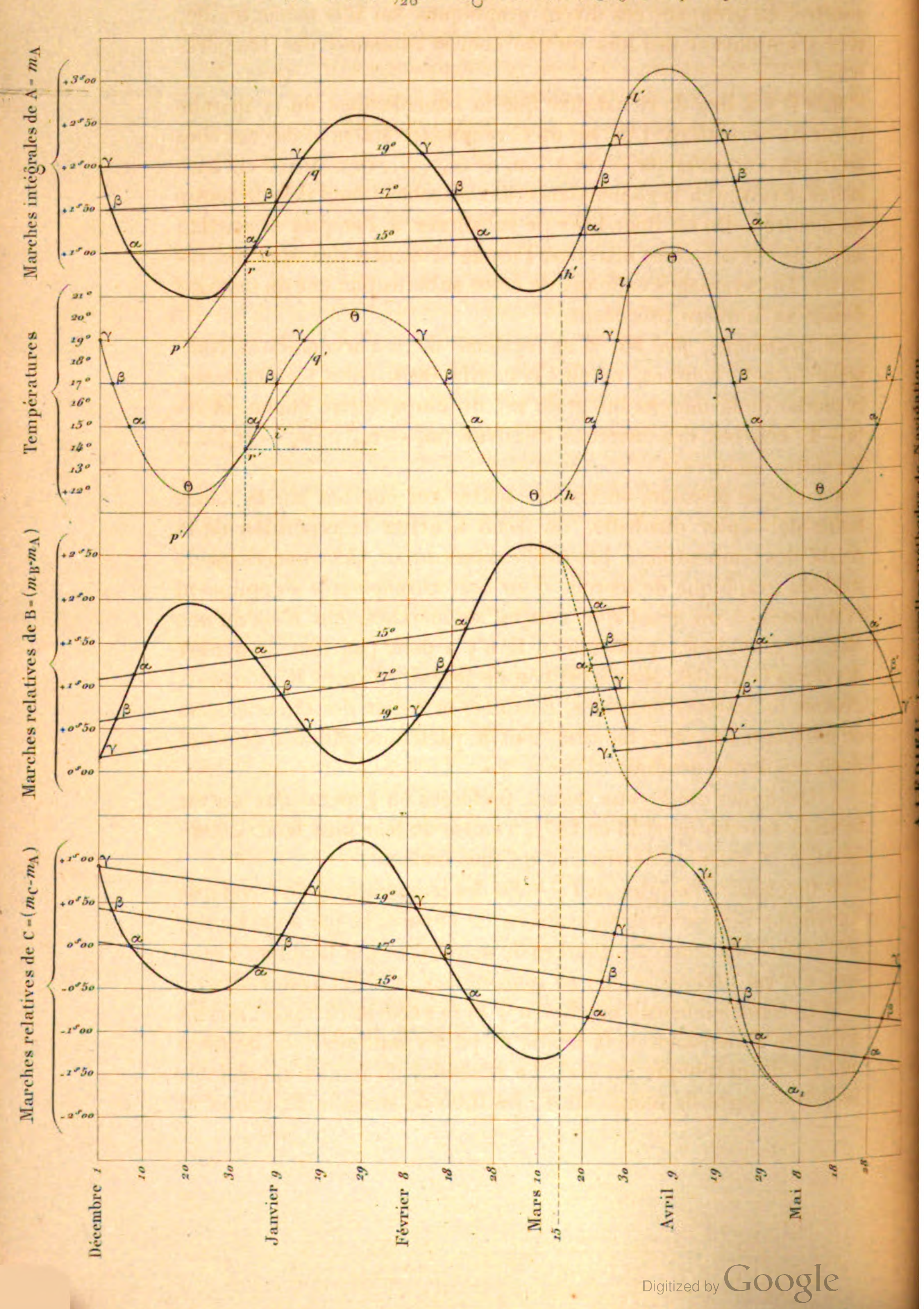
6° *Enfin les perturbations anormales apparaissent d'elles-mêmes.* — Les perturbations *à la mer* apparaîtront avec d'autant plus de netteté que la précision de l'établissement des marches relatives *en rade* ne laisse presque rien à désirer. — Si au lieu d'avoir recours aux marches RELATIVES, on se servait des différences mêmes des marches INTÉGRALES, l'incertitude de ces dernières se porterait sur leurs différences, qui deviendraient alors impropres à faire découvrir les perturbations qui ne dépassent pas 0s,6. Cela résulte du n° 156, où nous donnons l'erreur probable de la différence des marches intégrales de deux chronomètres obtenue un jour donné, en la déduisant soit des deux marches elles-mêmes, soit de la formule ou de la courbe des marches relatives. En somme, grâce à l'usage des marches relatives, les perturbations à la mer seront mieux déterminées, et laisseront rapidement voir leurs relations avec les causes qui leur donnent naissance. Au surplus, dans l'incertitude actuelle de la question, la première préoccupation doit être de chercher leur rapport avec l'allure de la machine.

En regard de tous les avantages précédents, il y a, en ce qui concerne les marches RELATIVES, une réserve qui n'en permet pas l'*usage exclusif*. C'est que le résultat pratiquement utile à obtenir est la série journalière des valeurs *normales* de la marche INTÉGRALE de l'étalon. Il faut donc considérer directement cette dernière marche. Toutefois, comme les valeurs normales de celle-ci devront être corrigées des perturbations, s'il en survient, la considération des marches relatives permettra encore de déduire ces perturbations d'une manière plus avantageuse (n° 161) que par tout autre moyen.

N° 119. Graphique de marche en isothermes pour l'emploi concomitant de plusieurs chronomètres; ma-

Fig. 38 *Graphique de marche en isoth^mes d'un système de 3 chronomètres, page 3..*

(Echelle au 13/20 de la grandeur à employer en pratique)



nière de s'en servir. — On peut ici tracer, suivant les indications du n° 142, le graphique des marches intégrales de chaque chronomètre, en groupant ces divers graphiques sur une même feuille, et en n'employant dès lors qu'une courbe *commune* des températures.

Mais il y a lieu de remarquer que la connaissance de la marche INTÉGRALE *normale* (n° 148) m_A du chronomètre étalon et des marches RELATIVES *normales* $(m_B - m_A)$, $(m_C - m_A)$, ..., des autres chronomètres, équivaut à la connaissance des marches intégrales de toutes les montres. On est donc libre de substituer à l'emploi si souvent ingrat de ces dernières marches, l'usage si fécond des marches relatives. Les avantages capitaux de cette substitution ont du reste été donnés au numéro précédent.

Le *graphique*, *fig.* 38, d'un système de n chronomètres comprend $(n+1)$ courbes, savoir : la courbe ΘΘΘ... des températures, la courbe de la marche intégrale m_A du chronomètre étalon, et les $(n-1)$ courbes des marches relatives $(m_B - m_A)$, $(m_C - m_A)$,.... des autres montres.

Autant que possible, on tracera toutes ces courbes sur la même feuille de papier quadrillé, de façon à éviter la répétition de la courbe des températures. Les explications du n° 142 concernant le tracé du graphique de marche d'un seul chronomètre s'appliquent évidemment à un graphique général de marches, qui n'est qu'une série de graphiques particuliers. Il n'y a donc pas lieu de donner des règles nouvelles. Mais il est bon de fournir, d'après M. Rouyaux, diverses indications spéciales, destinées à éviter des tâtonnements ou des longueurs, et à montrer tout le parti susceptible d'être tiré dudit graphique général.

1° Les lignes *isothermes* seront préférées en général aux autres lignes de marche (nos 146 et 147), à cause de leur plus facile détermination, et du plus de rigueur qu'elles donnent.

2° On choisira l'origine de l'échelle des températures de façon que leur courbe occupe environ le milieu de l'épure, et par suite ne soit trop écartée d'aucune des courbes de marche, ce qui facilitera l'examen, s'il est nécessaire, de *sa concordance* (n° 142) avec celles-ci.

3° La connaissance du nombre $(n+1)$ des courbes à tracer, servira à fixer les dimensions de la feuille de papier millimétrique destinée au tracé du graphique général. La nécessité de rendre appréciable les 0,2 de degré de température, les 0,05 de seconde de temps et

la *période unitaire* de 5 jours, fixera tout naturellement, comme au n° 142, d'abord l'échelle des températures à 5^{mm} par *degré*, et l'échelle des marches, aussi bien intégrales que relatives, à 20^{mm} par *seconde*. Quant à l'échelle des temps, sa grandeur dépendra de la durée probable de la campagne. Pour des durées de 3, 2 et 1 an, les longueurs 2^{mm}, 3^{mm} et 5^{mm} nous semblent bonnes pour représenter la *période unitaire* adoptée, sans donner à la feuille des dimensions incommodes.

4° On tracera les différentes courbes en *encres variées*, en se servant, par exemple, des encres noire, rouge et bleue, qui ont toutes assez de mordant. De plus, on adoptera aussi un mode de notation uniforme et simple pour faciliter les lectures. Ainsi, les lettres ααα..., βββ..., γγγ..., écrites dans la couleur de leurs courbes respectives, désigneront les mêmes isothermes aux divers chronomètres.

5° Chaque fois qu'on prendra la mer, la courbe des marches INTÉGRALES du chronomètre étalon et les courbes des marches RELATIVES des autres chronomètres, seront arrêtées à la dernière observation de rade, puisque le temps de mer ne peut fournir aucun point *direct* nouveau. Mais on prolongera les courbes par *extrapolation* (n° 144), de manière à en déduire les valeurs *normales* (n° 105) des marches INTÉGRALES ou RELATIVES ; et l'on aura soin de marquer en *trait plus léger* les nouvelles branches ainsi obtenues, afin de bien indiquer qu'en somme ce sont des courbes distinctes de celles dont elles forment les prolongements. — Quant à l'*extrapolation* dont il s'agit, la méthode qui se présente le plus naturellement serait de se servir, ainsi qu'il a déjà été indiqué au n° 144, de la courbe des températures prolongée au fur et à mesure que la traversée s'accomplit. Mais cette méthode manque trop de précision, et est soumise en outre aux restrictions développées dans le numéro suivant ; aussi ne doit-elle être tentée, comme il est expliqué dans ce même numéro, que quand on n'a pas à sa disposition assez de données pour *extrapoler* à l'aide des isothermes. L'*extrapolation par les isothermes* a été expliquée au n° 144 pour les marches intégrales ; mais elle s'applique pareillement aux marches relatives. En un mot, il suffira de réunir par un même trait continu *léger*, les points de chaque groupe d'isothermes extrapolées qui correspondent aux époques successives de la traversée, en prenant toujours pour limite de temps l'*intervalle unitaire* convenu. — Les courbes de marches RELATIVES *normales* obtenues comme il vient d'être dit, seront corroborées par la valeur de chaque marche RELATIVE *dé-*

duite correspondant audit intervalle, et tirée des comparaisons avec le chronomètre étalon. Chaque fois que la marche RELATIVE *normale* ne concordera pas (nos 158 et 159) avec la marche RELATIVE *déduite*, c'est qu'il y aura eu perturbation.

6° Si la marche INTÉGRALE de l'étalon, ou la marche RELATIVE d'un des autres chronomètres, subit un *saut* ou une *modification continue* de quelques jours, qu'on estime d'ailleurs, quand il y a moyen, suivant les indications du n° 158 ou 159, et si elle reprend ensuite une allure régulière, on comparera avec soin les nouvelles valeurs régulières de la marche avec les anciennes valeurs *normales*. On vérifiera de la sorte, abstraction faite de la période momentanée des perturbations, si la marche correspond à la même fonction de la température et du temps que précédemment, ou si elle correspond à une fonction distincte de la première, quoique également continue.—Géométriquement, cette discussion fera voir si la nouvelle branche de courbe est le prolongement de la branche ancienne, ou du moins ne s'en écarte que de différences ne dépassant pas les erreurs probables d'observation, comme on le voit en α_1 γ_1 sur la courbe des marches RELATIVES du chronomètre C. Ou bien encore, on verra de la sorte si, au contraire, ces deux branches sont distinctes. En particulier, la nouvelle branche pourra être exhaussée ou rabaissée, comme on le voit en $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1$, sur la courbe des marches RELATIVES du chronomètre B, et conserver ensuite un certain parallélisme avec le prolongement de l'ancienne. Ou bien encore, après avoir subi un déplacement vertical, elle s'infléchira progressivement vers le prolongement de l'ancienne courbe, de façon à atteindre ce prolongement, et à le continuer en se raccordant avec lui. Il est évident que, dans l'un et l'autre cas, les lignes isothermes subiront des déplacements. Mais, dans le premier cas, les nouvelles branches, telles que $\alpha'_1\alpha'\alpha'$, $\beta'_1\beta'\beta'$, $\gamma'_1\gamma'\gamma'$, sans être indépendantes des anciennes, ne conserveront plus avec celles-ci des liaisons aussi étroites que dans le cas précédent. — En résumé, on devra, à la suite d'une période de mer très-troublée, se servir des renseignements antérieurs avec un discernement qu'on peut signaler d'une façon générale seulement comme nous venons de le faire, mais que nous nous réservons de préciser dans un exemple particulier (n° 164). — Il faut enfin remarquer qu'une certaine fréquence de perturbations finirait par décomposer chaque courbe de marche du graphique général en tronçons à peu près indépendants, ce qui en rendrait l'usage presque illusoire. Heureusement que l'expérience

acquise par les navigateurs les plus distingués montre que cette fréquence est peu à redouter. Toutefois, en en admettant la possibilité, nous indiquerons au n° 150 la manière, en pareil cas, de tirer parti des lignes *isotemps* (n° 147).

N° 150. Graphique de marche naturel extrapolé d'après la courbe des températures, et graphique de marche en isotemps, à employer quand on ne dispose au départ que d'un petit nombre de données sûres. — L'usage du graphique général précédent pour la fixation des valeurs *normales* des marches INTÉGRALES ou RELATIVES au moyen des *isothermes*, donne une grande précision; parce que ces lignes gardent une forme régulière très-remarquable en l'absence de perturbations, et qu'elles sont plus rigoureuses que les *isotemps*. Mais elles ont l'inconvénient de ne faire concourir à la détermination d'un point de mer que les points antérieurs de *même température;* ce qui oblige à remonter assez loin en arrière dans l'échelle des temps, pour trouver un nombre suffisant de données.

Avec de bons chronomètres et une campagne ordinaire, les sauts étant très-rares, cette manière d'opérer est excellente, parce qu'elle tient compte de tous les renseignements précédemment obtenus. Mais, dans le cas où la sensibilité des chronomètres vis-à-vis des forces anormales de la mer, le service actif du bâtiment ou telle autre circonstance, déterminent de trop fréquentes perturbations, nous venons de voir au numéro précédent que celles-ci rompent, en quelque sorte, les liens qui rattachent entre elles les différentes branches du graphique général, et rendent par suite les points anciennement obtenus impropres à déterminer les points actuels. Ce cas se présente encore au début de toute campagne, lorsqu'on n'a derrière soi, comme cela arrive fréquemment, qu'une période d'observations trop courte et des renseignements du Dépôt trop incomplets, pour fournir un nombre suffisant de points isothermes. Il y a donc lieu de chercher *une méthode graphique destinée à suivre et à corriger les marches des chronomètres, quand, pour une raison ou une autre, on ne dispose que d'un petit nombre de données sûres.* Voici la méthode proposée à cet effet par M. Rouyaux.

Les données certaines dont on dispose seront employées à la construction des courbes de la température, de la marche m_A et des marches RELATIVES *normales* $(m_B - m_A)$, etc... Elles fourniront ainsi un graphique de marche naturel, qui ne différera de celui que nous

avons considéré dans le cas général que par l'absence des isothermes. Ce graphique pourra servir à l'extrapolation des courbes générales de marche pendant la première traversée, en utilisant, comme nous en avons déjà parlé aux nos 144 et 149, la *concordance*, c'est-à-dire le *parallélisme* ou l'*antiparallélisme approximatif*, qui existe d'ordinaire entre la courbe des températures et chaque courbe générale de marche (INTÉGRALE ou RELATIVE), autant toutefois que cette concordance sera assez manifeste. En pareil cas, le tracé de chaque branche pour les marches s'effectuera à main levée, en maintenant la même corrélation de direction que sur le graphique de rade, entre ladite branche et la branche de mer des températures, prolongée au fur et à mesure que la traversée s'accomplit.

Toutefois, afin de ne pas induire en erreur, le procédé qui nous occupe doit être soumis à certaines restrictions. En effet, la *concordance* entre la courbe ΘΘΘ, *fig.* 38, des températures et une des courbes générales de marche, celle du chronomètre A, par exemple, consiste dans la relation qui existe entre les inclinaisons i et i' des tangentes pq et $p'q'$ en deux points correspondants r et r' de ces deux courbes ; c'est-à-dire que les deux tangentes, sans être rigoureusement parallèles ou antiparallèles, doivent être dirigées de telle sorte que le rapport $\frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} i'}$ ait une certaine constance, tout en conservant expressément le même signe. Or la marche z, donnée par la formule générale de marche (I_6) du n° 143, est à la fois une fonction explicite et implicite de la variation y du temps ; car la variation x de la température est elle-même une fonction de y (n° 115). De plus nous savons que, pratiquement, ladite formule n'a besoin d'être prise que jusqu'aux termes du second degré, c'est-à-dire qu'on a :

$$z = a + b \times x + c \times x^2 + d \times y + e \times xy + f \times y^2.$$

Dès lors nous aurons :

$$\frac{dz}{dy} = (d + ex + 2fy) + (b + 2cx + ey)\frac{dx}{dy}$$

soit :

$$\operatorname{tg} i = (d + ex + 2fy) + (b + 2cx + ey) \operatorname{tg} i'.$$

On voit ainsi que, eu égard à la petitesse habituelle du premier terme du second membre, il y aura concordance entre certaines limites de la température. Mais cette concordance ne conviendra plus à des tempé-

ratures en dehors de ces limites. Et même, pour les cas où la formule de M. Lieussou (n° 112) serait applicable, et où on la soumettrait aux différentiations ci-dessus, le rapport des deux tangentes changerait de sens quand la température passerait par la température de réglage, qui, quand elle existe, se trouve d'habitude comprise entre 15° et 20°.

Les considérations précédentes imposent les restrictions suivantes au procédé qui nous occupe :

Au début d'une campagne, il *ne faudra compter* sur le maintien de la *concordance* reconnue *en rade*, entre les courbes de température et de marche, que pour des variations de température peu étendues, surtout lorsque ces changements ont pour effet de rapprocher de la température de réglage, si elle existe. — En revanche, si on a des observations antérieures aux dernières données de rade, pas trop anciennes néanmoins, et dont on ne peut employer les isothermes par suite de perturbations trop fréquentes survenues depuis ces observations, les courbes de température et de marche seront à même de servir à l'extrapolation actuelle. Il suffira à cet effet que des branches de ces courbes conviennent à une suite de températures partant *de la même température initiale*, ou à peu près, que la suite des températures de la traversée, en allant d'ailleurs dans le même sens que celles-ci, ou en sens inverse. Car alors, en vertu de la dernière relation ci-dessus, on est en droit de compter sur la reproduction d'une *concordance* de même direction, ou de direction antiparallèle.

En résumé, l'emploi de la *concordance* des courbes de température et de marche demande *beaucoup de circonspection;* et il n'offre ni assez de sûreté ni assez de généralité, pour constituer une méthode courante d'extrapolation, même dans le cas particulier où nous nous sommes placé.

— Heureusement que, pour ledit cas, il existe un deuxième moyen généralement plus précis d'obtenir les mêmes renseignements. Nous avons vu (n° 111) que pendant une période limitée, on pouvait négliger l'influence du temps, et (n° 147) que, dans l'hypothèse de la validité de la formule générale de la marche arrêtée aux termes du second degré, la courbe d'une marche (INTÉGRALE OU RELATIVE) par rapport à la température seule, était une branche de parabole à très faible courbure, que nous avons appelée *isotemps*. Dès lors, avec les dernières données de rade, pourvu que la température ne soit pas restée *trop stationnaire* pendant la période qui a fourni ces données,

on pourra construire les isotemps de la marche *intégrale* m_A et des marches *relatives* $(m_B - m_A)$, $(m_C - m_A)$... Les différents points obtenus devront être sensiblement placés, et le seront, en effet, d'après diverses épreuves tentées à cet effet, soit sur une branche de parabole à faible courbure, soit sensiblement en ligne droite, aux *erreurs probables* près d'observation. Il sera bon d'ailleurs d'inscrire, comme il a été indiqué au n° 147, à côté de chaque point déterminatif de la courbe, la date ou un numéro de repère, de façon à fixer l'ordre de succession de ces points par rapport au temps, ordre qui peut différer de celui des températures. Au besoin, on pourra indiquer par un léger trait ponctué et des flèches, cet ordre de succession.

Les valeurs déduites obtenues pour les marches RELATIVES à la mer, étant placées sur l'épure d'après leur grandeur et leur température, devront, aux *erreurs probables* près d'observation, se trouver sur le prolongement de la parabole isotemps, s'il n'y a pas eu de perturbations. Dans le cas contraire, leurs écarts, mesurés à l'échelle des secondes, fourniront les valeurs numériques des perturbations de ces marches relatives. On en déduira, quand il y aura moyen, la perturbation la plus probable de la marche du chronomètre étalon, comme il est indiqué aux n°s 158 et 159, et par suite la marche corrigée de ce chronomètre, en combinant la valeur *normale* de la marche avec sa perturbation. Ainsi donc, la construction des isotemps des marches INTÉGRALES de l'étalon et des marches RELATIVES des autres chronomètres, au moyen seulement de *quelques données* de rade, donne par son extrapolation le moyen de découvrir les perturbations, et fournit les indications voulues pour corriger les marches.

— Il semble au premier abord que si la température est restée à peu près *invariable* pendant les périodes de rade où on peut observer quelques bonnes marches, la construction des isotemps devient *impossible*. Néanmoins la méthode n'est pas en défaut; car la propriété importante des isotemps signalée au n° 147 va nous permettre de combler cette lacune.

Et effectivement, en vertu de ladite propriété, il suffit, pour avoir le graphique des isotemps toujours parfaitement au courant, de déterminer à chaque relâche une bonne marche et la température correspondante, et de transporter l'isotemps *antérieur* parallèlement à lui-même suivant l'axe des z, de façon à le faire passer par le point correspondant à la nouvelle marche observée.

De même, dans le cas de perturbations ayant délié complétement le graphique général d'*isothermes*, il suffira, en se reportant à la période antérieure aux perturbations, de retrouver assez de données pour construire l'*isotemps* qui convenait en ce moment au chronomètre. Il n'y aura plus alors, comme plus haut, qu'à transporter cet isotemps parallèlement à lui-même, de façon qu'il passe par le point unique, ou les quelques points sûrs, qu'on a été à même de se procurer depuis les perturbations considérées.

* **Nº 151. Des graphiques d'état absolu pour l'emploi concomitant de plusieurs chronomètres.** — Nous signalerons encore, afin de ne rien omettre sur la *régulation des montres*, le procédé proposé par M. Bonifay, pour l'usage concomitant de plusieurs chronomètres, en substituant aux courbes des marches celles des états absolus.

Il faut, dans cette méthode, commencer par tracer les courbes extrapolées des états absolus *isothermes*, correspondant à divers degrés de température. Mais cette extrapolation ne peut s'effectuer que par le *calcul* anticipé de points successifs; car les lignes isothermes d'état absolu ne se rapprochent pas suffisamment d'une ligne droite pour être déterminées graphiquement, comme les isothermes de marche (nº 145). Le temps se compte d'ailleurs sur l'axe des y, de même qu'en *fig.* 35; et on porte parallèlement à l'axe des z, non pas chaque état absolu isotherme lui-même, mais sa différence avec sa valeur au jour pris comme point de départ.

On choisit encore présentement un des chronomètres pour *Étalon*; et chaque jour à l'aide d'une simple comparaison, étant tenu compte d'ailleurs de la température, on tire de la courbe propre des autres chronomètres, un état *déduit* se rapportant à l'étalon. Ces états *déduits* doivent coïncider entre eux aux *erreurs probables* près d'observation, et avec l'état absolu *normal* de l'étalon, s'il n'est survenu de perturbations à aucune des montres. Au surplus, en joignant par un trait continu les états absolus *déduits* afférents à un même chronomètre, on obtient une courbe qui, comparée à la courbe de l'état absolu *normal* de l'étalon, montre les écarts survenus entre les deux montres, et permet de les étudier.

Sauf dans le cas de *saut* d'état absolu (nº 157), le procédé de M. Bonifay, pour l'usage concomitant de plusieurs chronomètres, est de beaucoup moins commode et moins fécond que le système par les marches : et nous ne nous y arrêterons pas davantage.

N° 157. Prescriptions diverses relatives à l'installation des chronomètres à bord et à certaines dispositions de détail. — Il importe de compléter tout ce qui a trait à la régulation des chronomètres, par l'énoncé de diverses prescriptions relatives à leur installation à bord, et à certaines dispositions de détail bonnes à signaler. Ce qui suit a été extrait en partie d'un excellent mémoire de M. Givry, et mis au courant des nécessités du jour, d'après les instructions insérées au commencement du *journal chronométrique* du bord (n° 153).

1° On choisira le local destiné aux montres marines vers le centre du navire et en un des nœuds de la vibration (n° 163) due au propulseur, s'il y en a, afin de les garantir le plus possible des mouvements de roulis et de tangage ainsi que des trépidations de l'hélice. On évitera par ailleurs le voisinage des grandes masses de fer, qui peuvent exercer (n° 101) une action magnétique sur plusieurs pièces de leur mécanisme.

2° Les montres ont chacune aujourd'hui une seconde boîte garnie de coussins, et renfermant la boîte dans laquelle elles sont suspendues à la Cardan, et qui du reste porte d'habitude le nom du constructeur et le numéro de fabrication. Elles seront alors transportées à bord dans leurs doubles boîtes avec précaution, sans choc ni secousse ; de plus la suspension sera stoppée ; et si elles ont été mises en mouvement et réglées avant l'embarquement, on prendra garde surtout de leur imprimer des oscillations circulaires dirigées dans le sens alternatif du balancier.

3° Une fois les montres à bord, on les installera sur des corps mous et secs, de manière qu'elles ne soient en contact immédiat ni avec les cloisons du navire, ni avec des meubles fixes, qui sont susceptibles de propager trop vivement les secousses que le choc continu des lames ou les décharges de l'artillerie font éprouver aux murailles du bâtiment. On peut les ranger, par exemple, dans une caisse contenant de l'étoupe, de la laine, du coton ou de la sciure de bois bien sèche, en les plaçant à deux ou trois décimètres les unes des autres. On a proposé, dans ces derniers temps, de faire reposer chaque chronomètre sur deux bandes de caoutchouc tendues horizontalement en croix. Mais l'instrument se trouve alors dans un état continuel de vibration, qui nous semble de nature à condamner le système. — Par malheur, la prescription fondamentale dont nous venons de parler n'est généralement pas suivie. D'ordinaire les montres sont placées dans des conditions défavorables à bord des bâtiments. Le choix de leur emplacement est presque toujours laissé au commandant ou à l'officier

qui en est chargé, et cela pendant l'armement; c'est-à-dire quand déjà les endroits favorables du navire sont occupés par d'autres parties du matériel. C'est souvent sous un panneau que se trouve le coffre renfermant les montres; de plus ce coffre est presque toujours sur l'arrière, là où les mouvements de tangage et les trépidations de l'hélice, dont l'action est particulièrement redoutable pour les chronomètres, sont le plus sensibles. On devrait aussi éviter le voisinage des grandes masses de fer, telles que chaînes d'ancre, puits à obus, etc. — Au surplus, au lieu de placer les montres sur un billot muni d'un encastrement et faisant corps avec le bâtiment, il serait préférable d'avoir recours au mode d'installation suivant, qui semble réunir beaucoup d'avantages : adopter une caisse carrée matelassée de crin à l'intérieur, et suspendue, à l'aide de lanières en caoutchouc vulcanisé, dans une autre caisse fixée à un bloc; remplir d'ailleurs les vides entre chaque montre et la première caisse par du bon crin, de préférence à toute autre substance plus hygrométrique. Cependant la suspension en caoutchouc soulève là des objections analogues à celles faites ci-dessus. Le mieux paraîtrait être alors de tenir les chronomètres dans une caisse suspendue à la Cardan, et dont le fond serait très-lourd. L'ensemble des montres serait ainsi à l'abri des grands mouvements du navire, puisque déjà elles sont suspendues dans leur boîte; cette suspension supplémentaire assurerait davantage l'indépendance et par suite la régularité de leurs mouvements. — En tout état de cause, le chronomètre étalon est placé au milieu des autres instruments, pour faciliter ses comparaisons avec chacun d'eux. De plus, toutes les montres doivent être orientées parallèlement entre elles, avec les lignes XII^h-VI^h des cadrans dirigées dans le sens de la quille. — Une fois en place, les montres sont rendues libres dans leurs suspensions. Mais, par ailleurs, sauf le compteur, elles ne doivent plus être déplacées qu'à leur débarquement définitif.

4° Si le temps et les circonstances le permettent, on ne réglera les chronomètres qu'après les avoir installés à bord; et, d'après la fin du n° 103, on commencera les opérations quelques jours seulement après leur mise en place. On pourra employer à cet effet, soit des observations astronomiques effectuées à bord même, soit des signaux convenus faits d'un observatoire en vue, à des heures précises, comme la chute d'une boule à midi moyen, ou, la nuit, une inflammation de poudre, une décharge électrique; soit enfin, le plus habituellement (n° 137), des observations ou des comparaisons qu'on ira faire à terre.

Dans ce dernier cas, on se servira toujours d'une montre de comparaison; et en principe on ne déplacera jamais les chronomètres, à moins qu'on ne se trouve dans l'impossibilité d'agir autrement.

5° On doit remonter les chronomètres toutes les 24 heures environ, en prenant toutes les précautions possibles. Afin de ne pas oublier une opération aussi indispensable, on peut s'astreindre, par exemple, à ne prendre tel repas chaque jour qu'après avoir effectué le remontage. D'ordinaire, c'est avant le déjeuner, vers neuf heures du matin, que cette opération s'effectue. Elle doit l'être par la même personne et de plus dans l'ordre où les montres sont placées, et cela sans *chevaucher*, de façon que l'habitude devienne *routinière*, et soit une sauvegarde contre toute inadvertance. On a soin, en outre, pendant le remontage, de tenir l'instrument d'une main ferme, de compter le nombre de tours de clef à chaque opération, et de manœuvrer la clef sans brusquerie, et surtout sans forcer sur l'*arrêt*, dont l'approche sera révélée par le nombre de tours déjà faits. Il va de soi aussi que le renversement de la montre autour de ses pivots de suspension doit s'effectuer avec le plus grand soin, et que le trou de la clef doit être refermé après le remontage. — Pour reconnaître si le remontage n'altère en rien la marche des chronomètres, voici comment M. Biot recommande de procéder : distinguons en deux par les lettres A et B; on compare d'abord A et B *avant* le remontage; puis on remonte A, et après qu'il a continué de marcher, dans son nouvel état, pendant deux ou trois minutes, on le compare à B *non remonté*. Alors on remonte B; et après qu'il a marché pendant deux ou trois minutes, on le compare à A remonté précédemment. Par ce moyen, si le remontage a opéré une modification quelconque dans l'état absolu d'une des montres considérées, ou de toutes deux, on la découvrira immédiatement. On saura de plus si elle a eu lieu pour les deux chronomètres ou pour un seul; et l'on aura sa mesure individuelle dans les deux cas.

6° Quand on possède plusieurs chronomètres, on a soin de les comparer entre eux au moment du remontage, afin d'en tirer (n°s 158 à 163) toutes les indications voulues permettant de fixer l'état absolu et la marche à adopter pour l'étalon (n° 155), et afin, en outre, de reconnaître les perturbations (n°s 158 et 159). Dans tous les cas, on lit au même moment la température de l'armoire des montres, qui, grâce à l'heure sus-mentionnée habituellement adoptée pour le moment de la lecture, représente la valeur *moyenne diurne* de cet élément.

7° Quelque perfectionnée que soit la compensation des chronomètres actuels, il est toujours utile, quand on le peut, de les maintenir à une température invariable. Cela exige qu'on les renferme dans une armoire munie d'un thermomètre. On regarde, de temps à autre, cet instrument à travers une vitre; et on conserve sa température à un degré constant, 25 degrés par exemple, en chauffant l'air intérieur au moyen d'une lampe. On modère cette température à l'aide d'une petite ouverture qui ferme à coulisse, et qui règle à volonté l'introduction de l'air extérieur. La cheminée de la lampe doit être disposée de telle sorte que la fumée ne puisse pénétrer dans le compartiment des montres. — Toutefois, ce système n'est pour ainsi dire jamais employé; car il exigerait la présence incessante d'une personne pour régler le chauffage de la lampe.

8° La perfection actuelle des chronomètres tient à la grande délicatesse de leurs organes; il importe donc au plus haut degré de les soustraire à toute cause étrangère de dérangement. Dans ce but, il faudrait, en particulier, que les constructeurs adoptassent un autre système de fermeture que celui actuellement en usage, afin de mettre le mécanisme intérieur à l'abri de toute curiosité indiscrète. Rien de plus facile, avec le système actuel, que de sortir de sa boîte en cuivre le mouvement d'un chronomètre; et malheureusement les observatoires des ports constatent que bien souvent les montres ont été maniées à bord; les platines et le cadran portent fréquemment la trace des doigts qui les ont touchées. Or, il n'en faut pas davantage pour mettre un chronomètre hors de service, et compromettre par suite la sûreté du bâtiment. — Les chronomètres de Winnerl sont fermés plus hermétiquement que ceux des autres constructeurs. Mais il y aurait mieux à faire encore; et on devrait, en principe, adopter une combinaison qui prévienne d'une manière absolue la mise à nu des chronomètres à bord des bâtiments.

9° Si, par une cause quelconque, une montre venait à s'arrêter, on la remettrait en marche (n° 104) en lui imprimant un mouvement circulaire horizontal un peu vif. En général, la montre reprendra à peu près la marche qu'elle avait avant son arrêt.

10° Il conviendrait de ne plus accepter d'autres compteurs que ceux qui battent la demi-seconde. Il n'y a pas de raison, en effet, d'avoir une subdivision de la seconde différente pour les chronomètres et pour le compteur; les comparaisons sont bien plus faciles à prendre entre deux instruments dont les battements sont de même intervalle,

et le moment du *top* pendant l'observation est moins sujet à erreur. Cette facilité se remarque principalement quand l'observateur compte lui-même pendant qu'il observe, ce qui constitue un mode d'opérer très-précis et qu'on ne saurait trop recommander.

N° 153. Service administratif des chronomètres dans la marine de l'État. Carnet pour l'étude suivie des chronomètres à bord. — Nous croyons utile de terminer l'important paragraphe dont nous venons de nous occuper, par le résumé du service administratif des chronomètres dans la marine de l'État, et par l'explication d'un CARNET pour l'étude suivie des chronomètres à bord, de façon à ne laisser ignorer aux officiers des montres rien de ce qui peut concerner leurs importantes fonctions.

1° Tout chronomètre expédié par le Dépôt de la marine dans les observatoires des ports est accompagné d'un bulletin collé dans sa boîte, donnant le numéro de l'instrument et le nom du fabricant, qu'on retrouve du reste gravé sur le cadran, l'âge des huiles, et, dans certains cas, du moins autrefois (n° 141), une formule de la marche. Le Dépôt adresse en outre, s'il y a lieu, des notes plus ou moins détaillées sur la valeur de la montre et ses services antérieurs.

2° Les officiers chargés des observatoires des ports envoient, tous les mois, au Dépôt, deux autres bulletins. L'un donne les mouvements d'entrée et de sortie des chronomètres et compteurs, avec leurs provenances et leurs destinations. L'autre donne : 1° la moyenne, en dix jours, des marches de la pendule et des montres ; 2° la moyenne, en dix jours des températures observées à 9 heures du matin dans la salle des montres.

3° Les officiers chargés des observatoires et l'ingénieur chargé de centraliser le service des chronomètres, correspondent entre eux, par l'intermédiaire du préfet maritime et du directeur général du Dépôt, pour tous les renseignements qui peuvent intéresser le service et qui seraient de nature à le perfectionner.

4° En principe, les navires évitent, autant que possible, l'envoi direct des chronomètres au Dépôt. Chaque chronomètre expédié au Dépôt est mis dans une des boîtes spéciales construites exprès pour ce service ; il est accompagné du bulletin *ad hoc* rédigé par le bâtiment qui l'a remis à l'observatoire. — L'observatoire ne délivre aucun chronomètre à un bâtiment sans y joindre sa boîte d'emballage, et sans l'accompagner d'une notice indiquant l'état absolu sur le temps moyen de Paris à un jour donné, l'âge des huiles, la marche diurne d'après les

dernières observations, et la manière générale dont le chronomètre est influencé par la température.

5° Chaque montre remise par un bâtiment à l'observatoire du port, est accompagnée d'un bulletin signé de l'officier chargé des montres et du commandant. Ce bulletin donne la série des états observés ramenés à midi moyen de Paris, puis la moyenne des températures de l'armoire des montres prise à 9 heures du matin dans l'intervalle des observations d'états, enfin l'indication sommaire des circonstances de navigation qui ont paru altérer la marche de la montre.

6° Pendant le cours de l'armement, il ne doit être fait remise définitive à l'observatoire d'un chronomètre délivré au navire que dans les circonstances suivantes : 1° quand les huiles sont âgées de trois ans ; 2° quand un accident grave l'a rendu impropre au service ; 3° quand le bâtiment reçoit une destination telle, qu'il y ait lieu de présumer que l'âge des huiles dépassera trois ans avant la fin de la campagne. En dehors de ces circonstances, un chronomètre délivré à un bâtiment ne peut, sous aucun prétexte, être changé à l'observatoire contre un autre instrument. — Dans le cas de réparation du navire ou de séjour dans le port, les chronomètres sont déposés à 'observatoire, et y sont suivis par le directeur.

7° Les directeurs des observatoires suivent les chronomètres expédiés par le Dépôt (comparaisons journalières, détermination des états absolus par les hauteurs ou par les passages à la lunette méridienne, etc.).

8° Ils avertissent le directeur général du Dépôt des mouvements d'entrée et de sortie (sur un bulletin mensuel *ad hoc*), et font parvenir les indications nécessaires pour que le Dépôt approvisionne les ports selon les exigences du service.

9° Ils adressent au Dépôt les marches des chronomètres suivis à l'observatoire (second bulletin mensuel), et toutes les remarques auxquelles ils ont donné lieu.

10° Ils transmettent au Dépôt les renseignements fournis (dans le bulletin mentionné au 5°) par les officiers chargés des montres, sur les instruments qui leur ont été confiés, notamment sur ceux qui ont été rendus comme impropres au service.

11° Ils lui communiquent tous les renseignements que leur propre expérience, ou leurs relations avec la flotte, les mettent à même de formuler sur les perfectionnements à apporter à la construction des chronomètres, les lois de leurs variations sous les diverses influences

auxquelles ils sont soumis, leur installation à bord, les modes d'observations et de calculs à adopter pour la détermination des longitudes, etc.

12° Ils transmettent, comme on en a déjà prévenu en 4°, aux officiers chargés des montres toutes les données recueillies soit au Dépôt, soit à l'observatoire, à l'effet de constater la valeur de chaque chronomètre qu'ils délivrent. Les officiers en question portent et vont chercher eux-mêmes leurs montres à l'observatoire. Chacune de celles-ci est accompagnée de sa boîte d'emballage. D'ailleurs, elles doivent être embarquées le jour même de la mise en rade.

13° Ils donnent par signal aux bâtiments de la rade, chaque jour, à heure fixe, l'heure temps moyen du lieu.

14° Ils prennent les ordres du major général pour se rendre à bord des bâtiments lors de l'armement, et y donner leur avis sur l'emplacement et l'installation des montres.

15° Ils suivent les chronomètres de la marine marchande sur la demande des capitaines. Les capitaines portent et viennent chercher eux-mêmes leurs montres à l'observatoire.

— L'officier chargé des montres reçoit, en même temps que les chronomètres, un journal, dit « *journal chronométrique* », renfermant un tableau qu'il doit remplir pendant le cours de la campagne, et qui n'est autre que le bulletin mentionné au 5° ci-dessus. Le reste du journal contient du papier blanc, sur lequel l'officier peut effectuer toutes ses opérations chronométriques et ses calculs journaliers.

Selon nous, le tableau dont il s'agit est tout à fait insuffisant, surtout eu égard aux considérations nombreuses et nouvelles que nous venons de développer dans le présent paragraphe sur *la régulation des chronomètres*, et à celles qui se trouvent exposées dans le paragraphe suivant à propos de *l'usage de ces instruments à la mer*. Il nous semble tout à fait indispensable qu'au début de chaque campagne, l'officier des montres commence par se dresser un type de CARNET DES CHRONOMÈTRES semblable ou à peu près au spécimen ci-après. La rédaction de ce spécimen est tout à fait à la hauteur des derniers perfectionnements apportés à l'emploi des montres marines; et grâce à divers renvois, elle se trouve suffisamment explicite par elle-même. —Au surplus, le carnet des chronomètres devra toujours être accompagné d'un *carnet d'observation*, sur lequel on relèvera les comparaisons, les hauteurs, etc., et en général les diverses données qui se prennent en allant et venant.

	N° DE L'INSTRUMENT et nom du fabric^t	AGE des huiles.
Chronomètre A.		
Chronomètre B.		
Chronomètre C.		
Compteur M.		

CARNET D

NAVIRE *Le*

DATE. (1) Année et mois.	Jour.	Heure du compteur M.	LIEU du Navire. (2)	COMPARAISON (B — A). (3)	MARCHE RELATIVE *déduite*, de B par rapport à A $(m_B - m_A)_d$ (4)	COMPARAISON (C — A). (5)	MARCHE RELATIVE *déduite*, de C par rapport à A $(m_C - m_A)_d$ (6)	TEMPÉRATURE de l'armoire des montres observée à 9^h du matin, au moment des comparaisons et du remontage des chron^s. (7)	INTERVA… DE TE… correspo… à la va… moyen… de chaque… RELATIV… déduit… (8)
1873 Mai.	27	2^h05^m	Brest : latit^{de} 48°23′32″ N^d long^{de} 6°49′30″ O^t	$7^h03^m05^s,5$		$4^h12^m14^s,5$		13°,4	
					— 0^s,5		— 6^s,0		
»	28	1^h15^m	à la mer.	5^s,0		8^s,5		14°,0	4 j^{rs} : du … au 31 …
					0^s,0		— 6^s,0		
»	29	1^h52^m	»	5^s,0		2^s,5		13°,6	
					— 0^s,5		— 6^s,5		
»	30	1^h34^m	»	4^s,5		$4^h10^m56^s,0$		12°,0	
					0^s,0		— 5^s,5		
»	31	1^h49^m	à la mer.	4^s,5		50^s,5		13°,5	5 j^{rs} : du … au 4 juin …
					— 0^s,5		— 6^s,5		La suite … nullière des … ches deduit… note des p… tions ou … deux chron… sur p… variations d… marches d'u… à l'autre, … les différen… au change… température… erreurs p… d'observatio…
Juin.	1	1^h49^m	»	4^s,0		44^s,0		13°,2	
					— 1^s,7		— 6^s,2		
»	2	1^h36^m	»	2^s,3		37^s,8		16°,5	
					— 1^s,8		— 8^s,8		
»	3	1^h46^m	»	0^s,5		29^s,0		16°,0	
					— 2^s,5		— 7^s,0		
»	4	1^h55^m	»	$7^h02^m58^s,0$		22^s,0		17°,0	
					— 3^s,0		— 7^s,5		
»	5	1^h51^m	à la mer.	55^s,0		14^s,5		16°,8	
					— 2^s,0		— 6^s,0		
»	6	2^h08^m	»	53^s,0		8^s,5		17°,0	
					— 2^s,5		— 7^s,0		
»	7	1^h54^m	»	50^s,5		1^s,5		16°,0	5 j^{rs} : du … 9 juin …
					— 2^s,2		— 5^s,5		
»	8	1^h59^m	»	48^s,3		$4^h09^m56^s,0$		16°,6	
					— 2^s,0		— 6^s,0		
»	9	1^h41^m	»	46^s,3		50^s,0		17°,8	
					— 2^s,1		— 6^s,5		
»	10	2^h08^m	»	44^s,2		43^s,5		18°,1	
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

RONOMÈTRES

COMMANDÉ PAR

…téra- …re …nne …pes- …dant …l …valle …dent. …9)	POUR L'INTERVALLE DE TEMPS donné *colonne* (8) et la TEMPÉRATURE donnée *colonne* (9)					RETARD de l'étalon A à 0^h temps moyen de Paris. (15)	CIRCONSTANCES particulières de la navigation. (Jours de chauffe, mouvements du navire, tir au canon, orages, etc.) (16)
	Valeur moyenne de la marche RELATIVE *déduite*, de B par rapport à A $(m_B - m_A)_d$ (10)	Valeur moyenne de la marche RELATIVE *normale*, de B par rapport à A $(m_B - m_A)$ (11)	Valeur moyenne de la marche RELATIVE *déduite*, de C par rapport à A $(m_C - m_A)_d$ (12)	Valeur moyenne de la marche RELATIVE *normale*, de C par rapport à A $(m_C - m_A)$ (13)	Valeur moyenne de la marche INTÉGRALE *normale* de l'étalon A. (14)		
						$3^h34^m18^s,9$ (état de départ.)	
…,2	$-0^s,25$	$-0^s,30$	$-6^s,0$	$-6^s,2$	$+5^s,3$		Marché à la vapeur pend^t 24^h à compter du départ.
							Marché à la vapeur pendant 4^h.
						$3^h33^m57^s,7$	
…,2	$-1^s,9$	$-0^s,50$	$-6^s,8$	$-5^s,6$	$+5^s,5$		
	Le désaccord entre les valeurs moyennes *normales* et *déduites* qui se correspondent, corrobore les indications de perturbation révélées par les remarques faites sur la suite journalière des marches, comme il est dit ci-contre *colonne* (8).						
		Après rectification : $-1^s,8$		Après rectification : Impossible à fixer, à cause de la variabilité de la perturbation de C du 31 mai au 4 juin.	Après rectification : $+6^s,8$	$3^h33^m23^s,7$ (calculé avec la marche rectifiée.)	Tir au canon.
…,8	$-2^s,2$	$-1^s,9$ (nouvelle valeur normale, à conserver jusqu'à reproduction de perturbation).	$-6^s,2$	$-5^s,3$ (nouvelle valeur normale, à conserver jusqu'à reproduction de perturbation).	$+6^s,9$ (nouvelle valeur normale, à conserver jusqu'à reproduction de perturbation.)		Marché à la vapeur pend^t 38^h à compter du 7 juin.
							coup de vent; à la cape sous vapeur.

Explication des colonnes du carnet précédent.

— Les *colonnes* (1), (2), (7), (9) et (16) ne donnent lieu à aucune remarque particulière.

— Les *colonnes* (3) et (5) renferment les *comparaisons* qui sont faites tous les matins vers neuf heures, au moment où on remonte les chronomètres. Elles doivent être prises avec le soin signalé aux n° 148 et 195.

— Les *colonnes* (4) et (6) donnent les marches RELATIVES *déduites* (n° 148 et 154), c'est-à-dire provenant des comparaisons obtenues pour les divers chronomètres par rapport à l'étalon. — On les calcule de jour en jour, afin d'être prévenu de tout dérangement dès son origine. Ce calcul consiste simplement à faire, par 24 heures, la différence entre la comparaison du jour et celle de la veille. Toutefois, si les heures au compteur de la colonne n° 1 s'écartent entre elles de plus de 1 heure entre les deux jours considérés, et si, en outre, la différence obtenue dépasse 1 seconde, il sera bon de la rectifier au prorata dudit écart. Étant tenu bon compte de l'influence de la variation de température et des erreurs probables d'observation, dès qu'on voit la marche RELATIVE varier anormalement, comme $(m_B - m_A)_d$ du 31 mai au 5 juin, et $(m_c - m_A)_d$ du 1er au 4, cela indique l'existence de perturbations. Il faut alors suivre les choses de près, afin de découvrir, s'il se peut, la nature des perturbations, et d'en mesurer les effets suivant les règles données aux n° 158 à 162.

— La *colonne* (8) indique les intervalles de temps pour lesquels on a besoin à la mer de calculer une valeur *moyenne* des marches RELATIVES *normales* de B et C par rapport à la marche INTÉGRALE de l'étalon (n° 148 et 154). Ces intervalles sont d'ordinaire de 4 ou 5 jours; mais ils peuvent être inégaux entre eux, et, en particulier, être raccourcis selon les exigences de la navigation, surtout si on navigue près des côtes, et qu'il soit nécessaire d'avoir avec plus d'exactitude le *point* de chaque jour.

— Les *colonnes* (11) et (13) donnent les marches RELATIVES *normales* (c'est-à-dire provenant des graphiques ou des formules de marche RELATIVE) des divers chronomètres par rapport à l'étalon pour l'intervalle de temps et la température moyenne donnés colonnes (8) et (9). Leur comparaison avec la colonne corrélative (10) ou (12) permet de juger, aux erreurs près d'observation, la grandeur des perturbations, s'il en survient. Cela a justement eu lieu dans notre exemple; et les rectifications ont été effectuées conformément aux règles du n° 159.

— La *colonne* (14) donne pour l'ÉTALON la marche INTÉGRALE *normale* (c'est-à-dire obtenue à l'aide de la formule ou de la courbe de marche INTÉGRALE) pour l'intervalle de temps et la température moyenne donnés colonnes (8) et (9). Toutefois, la valeur ainsi calculée est corrigée comme il est indiqué au n° 155, à l'aide des différences entre les valeurs moyennes *déduites* et *normales* des marches relatives, quand on veut avoir avec plus de rigueur ladite marche de l'étalon, et faire entrer en ligne de compte tous les chronomètres dans la détermination définitive de l'heure de Paris, ainsi qu'il est expliqué ci-après.

— La *colonne* (15) donne l'état absolu de l'étalon qui est le seul dont il soit nécessaire de se servir à la mer (n° 155). Ainsi qu'il est dit dans ce même numéro, il se fixe à nouveau tous les 4 ou 5 jours, en combinant l'état précédent avec le produit de la marche intégrale de l'étalon par le nombre de jours d'intervalle. Ainsi le deuxième état de la colonne, soit $3^h 33^m 57^s,7$, est égal au premier état $3^h 34^m 18^s,9$ diminué de $5^s,3 \times 4$. Pendant le cours dudit intervalle, on obtient l'état de chaque jour, destiné à fournir l'heure de Paris pour la longitude, en se servant simplement de la marche afférente à l'intervalle précédent. Ceci est parfaitement suffisant, tant qu'on n'est pas près des côtes. Sinon, comme nous l'avons dit dans l'explication de la *colonne* (8), on restreint le nombre de jours de chaque intervalle, pour lequel on détermine la marche moyenne de l'étalon d'après sa formule ou son graphique de marche, et au besoin on fixe cette marche de jour en jour. — On pourrait objecter que, dans le mode d'opérer précédent, l'heure de Paris obtenue se trouve l'être sans faire entrer en ligne de compte les autres chronomètres. Mais, ainsi que nous en avons prévenu dans l'alinéa précédent, on remédie à cela en modifiant au besoin la marche intégrale de l'étalon à l'aide des résultats fournis par les autres montres.

2ᵉ PARTIE. — § VI. EMPLOI DES CHRONOMÈTRES A LA MER.

N° 154. Rappel des définitions des diverses espèces de marches de tout chronomètre, considéré isolément ou par rapport à un autre. — Il importe, avant d'entamer l'important paragraphe de l' “ *emploi des chronomètres à la mer* ”, de redonner en un seul groupe les définitions des diverses espèces de marches qu'il y a lieu de considérer pour une montre, soit prise isolément, soit comparée à une autre ; car ces définitions, disséminées dans ce qui précède, peuvent avoir été perdues de vue par le lecteur.

Il y a d'abord la marche INTÉGRALE de tout chronomètre A, qui est sa marche complète lorsqu'on le considère isolément. Puis, vient sa marche RELATIVE, par rapport à un autre chronomètre B, qui est la différence entre les marches INTÉGRALES des deux montres.

Qu'une marche soit INTÉGRALE ou RELATIVE, elle a une valeur *normale* m_A ou $)m_B—m_A)$, et une valeur *déduite* $m_{A,B}$ ou $(m_B—m_A)_d$. Ces quantités s'expriment par les noms de marche INTÉGRALE *normale* ou *déduite*, et de marche RELATIVE *normale* ou *déduite*.

Pour la marche INTÉGRALE aussi bien que RELATIVE, la valeur *normale* s'entend de celle qui résulte de la formule ou du graphique de marche de même espèce, abstraction faite des perturbations ; et sa grandeur se fixe d'après la température et l'époque considérées.

Pour la marche RELATIVE de B par rapport à A, la valeur *déduite* $(m_B—m_A)_d$ est celle qu'on obtient directement (n° 148), soit par la différence elle-même des comparaisons faites toutes les 24 heures à la mer entre B et A, soit, si on veut se borner à une moyenne, par la $n^{ième}$ partie de la différence des comparaisons faites tous les n jours à la même heure. Il va de soi que pour la marche relative de A par rapport à B, la valeur déduite est égale et de signe contraire à la précédente. — Pour la marche INTÉGRALE de A, la valeur *déduite* $m_{A,B}$ est celle qui s'obtient en retranchant de la valeur *normale* m_B de la marche intégrale du second chronomètre, la valeur *déduite* de la marche relative de B par rapport à A. On a ainsi : $m_{A,B} = m_B — (m_B — m_A)_d$.

Les marches se calculent d'habitude à la mer par moyennes convenant à des intervalles de temps *unitaires* de 4 ou 5 jours, pourvu que la température de l'armoire des montres, lue chaque matin vers 9 heures, n'ait pas varié de plus de 2° à 3° pendant l'intervalle

considéré. On emploie alors, pour la recherche des valeurs *normales* moyennes des marches, la température et l'époque moyennes propres à chaque intervalle. Mais cette recherche peut donner un résultat plus ou moins erroné, comme nous en montrerons un exemple important au n° 162, quand le chronomètre est très-sensible aux changements de température, et qu'on emploie un graphique de marche. Car alors la moindre incertitude sur l'appréciation de la température moyenne ou sur le report graphique de cet élément, modifie notablement l'ordonnée représentant la marche. On ne peut remédier à un pareil inconvénient qu'en se servant d'intervalles de temps unitaire plus courts que d'habitude, pour les époques où la température varie d'une manière sensible, et qu'en apportant en outre le plus grand soin aux reports et lectures effectués sur le graphique. De leur côté, les valeurs *déduites* moyennes se tirent, comme il a été dit plus haut, de la différence entre les comparaisons qui appartiennent au commencement et à la fin de la période. — Nous rappellerons, en passant, qu'on n'obtiendrait rien de plus dans ce dernier calcul, ni comme résultat, ni comme exactitude, si à la différence des deux comparaisons extrêmes, on substituait la moyenne des différences afférentes aux comparaisons successives de l'intervalle; car (n° 128), dans une semblable moyenne, les comparaisons intermédiaires disparaissent d'elles-mêmes. Aussi, ces comparaisons successives ne doivent-elles avoir pour but (n° 148) que de suivre jour par jour les chronomètres, au point de vue de la constatation de leurs dérangements, dès qu'ils se manifestent.

N° 155. Fixation de l'état absolu et de la marche des chronomètres à la mer. — Qu'on dispose de plusieurs chronomètres ou qu'on n'en ait qu'un, le commencement de la question se traite de la même manière; car, dans la première hypothèse, on ne s'occupe d'abord que du chronomètre *étalon*.

A partir de l'époque correspondant à l'état absolu de départ (n° 137), on se borne d'ordinaire à fixer la marche *moyenne* tous les quatre ou cinq jours, comme nous l'avons dit au numéro précédent, attendu que, une fois au large, on ne se préoccupe d'avoir rigoureusement la longitude et par suite l'état absolu qu'au bout de chaque intervalle de temps unitaire. A cet effet, avec un seul chronomètre, on combine la valeur antérieure exacte de cet état avec le produit de la marche moyenne de l'intervalle par le nombre de jours de celui-ci. En ce qui concerne chacun des jours intermédiaires, on se procure de

proche en proche une valeur approchée de l'état absolu, à l'aide de la marche moyenne afférente à l'intervalle précédent.

Avec plusieurs chronomètres, avant de calculer l'état absolu comme il vient d'être indiqué, il faut *contrôler* la valeur *normale* de la marche de l'étalon à l'aide des autres chronomètres. — Quand les formules ou les graphiques de marche comportent les marches INTÉGRALES pour toutes les montres, le contrôle dont il s'agit consiste à comparer la valeur *normale* m_A de la marche de l'étalon, avec ses valeurs *déduites* $m_{A,B}$, $m_{A,C}$.... — Les différentes marches INTÉGRALES de A ne doivent différer entre elles que de quantités moindres que les erreurs probables d'observation (nº 156). Sinon, c'est qu'il y aura eu perturbation ; et il faudra dès lors commencer par rectifier, s'il y a moyen (nºs 158 et 159), la valeur normale de la marche de l'étalon avant que de s'en servir. Suivant les circonstances, on changera au besoin d'étalon (nº 164). Cette rectification aura du reste encore pour but de corriger pour l'avenir la formule ou le graphique de marche du chronomètre. A ce dernier point de vue, il faudra agir de même pour les autres chronomètres. — En tout état de cause, il y aura intérêt à prendre la moyenne entre la valeur *normale* de la marche INTÉGRALE de l'étalon et ses valeurs *déduites*, quand ces diverses quantités ne sont pas exactement égales entre elles, après les avoir d'ailleurs corrigées, s'il y a lieu et moyen, des perturbations susceptibles de les affecter. En effet, d'après le nº 128, si nous appelons r, r' et r'' les erreurs probables afférentes à chaque montre, cette moyenne dans le cas de trois chronomètres, par exemple, offrira l'avantage de réduire l'erreur probable sur la marche de l'étalon à $\pm\frac{\sqrt{r^2+r'^2+r''^2}}{3}$, soit dans la proportion de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ environ, eu égard au peu de différence qui existe d'ordinaire entre r, r' et r''.

— Quand on a à sa disposition des formules ou des graphiques de marches RELATIVES, le contrôle sus-mentionné consiste en ce qui suit :

On commence par se procurer, pour chaque chronomètre autre que l'étalon, la valeur *normale* $(m_B\text{-}m_A)$ de la marche relative ; puis on la compare avec sa valeur *déduite* $(m_B\text{-}m_A)_d$. Si la différence entre ces deux valeurs est de l'ordre de petitesse des *erreurs probables* d'observation, c'est qu'il n'y a pas eu de perturbation, ou sinon qu'elle a

été la même à l'étalon et au chronomètre considéré. — Lorsqu'on a plus de deux chronomètres, on s'assure du fait par l'examen de la différence des deux valeurs de la marche RELATIVE du troisième chronomètre par rapport à l'étalon : cette différence doit, elle aussi, remplir la condition ci-dessus, pour qu'on puisse conclure à la presque certitude qu'il n'y a pas eu de perturbations.

Dans le cas où on constate qu'il y a eu dérangement, on doit déterminer, avant de passer outre, la nature et la grandeur de celui-ci, afin de corriger la marche INTÉGRALE de l'étalon, puis sa formule ou son graphique de marche, ainsi que la formule ou le graphique de marche RELATIVE de chacun des autres chronomètres. De même que plus haut, on changera au besoin d'étalon (nº 164).

Il importe de remarquer qu'avec l'usage des formules ou des graphiques de marche RELATIVE, on ne se sert de la marche INTÉGRALE que pour l'étalon. Mais la manière d'opérer qui vient d'être indiquée avec ledit usage, ne tient pas moins compte de tous les éléments fournis par le système complet des chronomètres. — Toutefois, afin de diminuer, d'après les mêmes motifs que plus haut, l'erreur probable sur la marche de l'étalon, on fera bien, si, abstraction faite des perturbations, il existe quelque différence entre la valeur *déduite* $(m_B - m_A)_d$ et la valeur *normale* $(m_B - m_A)$ de chaque marche relative, d'ajouter algébriquement ces diverses différences; puis de diviser la somme par le nombre des chronomètres, y compris l'étalon A; et de retrancher algébriquement le résultat de la marche de ce dernier.

Mais en principe, les éléments afférents aux chronomètres autres que l'étalon ne servent, aussi bien avec l'usage des marches INTÉGRALES qu'avec celui des marches RELATIVES, qu'à contrôler les éléments propres de l'étalon. Dès lors, comme nous en avons prévenu en 1° et 6° au nº 148, et ainsi que cela résulte surtout du numéro suivant, l'avantage demeure acquis à celui desdits usages qui se prête le mieux au contrôle en question, c'est-à-dire évidemment à l'usage des marches RELATIVES.

En tout état de cause, on trouvera au nº 164 un exemple numérique de la recherche de l'état absolu à la mer, dans l'hypothèse de perturbations.

Nº 156. Erreurs probables commises dans l'appréciation à la mer des marches soit intégrales, soit relatives des chronomètres, et dans celles des états absolus. — Occupons-nous d'abord de l'erreur probable de la marche INTÉGRALE ex-

trapolée du chronomètre unique, ou du chronomètre étalon, si on a plusieurs montres.

D'après les données du n° 140, l'erreur probable de toute marche INTÉGRALE calculée en rade n'est pas moindre que $\pm \frac{0^s,74\sqrt{2}}{5}$ avec un bon observateur, par suite des seules erreurs d'observation ; et nous prendrons en nombre rond $\pm 0^s,3$ pour le cas plus habituel d'un observateur ordinaire. Or, en appréciant à la mer, à l'aide de la formule ou du graphique de marche, les variations *normales* dues au changement de température et à l'accroissement du temps, on introduira de nouvelles incertitudes. Ces incertitudes proviendront d'abord du fait même de l'*extrapolation* de ladite formule ou dudit graphique, lequel fait produira d'ordinaire $\pm 0^s,1$ à $\pm 0^s,3$ d'erreur par mois à dater du départ, soit en moyenne $\pm 0^s,2$, l'erreur étant d'autant plus marquée que le chronomètre considéré est plus sensible aux changements de température (ceci, soit dit en passant, se reconnaît (n° 144) à l'écart plus ou moins grand des lignes isothermes entre elles). Il y aura ensuite à considérer les erreurs propres à la détermination de la température moyenne, qui est un élément de détermination dans la formule ou le graphique. Enfin, ce dernier peut aussi donner lieu à des erreurs de lecture, surtout si on n'a pas pris une échelle suffisamment grande pour se mettre à l'abri d'une pareille circonstance. Nous pouvons compter pour chacun de ces chefs $\pm 0^s,1$. — Dès lors, on peut admettre qu'en moyenne, d'après le n° 128, on aura :

Erreur probable en mer sur la marche INTÉGRALE *normale de l'étalon*

$$= \pm \sqrt{(0^s,3)^2 + (0^s,2)^2 + (0^s,1)^2 + (0^s,1)^2} = \pm 0^s,40.$$

Conséquemment, au bout de *n* jours, l'état absolu *à la mer* déduit de celui de départ obtenu à l'aide de ladite marche, sera affecté d'une erreur probable $= \pm \sqrt{(0^s,40)^2 \times n} = \pm 0^s,40\sqrt{n}$.

Occupons-nous maintenant, dans le cas de plusieurs chronomètres, des erreurs probables sur les marches *déduites*, dont la connaissance est nécessaire (n° 155) pour le *contrôle* de l'étalon. Supposons d'abord que, pour tous les chronomètres autres que l'étalon, on emploie aussi les marches INTÉGRALES dans les formules ou graphiques de marche. Considérons la *valeur normale* de chacune de celles-ci, calculée à l'aide de leur formule ou de leur graphique. — Cette formule ou ce graphique se déduisant *en rade* du document

de même espèce correspondant à l'étalon, il y a de ce chef deux erreurs. L'une provient des comparaisons qui servent à cette déduction, et que nous estimerons à $0^s,3$ par comparaison. L'erreur probable afférente aux deux comparaisons, supposées distantes de cinq jours, vaudra donc $\pm \frac{\sqrt{(0^s,3)^2 \times 2}}{5} = \pm 0^s,08$. La seconde erreur sus-mentionnée est due à l'appréciation de la température moyenne, et vaut $0^s,1$ d'après ce qui a été dit plus haut. — On combinera ces deux erreurs selon les règles du n° 128, avec celle de $0^s,3$, indiquée au commencement de ce numéro pour la marche de l'étalon en *rade*, puis avec $0^s,2$ d'erreur d'extrapolation, $0^s,1$ d'erreur de lecture sur le graphique à la mer, et aussi $0^s,1$ d'erreur d'appréciation de température à la mer. Il viendra ainsi :

Erreur probable en mer sur la valeur NORMALE *de la marche* INTÉGRALE *de chaque chronomètre autre que l'étalon* $= \pm \sqrt{(0^s,3)^2 + (0^s,08)^2 + (0^s,1)^2 + (0^s,2)^2 + (0^s,1)^2 + (0^s,1)^2} = \pm 0^s,41.$

Mais en passant de la valeur *normale* de la marche de ce chronomètre à la valeur *déduite* qui en résulte pour la marche de l'étalon, il y aura à considérer l'erreur afférente aux comparaisons à la mer qui servent à ce passage, laquelle erreur est d'ordinaire égale au chiffre $\pm 0^s,08$ trouvé ci-dessus. On aura donc, tout compte fait :

Erreur probable en mer sur chaque valeur déduite *propre à la marche* INTÉGRALE *de l'étalon* $= \pm \sqrt{(0^s,41)^2 + (0^s,08)^2} = \pm 0^s,42.$

Dès lors, la différence entre cette valeur *déduite* et la valeur *normale* de la marche de l'étalon, différence à l'aide de laquelle s'exerce le contrôle sus-mentionné, aura pour erreur probable $\pm \sqrt{(0^s,40)^2 + (0^s,42)^2} = \pm 0^s,58$, soit $\pm 0^s,6$ en nombre rond.

Conséquemment, dans la combinaison que nous examinons, toute perturbation moindre que $\pm 0^s,6$ passera inaperçue.

— Occupons-nous maintenant de la combinaison où l'on emploie, pour tous les chronomètres autres que l'étalon, une formule ou un graphique de marche RELATIVE.

Remarquons d'abord qu'en rade, on trace les courbes des marches relatives au moyen de points déterminés de cinq en cinq jours, par les moyennes de la température et par des comparaisons avec l'étalon. En admettant, comme plus haut, sur chaque comparaison $0^s,3$ d'erreur probable, et $0^s,1$ pour l'erreur provenant de l'appréciation de la température moyenne, l'erreur probable afférente de ce double chef à chaque marche RELATIVE de rade vaudra :

$\pm\sqrt{\frac{(0^s,3)^2\times 2}{5^2}+(0^s,1)^2}=\pm 0^s,13.$ — La formule ou la courbe de marche RELATIVE déterminée en rade sera donc très-précise; et son extrapolation se trouvera nettement indiquée. Conséquemment, l'incertitude d'une valeur extrapolée de marche relative ne surpassera l'incertitude des valeurs déterminées directement, que d'une faible quantité; et nous sommes en droit d'estimer cette quantité au plus à la moitié $\pm 0^s,1$ du chiffre moyen $\pm 0^s,2$ que nous avons adopté dès le début de ce numéro pour l'erreur d'extrapolation d'une marche INTÉGRALE. Dès lors, on aura :

Erreur probable en mer sur la valeur normale *de chaque marche* RELATIVE

$$=\pm\sqrt{(0^s,13)^2+(0^s,1)^2}=\pm 0^s,16.$$

De son côté, la valeur *déduite* sera simplement affectée de l'erreur de comparaison citée plus haut, soit de $\pm 0^s,08$. Conséquemment, la différence entre la valeur *normale* et la valeur *déduite* de chaque marche relative, différence nécessaire pour contrôler le chronomètre étalon, aura, dans le cas qui nous occupe, son erreur probable $=\pm\sqrt{(0^s,16)^2+(0^s,08)^2}=\pm 0^s,18$, soit $\pm 0^s,2$ en nombre rond.

On sera ici à même de s'apercevoir des perturbations dès qu'elles surpasseront $\pm 0^s,2$. On voit donc, comme nous l'avons annoncé en 6° du n° 148 et au numéro précédent, que le contrôle de l'étalon par les autres chronomètres est bien autrement précis, en employant dans les formules ou les graphiques de marche de ces chronomètres, les marches RELATIVES au lieu des marches INTÉGRALES.

N° 157. Spécification des effets produits par les perturbations chronométriques. — Il nous reste maintenant à aborder l'importante question des dérangements des chronomètres à la mer. Mais cette question ne saurait manifestement se traiter par le calcul qu'autant qu'on aura spécifié nettement les effets produits par ces dérangements. Une pareille *spécification* ne représentera pas toujours rigoureusement la réalité. Elle sera si on veut *fictive* ou *apparente* dans de certaines circonstances; mais comme alors elle conduira aux mêmes résultats que si les choses se passaient *réellement* telles qu'on les suppose, l'usage de cette spécification sera tout à fait licite. Cet usage constitue d'ailleurs le seul moyen rationnel de mettre le problème en équation et de le résoudre; car procéder à cette solution sans avoir précisé les divers effets *réels* ou *apparents* des dérangements chronométriques, c'est évidemment se mettre à la

recherche d'une inconnue dont on ignore la nature. Aussi les questions de l'espèce traitées jusqu'ici sans aucune spécification desdits effets, s'offrent-elles au lecteur sous un aspect louche, qui ne satisfait pas l'esprit. — Ceci admis, on voit, en se reportant aux causes mêmes des perturbations (nº 100 à 104), qu'il est tout à fait logique de *spécifier* leurs *effets* sur chaque chronomètre, par les cinq caractères suivants :

α, SAUT DE MARCHE, consistant en un changement de cet élément qui s'effectue brusquement ou au moins dans l'intervalle, ordinairement de quatre ou cinq jours, adopté pour unité de temps dans l'usage des montres à la mer. La marche prend alors une *nouvelle valeur qu'elle conserve*, abstraction faite d'ailleurs de sa variation *normale*, c'est-à-dire de l'influence de la température et de l'âge des huiles, qui continue à être soumise à la même loi que primitivement.

β, MODIFICATION CONTINUE DE LA MARCHE, de valeur variable ou constante, toujours en dehors de la variation normale de celle-ci ; pouvant finir par s'arrêter, et par donner alors à la marche une valeur déterminée permanente autre que sa valeur primitive ; ou susceptible, en revenant en arrière, de disparaître complétement, et de laisser la marche reprendre sa valeur primitive.

γ, SAUT D'ÉTAT ABSOLU, consistant en un changement de cet élément qui s'effectue brusquement, ou au moins dans l'intervalle de temps unitaire sus-mentionné de quatre ou cinq jours. — Il n'y pas ici modification de la marche ; mais le saut d'état peut, au point de vue des calculs, être assimilé à une *modification continue variable* de celle-ci, devenant, pendant le second intervalle de temps, égale et de signe contraire à ce qu'elle serait pendant le premier.

δ, CONCOMITANCE DES DEUX CIRCONSTANCES α ET γ.

ε, CONCOMITANCE DES DEUX CIRCONSTANCES β ET γ.

Les perturbations que nous venons de mentionner peuvent, bien entendu, être positives ou négatives. La plus habituelle semble être la perturbation α. A bord de certains navires à hélice, l'irrégularité β peut se produire d'une façon permanente sous l'influence des trépidations du propulseur (nº 163) ; mais elle est d'ordinaire alors très-faible. Au surplus, cette irrégularité met tout chronomètre hors de service, quand elle se manifeste avec persistance, tantôt dans un sens, tantôt dans un autre. — Les dérangements δ et ε sont tout à fait exceptionnels ; et dans les discussions qui vont suivre, nous admettrons qu'en général ils n'existent pas, et qu'ils ne devront être

pris en considération que quand on tombera sur des résultats qui ne sauraient s'expliquer sans eux.

Il importe d'ajouter que les *sauts d'état absolu* susceptibles de se produire dans un remontage, peuvent tout de suite être reconnus et conséquemment rectifiés, si on a au moins un compteur à sa disposition. Il suffit pour cela de suivre les indications données au n° 152.

N° 158. Problème général de la recherche des perturbations chronométriques à la mer : cas de deux chronomètres au plus. — Si on n'a à bord qu'un chronomètre et qu'il vienne à se déranger, il n'y a évidemment pas moyen d'être prévenu d'aucune des perturbations précédentes ; et on ne peut compter que sur les relâches et au besoin sur les distances lunaires (n° 67) pour s'éclairer à ce sujet.

— Si on a deux chronomètres, on a soin de les contrôler l'un par l'autre, comme il a été expliqué au n° 155, à l'aide des formules ou des graphiques de marche, combinés avec les comparaisons faites, sinon chaque jour, au moins à des intervalles de temps *unitaires* de longueur appropriée aux circonstances.

Il ne serait pas rationnel d'admettre en général que les perturbations sont de même grandeur et de même signe aux deux montres, et que par suite leurs effets par rapport audit contrôle s'annulent. Car ceci constituerait une coïncidence qui est infiniment peu probable. Il faut donc supposer d'ordinaire que ce contrôle permet de prévoir s'il y a eu ou non perturbation, ou plutôt si les perturbations ne dépassent pas la limite des erreurs probables d'observation (n° 156). Quand on emploie les formules ou les graphiques de marche avec les marches INTÉGRALES au lieu des marches RELATIVES, cette limite est assez élevée pour qu'il y ait convenance, lorsqu'elle est atteinte, d'examiner si elle ne masque pas quelque perturbation légère, notamment celle qui est susceptible de se produire sous l'influence des trépidations du propulseur (n° 163).

En tout état de cause, quand il y a perturbation, on ne peut savoir *à priori* quel est celui des deux chronomètres qui s'est dérangé. Et on est conduit à supposer d'abord qu'il n'y a qu'un chronomètre de dérangé ; et ensuite qu'ils le sont tous les deux. Ceci mène à considérer les hypothèses α, β, γ, δ, ε, sus-mentionnées d'abord isolément, puis combinées avec les perturbations possibles α', β', γ', δ', ε', concernant le deuxième chronomètre. Ces nouvelles combinaisons possibles sont les suivantes :

$\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, $\alpha\gamma'$, $\alpha\delta'$, $\alpha\varepsilon'$,
$\beta\alpha'$, $\beta\beta'$, $\beta\gamma'$, $\beta\delta'$, $\beta\varepsilon'$,
$\gamma\alpha'$, $\gamma\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\gamma\delta'$, $\gamma\varepsilon'$,
$\delta\alpha'$, $\delta\beta'$, $\delta\gamma'$, $\delta\delta'$, $\delta\varepsilon'$,
$\varepsilon\alpha'$, $\varepsilon\beta'$, $\varepsilon\gamma'$, $\varepsilon\delta'$, $\varepsilon\varepsilon'$.

Le problème consiste alors à étudier quelle est celle des hypothèses simples et doubles que nous venons d'énumérer, qui cadre le mieux avec l'écart constaté, soit entre la marche *déduite* $m_{A,B}$ et la marche normale m_A, si on se sert de marches INTÉGRALES; soit entre la valeur *déduite* $(m_B - m_A)_d$ et la valeur *normale* $(m_B - m_A)$ de la marche RELATIVE (n° 148), si c'est ce dernier élément qui entre dans la formule ou le graphique de marche. Puis on tire, si faire se peut, de cette étude suivie pendant plusieurs intervalles de temps consécutifs, des données permettant de restreindre l'indétermination du problème, sans sortir des bornes de la vraisemblance.

Pour préciser la question, nous adopterons les notations suivantes:

Δm_A, Δm_B représenteront, pour chaque chronomètre et dans un premier intervalle de temps unitaire donné, la *moyenne* des différences de chaque jour entre la valeur *perturbée* et la valeur *normale* de la marche, abstraction faite de l'influence de la température et de l'âge des huiles, influence dont ladite valeur normale tient compte. En d'autres termes, $(m_A + \Delta m_A)$ et $(m_B + \Delta m_B)$ figureront les valeurs *moyennes* de la marche perturbée pendant l'intervalle de temps considéré.

$\Delta' m_A$, $\Delta' m_B$ représenteront les augmentations algébriques de Δm_A et Δm_B pour l'intervalle de temps suivant le premier, et ainsi de suite.

Les diverses quantités précédentes pourront, suivant leurs valeurs successives, comme nous allons le voir dans un instant, représenter des *sauts de marche* ou des *modifications continues de marche*, et même des *sauts d'état absolu*, eu égard à ce que nous avons dit au numéro précédent, en γ, sur l'assimilation *fictive* de ces sauts à une modification de marche. Au surplus, ces mêmes sauts peuvent concomiter avec l'une ou l'autre des deux perturbations précédentes, auquel cas la double perturbation est englobée en un seul tout dans les Δ de marche de l'intervalle de temps où elle a eu lieu.

Nous remarquerons tout d'abord que, d'après les conventions renfermées dans la légende ci-dessus, nous substituons, par l'emploi de *moyennes*, à la réalité des faits un ordre de choses *fictif*, qui est nécessité par le mode de solution que nous nous sommes proposé, mais qui, somme toute, donne les résultats définitifs qu'il s'agit d'obtenir, pourvu que chaque espace unitaire considéré remplisse bien les conditions voulues (n° 154).

Cela posé et compris, nous nous mettrons dans l'hypothèse de perturbations les plus complètes. La formule (V) du n° 148 nous fournira alors les relations suivantes propres à des intervalles de temps successifs :

$$m_{A,B} = m_B - (m_B + \Delta m_B - m_A - \Delta m_A);$$
$$m'_{A,B} = m'_B - (m'_B + \Delta m_B + \Delta' m_B - m'_A - \Delta m_A - \Delta' m_A);$$
. . . .

Les inconnues sont ici les Δ de marche. Un plus ou moins grand nombre de ces quantités peuvent être nulles, suivant que les perturbations sont plus ou moins complètes ; ce qui du reste ne peut se constater qu'*à posteriori*, si on parvient à résoudre le problème.

Nous remarquerons, avant d'aller plus loin, qu'il n'y a pas lieu (n°ˢ 158 et 159) de se préoccuper de l'inégalité susceptible d'exister entre les températures moyennes correspondant aux diverses équations ci-dessus. Cela tient à la signification *expresse* sus-mentionnée attribuée aux Δ de marche.

Quoi qu'il en soit, les quantités $m_{A,B}$, $m'_{A,B}$, sont ici les valeurs *déduites* afférentes à la marche INTÉGRALE de A. Abstraction faite des variations *normales* dues à l'influence de la température, elles peuvent évidemment varier d'un intervalle de temps à l'autre quand il y a perturbation, tandis que, toujours sous la même abstraction, les valeurs normales m_A, m_B sont des quantités fixes. En tout cas, ces valeurs *déduites* se calculent d'après les formules ci-dessus elles-mêmes ; car les quantités entre parenthèses sont justement les différences qu'on tire des comparaisons, et se confondent avec les diverses valeurs *déduites* propres à la marche RELATIVE de B par rapport à A, ou *vice versâ*. Ces quantités peuvent également varier d'un intervalle de temps à l'autre ; et elles donnent lieu de leur côté à des équations de la forme :

$$(m_B - m_A)_d = (m_B + \Delta m_B - m_A - \Delta m_A);$$
$$(m'_B - m'_A)_d = (m'_B + \Delta m_B + \Delta' m_B - m'_A - \Delta m_A - \Delta' m_A);$$
. . . .

Tout cela compris, supposons calculées, d'après les indications précédentes, soit les différences de l'espèce $(m_{A,B} - m_A)$ entre les valeurs *déduites* et *normales* des marches INTÉGRALES, soit les différences de l'espèce $\Delta(m_B - m_A)$ entre les valeurs *déduites* $(m_B - m_A)_d$ et *normales* $(m_B - m_A)$ des marches RELATIVES. On tire aisément des groupes d'équations ci-dessus, les relations suivantes, dont les seconds membres sont lesdites différences calculées au fur et à mesure. Il importe de remarquer que les Δ accentués n'ont pas ici, par rapport aux marches relatives qu'ils précèdent, la même signification que les Δ accentués ci-dessus par rapport aux marches intégrales qu'ils précèdent également. Mais nous n'avons pas cru devoir pour cela recourir à une nouvelle notation, qui eût été plutôt un élément de complication qu'un élément de simplification.

	Avec l'emploi des marches intégrales.	Avec l'emploi des marches relatives.
	1er Intervalle de temps à partir duquel les perturbations se sont manifestées.	
(VI)	$\Delta m_A - \Delta m_B = m_{A,B} - m_A$;	$\Delta m_A - \Delta m_B = -\Delta(m_B - m_A)$;
	2e Intervalle de temps.	
(VII)	$\Delta m_A + \Delta' m_A - \Delta m_B - \Delta' m_B = m'_{A,B} - m'_A$;	$\Delta m_A + \Delta' m_A - \Delta m_B - \Delta' m_B = -\Delta'(m_B - m_A)$;
	3e Intervalle de temps.	
(VIII)	$\Delta m_A + \Delta' m_A + \Delta'' m_A - \Delta m_B - \Delta' m_B - \Delta'' m_B = m''_{A,B} - m''_A$;	$\Delta m_A + \Delta' m_A + \Delta'' m_A - \Delta m_B - \Delta' m_B - \Delta'' m_B = -\Delta''(m_B - m_A)$

. . . .

On ne s'arrêtera que quand on arrivera à un intervalle de temps à partir duquel le *second membre* de l'équation, aux *erreurs probables* près d'observation, deviendra *nul*, demeurera *constant*, ou enfin ira en *augmentant* algébriquement *d'une quantité constante.* — Ceci se produira, en principe, à partir du deuxième ou du premier intervalle de temps, à moins qu'on n'ait affaire à des *modifications de marche continue et de valeur variable* se perpétuant pendant un certain temps, ce qui constitue une circonstance que nous examinerons plus loin, et qui ne peut se présenter qu'avec de mauvais chronomètres. — Nous allons examiner les quelques cas généraux bien définis, les plus susceptibles de se présenter.

Supposons, en premier lieu, que le *second membre* de l'équation devienne *nul* à partir du deuxième intervalle. Cela prouvera que, très-probablement, l'un des deux chronomètres seulement s'est dérangé; et que le premier Δ de sa marche est devenu égal et de signe contraire au second Δ de celle-ci, c'est-à-dire à son Δ'. Les perturbations sont dès lors terminées; et on voit qu'il y a eu une *modification de marche variable en grandeur et en signe*, qui ne s'est manifestée que pendant deux intervalles de temps unitaires. — D'après la remarque faite en γ au n° 157, il est également licite de supposer qu'on se trouve en présence d'un *saut d'état absolu.*

Admettons, en second lieu, que le *second membre* de l'équation prenne une valeur *constante* à partir du premier intervalle. Cela prouvera très-vraisemblablement que les Δ de marche des deux chronomètres deviennent nuls dès le deuxième intervalle, et par suite que la perturbation a cessé. D'ailleurs, celle-ci n'affectera probablement qu'un des chronomètres, et consistera alors en un *saut de marche.*

Considérons, en troisième lieu, l'hypothèse où *le second membre* de l'équation va, dès le début, *en augmentant* algébriquement *d'une quantité constante.* Cela prouvera que les Δ de marche des deux chronomètres demeurent désormais constants; et que, par conséquent, la

perturbation se perpétue, et consiste en une *modification de marche continue et constante* en grandeur et en signe. — Il est très-présumable, d'ailleurs, qu'en dehors du cas de perturbations concomitantes dues (n° 163) aux trépidations du propulseur, cette modification n'affecte qu'une des deux montres.

Enfin, si on trouve que, pour les divers intervalles de temps à partir du premier, le *second membre* de l'équation va *en augmentant* algébriquement d'une *quantité variable*, c'est que l'un ou l'autre des deux chronomètres (car il est infiniment peu présumable que ce soient tous les deux à la fois), est soumis à une *modification de marche continue et de valeur variable se perpétuant un certain temps.* Dans ce dernier cas, le problème devient inextricable.

Mais, en dehors de ce cas, on pourra, d'après les développements précédents, joindre aux équations (VI) et (VII), qui contiennent quatre inconnues, et par conséquent sont indéterminées, les équations de probabilité. Ces dernières équations seraient de la forme suivante :

Pour la première supposition ci-dessus.	$\Delta m_A = 0,\ \Delta' m_A = 0;$	ou *vice versâ*, en changeant A en B.
Pour la deuxième supposition.	$\Delta' m_A = 0$, avec Δm_B et $\Delta' m_B = 0;$	ou *vice versâ*, en changeant A en B.
Pour la troisième supposition.	$\Delta m_A = \Delta' m_A$, avec $\Delta m_B = 0$ et $\Delta' m_B = 0;$	ou *vice versâ*, en changeant A en B.

Si on savait laquelle des deux séries d'équations de probabilité ci-dessus il convient d'adopter, le problème des perturbations dans le cas de deux montres, se trouverait résolu. Mais ce point n'étant généralement pas connu, c'est sur lui en fait que porte l'indétermination de la question. — Cependant il pourra être fixé avec un certain degré de vraisemblance, quand on possédera des données sur le tempérament de chacune des montres, c'est-à-dire sur sa sensibilité vis-à-vis des influences anormales de la mer. Nous avons d'ailleurs vu au n° 149, comment on peut suivre sur le graphique de marche le plus habituel, c'est-à-dire comprenant des lignes isothermes, les effets des perturbations, et dès lors étudier au moins leur allure. On s'efforcera de corroborer cette étude par celle obtenue à l'aide d'un graphique de lignes *isotemps* (n° 147). Ce dernier procédé deviendra même indispensable, si le graphique des lignes isothermes finit par être trop délié (n° 149), à la suite de perturbations se présentant avec une certaine fréquence; ou bien encore quand on ne disposera que d'un petit nombre de données sûres pour établir le graphique de marche (n° 150).

D'une façon générale, on devra noter avec soin toutes les indications de l'espèce, en outre de celles dont nous venons de parler, susceptibles d'être fournies par de simples comparaisons, par des régulations nouvelles à la suite de diverses traversées, ou enfin par la discussion des atterrissages. Puis, on tâchera, à l'aide de tous ces éléments, de fixer la tendance que peut avoir chaque chronomètre à subir telle ou telle perturbation suivant les différentes circonstances de la navigation; et on marquera sur un carnet cette perturbation, sinon en grandeur exacte, du moins dans son effet d'ensemble, avec les causes anormales (gros temps, marche à la vapeur, tir au canon, etc.) susceptibles de l'expliquer.

On peut parfois parvenir, grâce à des données auxiliaires suffisantes, à déterminer les effets sur chaque chronomètre de la perturbation constatée, c'est-à-dire les valeurs des Δ de marche afférentes aux divers intervalles de temps successifs qui se présentent à partir de la constatation de la perturbation. En pareille conjoncture, ces divers Δ de marche serviront à rectifier, pour les intervalles de temps perturbés, les marches INTÉGRALES ou RELATIVES obtenues à l'aide de la formule ou du graphique employé. On n'oubliera pas, au surplus, qu'ils représentent la valeur *diurne* moyenne de la correction à faire subir à la valeur *normale* afférente à chaque intervalle.

— Par ailleurs, il n'y aura moyen de rétablir à nouveau une formule ou une courbe de marche propre à chaque chronomètre, que quand la marche aura repris, pour une température donnée, soit sa valeur normale *primitive*, soit une *nouvelle* valeur normale. — Dans le cas *d'un saut d'état absolu*, cette valeur normale sera la valeur primitive dès le deuxième intervalle de temps ; puisque, pour cet intervalle, la somme des Δ de marche sera devenue nulle. — Dans le cas d'un *saut de marche*, la nouvelle valeur normale sera égale à l'ancienne augmentée algébriquement dudit saut. — Enfin, dans le cas *d'une modification de marche continue constante*, la nouvelle valeur normale de la marche sera une quantité variable, qui, chaque jour, croîtra algébriquement de ladite modification.

En ce qui concerne la détermination, après dérangement de marche, des états absolus pour trouver les longitudes du bord, il n'y a, dans la mesure de ce qui a été dit au n° 155, à se préoccuper que de l'état du chronomètre étalon. — Les valeurs successives de cet état absolu se calculeront de proche en proche par l'adjonction successive des marches corrigées. Elles subiront ainsi chaque jour la correction

moyenne afférente à la marche. Si on veut passer d'un seul coup de l'état absolu précédant immédiatement un intervalle perturbé, à l'état suivant immédiatement ce même intervalle, il suffira de calculer le nouvel état à l'aide de la marche *normale* primitive répétée autant de fois qu'il y a de jours dans ledit intervalle, et de rectifier le résultat avec le produit de la correction moyenne de la marche par ce même nombre de jours. — Une fois que la marche a repris sa valeur normale primitive, ou une nouvelle valeur normale, le calcul de l'état absolu reprend son cours habituel.

— Quand, selon le cas général, on ne peut parvenir à faire disparaître l'indétermination du problème, il faut, dans la détermination précédente, se borner à prendre pour la marche INTÉGRALE de l'étalon, la moyenne entre sa valeur *normale* et sa valeur *déduite* pour chaque intervalle de temps considéré.

Si on se sert de marches RELATIVES, on retranchera algébriquement de la valeur normale de la marche INTÉGRALE de l'étalon, la moitié de la différence entre la valeur *déduite* $(m_B - m_A)_d$ et la valeur *normale* $(m_B - m_A)$ de la marche RELATIVE.

N° 159. Problème général de la recherche des perturbations chronométriques à la mer : cas de trois chronomètres au moins. — Quand on a trois chronomètres, on doit admettre en principe qu'il y en a tout au plus deux susceptibles de se déranger simultanément.

Ce fait a été mis en évidence par des études récentes dues à divers navigateurs, notamment à MM. de Magnac et Martin. — Toutefois sur le *Decrès*, M. Rouyaux a constaté que les trépidations de l'hélice pouvaient produire, au contraire, une perturbation simultanée sur tous les chronomètres, consistant en une *modification continue et de valeur constante* de la marche. Mais heureusement les modifications étaient toujours dans le même rapport d'un chronomètre à l'autre. — Si le cas du *Decrès* se présente sur d'autres navires par suite de circonstances analogues, il est présumable qu'il en sera encore de même. On devra donc acquérir le plus vite possible la valeur desdits rapports en discutant soigneusement les premiers atterrissages, ainsi qu'il est indiqué au n° 163. On trouvera alors avec la plus grande facilité par les formules (IX) et (IX *bis*) ci-après, appliquées au cas particulier dont il s'agit, la valeur de la *modification constante* à faire subir à chaque marche intégrale ou relative. — Ce cas particulier de perturbation *simultanée* à tous les chronomètres, semble être le seul ayant

chance de se présenter.—Si, par un hasard tout à fait exceptionnel, il survenait une *triple perturbation* d'un autre ordre, on en serait prévenu, parce qu'on n'arriverait à aucune conclusion rationnelle avec l'hypothèse contraire. En pareille occurrence, il faudrait recommencer la discussion de la question dans le nouvel ordre d'idées, et essayer d'en tirer des résultats rationnels et acceptables.

Quand sur *trois* chronomètres, on suppose qu'un *seul* s'est dérangé, on cherche les écarts susceptibles d'exister soit entre les valeurs *déduites* $m_{A,B}$, $m_{A,C}$, etc., et la valeur *normale* m_A de la marche INTÉGRALE de l'étalon; soit entre les valeurs *déduites* $(m_B - m_A)_d$, $(m_C - m_A)_d$ et les valeurs *normales* $(m_B - m_A)$, $(m_C - m_A)$ des marches RELATIVES, si on se sert de ces dernières marches. Cette investigation permet de reconnaître tout de suite et le chronomètre perturbé et la nature de la perturbation.

— Lorsqu'on se présume en présence d'un dérangement simultané à *deux* des chronomètres, il y a lieu d'examiner le tableau des doubles combinaisons du n° 158, et d'étudier quelle est celle de ces combinaisons qui cadre le mieux avec les mêmes écarts que ci-dessus.

De même qu'au numéro précédent, on cherche à tirer de cette tude, suivie pendant plusieurs intervalles de temps consécutifs, des données permettant de restreindre, voire même cette fois de faire disparaître complétement l'indétermination du problème, en restant en dedans des bornes de la probabilité. Dès lors, en employant la même voie et les mêmes notations qu'audit numéro, on se trouve en présence d'une série de relations qui servent à la solution de la question, et où d'ailleurs on n'a pas non plus à se préoccuper si les valeurs des marches afférentes par groupes aux divers intervalles de temps considérés, correspondent ou non à une même température moyenne. Au surplus, ainsi qu'à ce numéro et sous la même réserve, on substitue à la réalité des faits, par l'emploi de *moyennes*, un ordre de choses *fictif*, qui donne néanmoins les résultats définitifs que l'on a en vue. Cela dit, les relations précitées sont les suivantes, qui sont évidentes d'elles-mêmes :

	Avec l'emploi des marches intégrales.	Avec l'emploi des marches relatives.
	1er Intervalle de temps à partir duquel les perturbations se sont manifestées.	
IX)	$\Delta m_A - \Delta m_B = m_{A,B} - m_A$	$\Delta m_A - \Delta m_B = -\Delta(m_B - m_A)$
IX *bis*)	$\Delta m_A - \Delta m_C = m_{A,C} - m_A$	$\Delta m_A - \Delta m_C = -\Delta(m_C - m_A)$
	2e Intervalle de temps.	
X)	$\Delta m_A + \Delta' m_A - \Delta m_B - \Delta' m_B = m'_{A,B} - m'_A$	$\Delta m_A + \Delta' m_A - \Delta m_B - \Delta' m_B = -\Delta'(m_B - m_A)$
X *bis*)	$\Delta m_A + \Delta' m_A - \Delta m_C - \Delta' m_C = m'_{A,C} - m'_A$	$\Delta m_A + \Delta' m_A - \Delta m_C - \Delta' m_C = -\Delta'(m_C - m_A)$
	3e Intervalle de temps.	
XI)	$\Delta m_A + \Delta' m_A + \Delta'' m_A - \Delta m_B - \Delta' m_B - \Delta'' m_B = m''_{A,B} - m''_A$	$\Delta m_A + \Delta' m_A + \Delta'' m_A - \Delta m_B - \Delta' m_B - \Delta'' m_B = -\Delta''(m_B - m_A)$
XI *bis*)	$\Delta m_A + \Delta' m_A + \Delta'' m_A - \Delta m_C - \Delta' m_C - \Delta'' m_C = m''_{A,C} - m''_A$	$\Delta m_A + \Delta' m_A + \Delta'' m_A - \Delta m_C - \Delta' m_C - \Delta'' m_C = -\Delta''(m_C - m_A)$

. . . .

Dans toutes ces équations, les Δ de marche forment toujours les inconnues; et un plus ou moins grand nombre de ces quantités peuvent êtres nulles, suivant que les perturbations sont plus ou moins complètes. Mais cela ne peut, bien entendu, être constaté qu'*à posteriori*, lorsqu'on est parvenu à résoudre le problème. On ne s'arrêtera d'ailleurs que quand on arrivera à un intervalle de temps à partir duquel les seconds membres des équations, aux *erreurs probables* près d'observation, redeviendront *nuls*, demeureront *constants*, ou iront *en augmentant* algébriquement d'une *quantité constante*. — De même que dans le cas de deux chronomètres, pareille circonstance se manifestera d'ordinaire à partir du deuxième ou du premier intervalle de temps. Ou, sinon, cela prouvera que l'une au moins des montres est soumise à une *modification de marche continue et de grandeur variable* se perpétuant pendant un certain temps, ce qui rend le problème insoluble. — Quand il n'y a qu'une des deux séries d'équations concernant A et B d'une part, et A et C d'autre part, qui présente ce dernier caractère, on est certain qu'une des montres seulement éprouve la perturbation dont il s'agit; et on est à même de reconnaître quel est le chronomètre dérangé. Il suffit, en effet, de considérer la série d'équations afférente à l'autre paire de chronomètres, A et B, par exemple. Alors de deux choses l'une : ou cette autre série d'équations rentre dans le premier ordre de suppositions, et en pareille conjoncture le chronomètre perturbé est le chronomètre C qui ne fait pas partie de la nouvelle paire en vue; ou ladite série d'équations rentre dans l'hypothèse que nous examinons, et cela montre que le chronomètre perturbé est celui qui fait partie à la fois des deux paires considérées de chronomètres, soit A dans notre exemple. Une fois qu'on a reconnu le chronomètre ainsi per-

turbé irrégulièrement, on est naturellement obligé de le laisser de côté, et de se tirer d'affaire tant bien que mal avec les deux autres chronomètres.

Revenons au premier ordre de suppositions, c'est-à-dire à l'hypothèse où aucun chronomètre n'est soumis à une modification de marche continue variable. On sera ici à même, comme au n° 158, d'établir pour chaque intervalle de temps des équations de probabilité. Eu égard à l'inadmissibilité supposée de dérangements simultanés dans tous les chronomètres, on a en plus ici à sa disposition l'hypothèse que sur les six Δ de marche, deux de la même espèce, tels que Δm_A, $\Delta' m_A$, sont nuls à la fois. — On pourra d'ailleurs tirer quelques indications nouvelles de la comparaison des seconds membres des deux équations appartenant à un même intervalle de temps.

Ainsi, par exemple, si ces seconds membres sont égaux pour le deuxième intervalle de temps, ce sera une preuve que les Δ de marche de chacune des montres qui ne sont considérées qu'une fois dans les deux équations, sont tous deux nuls, ou sinon égaux et de signes contraires ; car, sans cela, il faudrait que les sommes des Δ de marche de ces deux montres fussent justement égales et de même signe, ce qui n'est guère vraisemblable. La résolution ultérieure des équations permettra d'ailleurs de fixer à laquelle des deux suppositions en présence il faut s'arrêter. — Au surplus, le troisième chronomètre est nécessairement ici perturbé ; et la somme de ses deux Δ de marche est justement égale à la valeur commune des deux seconds membres des équations. Suivant les circonstances, il y a alors une discussion délicate à établir pour fixer la valeur respective des deux Δ de marche en question. Nous verrons au n° 160 une intéressante application du cas que nous venons de traiter.

Enfin, les données qu'on peut posséder, comme au numéro précédent, sur le tempérament de chaque chronomètre, apporteront un nouvel appoint à l'établissement rationnel des équations de probabilité.

En tout état de cause, les équations de probabilité formeront, comme dans l'exemple du n° 158, deux séries par chaque paire de chronomètres, à cause de la possibilité d'appliquer à l'un de ceux-ci les hypothèses faites sur l'autre, et *vice versâ*. Les deux séries de la première paire de chronomètres devront être associées chacune avec les deux séries de la seconde paire. Cela fera en tout, pour chaque intervalle de temps, quatre doubles séries d'équations de probabilité. — Ces doubles séries seront combinées successivement avec les équa-

tions (IX) à (X *bis*). Les groupes d'équations ainsi formées renfermeront pour inconnues les six Δ de marche. Il faudra choisir le groupe pour lequel on trouvera des valeurs de ces six inconnues qui satisferont le mieux aux équations considérées, eu égard d'ailleurs aux erreurs probables d'observation.

— La question envisagée, comme nous venons de le faire, d'une manière générale, paraîtra en principe très-longue à résoudre. Mais avec un peu de sagacité et d'instinct, il y a moyen d'abréger beaucoup les recherches, ainsi que nous le montrerons dans l'application donnée au nº 160, notamment en s'efforçant de prévoir quelle est la série d'équations de probabilité qu'il y a lieu de combiner avec les équations de l'espèce (IX) à (X *bis*). — Néanmoins, il était indispensable de préciser la méthode rationnelle et mathématique à suivre pour l'étude des perturbations chronométriques, au lieu de la laisser complétement indécise, et de traiter, ainsi qu'on l'a fait jusqu'ici, chaque cas comme un problème particulier, résolu par des tâtonnements faits presque au hasard. Les exemples traités de cette façon, que le lecteur est à même de rencontrer dans de récents mémoires chronométriques, rentrent en fin de compte dans notre manière générale d'opérer, mais au détriment de la simplicité et de la netteté du développement de la question. — Du reste, on trouvera au nº 162 un autre mode très-pratique de résoudre le problème à l'aide des graphiques de marche.

— Quand on dispose de plus de trois chronomètres, il faut commencer par mettre hors de cause, s'ils existent, les dérangements simultanés dus aux trépidations du propulseur, et dont on peut d'ordinaire apprécier l'influence sur chaque marche.

Il est alors plausible d'admettre qu'il y a d'ordinaire deux chronomètres au moins qui concordent; et toute perturbation, autre que le dérangement sus-mentionné, est immédiatement reconnue et appréciée.

Nº 160. Exemple numérique de la recherche des perturbations dans le cas de trois chronomètres, en se servant de marches intégrales. — Pour donner une application du mode de procéder indiqué au numéro précédent, nous traiterons l'exemple suivant, dont les éléments numériques ont été empruntés au mémoire de M. de Magnac, inséré dans le 10e cahier des "*Recherches sur les chronomètres, etc.*," publiées par le Dépôt de la marine.

On est en présence des trois montres A, B, C. Pour l'intervalle de temps du 31 mars au 4 avril inclus, soit pour l'époque moyenne

3 avril, sachant d'ailleurs que la température moyenne a été de 15°, on a trouvé, à l'aide de cette température et d'un graphique des marches INTÉGRALES :

$$m_B = -0^s,24; \quad m_C = -4^s,84.$$

Combinant ces valeurs avec le quotient par 5 des comparaisons de A à B, et de A à C, prises le 31 et le 4, on a obtenu pour les valeurs *déduites* convenant à la marche INTÉGRALE de l'étalon A :

$$m_{A,B} = +1^s,66; \quad m_{A,C} = +2^s,36.$$

D'ailleurs, la courbe de l'étalon donne directement pour la valeur normale de sa marche :

$$m_A = +0^s,64.$$

Voilà trois marches de A qui ont des différences très-sensibles. Cherchons si ces différences sont dans les limites des *erreurs probables* d'observation. A cet effet, suivons les indications du n° 156; et adoptons :

0s,3 pour l'erreur sur la marche normale de l'étalon A calculée en rade;
0s,4 pour l'erreur sur les marches B et C déduites de celles de A en rade;
0s,3 pour l'erreur sur chacune des comparaisons qui sont ici espacées de 5 jours;
0s,1 } pour l'erreur d'extrapolation afférente { au chronomètre A;
0s,3 } pour l'erreur d'extrapolation afférente { au chronomètre B;
0s,2 } pour l'erreur d'extrapolation afférente { au chronomètre C.

L'inégalité de ces trois erreurs d'extrapolation provient des différences de sensibilité des trois chronomètres aux variations de température, différences que dénotent les écarts plus ou moins grands des lignes isothermes de chaque montre.

On aura donc d'après le n° 128 :

$$\textit{Erreur probable sur } m_A = \pm\sqrt{(0^s,3)^2 + (0^s,1)^2} = \pm 0^s,32;$$

$$\textit{Erreur probable sur } m_{A,B} = \pm\sqrt{(0^s,4)^2 + \frac{(0^s,3)^2 \times 2}{5^2} + (0^s,3)^2} = \pm 0^s,50;$$

$$\textit{Erreur probable sur } m_{A,C} = \pm\sqrt{(0^s,4)^2 + \frac{(0^s,3)^2 \times 2}{5} + (0^s,2)^2} = \pm 0^s,45.$$

Et par suite, il vient :

$$\textit{Erreur probable sur } (m_A - m_{A,B}) = \pm\sqrt{(0^s,32)^2 + (0^s,50)^2} = \pm 0^s,60;$$

$$\textit{Erreur probable sur } (m_A - m_{A,B}) = \pm\sqrt{(0^s,32)^2 + (0^s,45)^2} = \pm 0^s,55.$$

Mais les diverses valeurs de la marche *intégrale* de A, obtenues ci-dessus, donnent les écarts suivants :

$$m_{A,B} - m_A = +1^s,02; \quad m_{A,C} - m_A = +1^s,72.$$

Ces écarts sont en dehors des limites que nous venons d'assigner. Donc deux chronomètres au moins ont subi des perturbations. Au



surplus, comme lesdites limites sont assez importantes, si même les écarts ne se trouvaient être qu'un peu au-dessous d'elles, on serait encore en droit de craindre l'existence de perturbations de l'ordre de grandeur de ces limites. — Ceci constitue l'infériorité (nº 156) de l'usage des marches INTÉGRALES sur celui des marches RELATIVES, dans la recherche des perturbations. Car, avec ces dernières marches, on arrive, ainsi que nous le verrons au numéro suivant, à des limites beaucoup plus restreintes.

Quoi qu'il en soit, calculons, en second lieu, les diverses valeurs de la marche INTÉGRALE de A convenant à l'intervalle de temps du 5 au 9 avril inclus. A cet effet, en nous servant de la connaissance de la température moyenne 17° afférente à cet intervalle, pour l'appréciation des valeurs normales des marches de A, B et C, nous aurons d'abord : $m'_A = +0^s{,}58$, $m'_B = -1^s{,}08$, $m'_C - 4^s{,}88$. De là, nous conclurons pour la marche de A :

Valeur normale. . . . . $m'_A = +0^s{,}58$;
Valeur déduite provenant de B, $m'_{A,B} = +1^s{,}42$;
Valeur déduite provenant de C, $m'_{A,C} = +1^s{,}52$.

Ainsi que nous l'avons dit aux nºˢ 158 et 159, il n'y a pas lieu de se préoccuper, dans ce qui va suivre, de ce qu'il y a inégalité entre les températures moyennes 15° et 17° afférentes aux deux intervalles de temps considérés. — Quoi qu'il en soit, les quantités $m'_{A,B}$ et $m'_{A,C}$ sont ici égales entre elles dans la limite des *erreurs probables* d'observation, tandis que m'_A est très-différent. Il y a évidemment continuation de perturbations. Nous poserons donc, conformément au nº 159, les équations suivantes :

1ᵉʳ Intervalle de temps, du 31 mars au 4 avril inclus. . . . .

$m_{A,B} - m_A = 1^s{,}66 - 0^s{,}64 = +1^s{,}02$;
$m_{A,C} - m_A = 2^s{,}36 - 0^s{,}64 = +1^s{,}72$;

et par suite :

(XII) $\Delta m_A - \Delta m_B = +1^s{,}02$;
(XII *bis*) $\Delta m_A - \Delta m_C = +1^s{,}72$.

2ᵐᵉ Intervalle de temps, du 5 au 9 avril inclus. . . . .

$m'_{A,B} - m'_A = 1^s{,}42 - 0^s{,}58 = +0^s{,}84$;
$m'_{A,C} - m'_A = 1^s{,}52 - 0^s{,}58 = +0^s{,}94$;

et par suite :

(XIII) $\Delta m_A + \Delta' m_A - \Delta m_B - \Delta' m_B = +0^s{,}84$;
(XIII *bis*) $\Delta m_A + \Delta' m_A - \Delta m_C - \Delta' m_C = +0^s{,}94$.

A partir du deuxième intervalle, les seconds membres des équations demeurent sensiblement constants, et égaux à ceux de ce deuxième intervalle, ce qui indique que la période des dérangements est terminée. — Les inconnues, qui sont les Δ des diverses marches, se trouvent

ici au nombre de six; et nous n'avons, pour les trouver, que les quatre équations (XII) à (XIII *bis*). Mais des considérations de divers ordres vont nous procurer des équations de probabilité, et nous mettre à même d'achever le problème.

Remarquons d'abord que les seconds membres des équations devenant constants à partir du deuxième intervalle de temps, cela prouve qu'aucune des marches n'est atteinte d'une *modification continue se prolongeant*.—D'autre part, les seconds membres des équations (XIII) et (XIII *bis*) ne diffèrent entre eux que d'une quantité bien inférieure à la limite des *erreurs probables* d'observation. Nous les regarderons donc comme égaux entre eux, et valant chacun la quantité moyenne $\frac{+0^s,84+0^s,94}{2}=+0^s,89$. Or, conformément aux indications du n° 159, nous tirerons déjà de là les deux équations de probabilité :

$$\Delta m_B+\Delta' m_B=0;\quad \Delta m_C+\Delta' m_C=0.$$

Cela exige que les deux Δ de marche de chacun des chronomètres B et C se trouvent nuls, ou sinon soient égaux et de signes contraires. Avant de voir laquelle de ces deux hypothèses convient à B et à C, remarquons que les équations (XIII) et (XIII *bis*) se fondent évidemment en une seule, qu'on peut écrire d'après ce qui a été dit plus haut :

$$\Delta m_A+\Delta' m_A=+0^s,89.$$

Mais comme nous savons que, pour aucun des chronomètres et en particulier pour A, la marche n'est affectée d'une *modification continue se prolongeant*, et comme de plus, en vertu de l'équation précédente, Δm_A ne saurait s'annuler en même temps que $\Delta' m_A$, la perturbation du chronomètre A ne peut consister qu'en un *saut de marche*, accompagné ou non d'un *saut d'état absolu*. — Dans la supposition d'un saut de marche seul, on aurait l'équation de probabilité : $\Delta' m_A$ ou $\Delta m_A=0$, suivant que A se serait dérangé dès le premier intervalle de temps ou dès le second; et il n'y aurait eu double perturbation qu'à un des intervalles. Mais, dans la présomption que, sur les trois chronomètres, deux seulement ont été dérangés, et eu égard à ce qu'aucune des équations (XII) et (XII *bis*) relatives au premier intervalle de temps n'est nulle, le double dérangement a dû se produire dès ce premier intervalle; et la supposition qui nous occupe comporte, selon toute vraisemblance, $\Delta' m_A=0$. — Maintenant si A avait éprouvé à la fois *saut de marche* et *saut d'état absolu*, Δm_A et $\Delta' m_A$

auraient tous deux une valeur différent de zéro. — Mais cette seconde supposition étant infiniment moins vraisemblable que la première, il est tout à fait rationnel de commencer par essayer celle-ci. On a de la sorte :

$$\Delta m_A = +0^s,89.$$

Cette valeur introduite dans (XII) et (XII *bis*) donne :

$$\Delta m_B = +0^s,89 - 1^s,02 = -0^s,13;$$
$$\Delta m_C = +0^s,89 - 1^s,72 = -0^s,83.$$

Le second membre de la première de ces équations est en dessous des limites des erreurs probables d'observation. D'ailleurs, eu égard à la présomption que sur les trois chronomètres il n'y en a que deux de dérangés, comme A l'est certainement, B ou C ne l'est pas ; nous serons donc en droit de conclure que ledit second membre doit être considéré comme nul, et que dès lors B n'a pas été perturbé.

En ce qui concerne C, l'équation de probabilité $\Delta m_C + \Delta m'_C = 0$ admise ci-dessus combinée avec $\Delta m_C = -0^s,83$, donne :

$$\Delta' m_C = +0^s,83.$$

— De toute cette discussion, il résulte que l'ensemble des perturbations constatées s'explique de la manière la plus rationnelle et par conséquent la plus acceptable de la manière suivante, où les corrections indiquées se trouvent forcément affectées des erreurs probables d'observation, lesquelles, ne l'oublions pas (n° 156), peuvent s'élever jusqu'à $0^s,6$ environ avec l'emploi des marches intégrales :

1° Le chronomètre A a subi du 31 mars au 4 avril inclus un *saut de marche* de $+0^s,89$. A partir du 5, sa marche normale, à la température de 15°, est devenue $0^s,65 + 0^s,89 = +1^s,54$. — Il faut bien comprendre d'ailleurs que ce saut de marche a pu se produire d'un seul coup, ou s'effectuer successivement pendant les cinq jours de l'intervalle de temps auquel il appartient, de façon alors à valoir en *moyenne* la quantité ci-dessus.

2° Le chronomètre B n'a éprouvé aucune perturbation. Sa marche normale n'a pas varié, et est demeurée $-0^s,24$ pour la température de 15°.

3° Le chronomètre C a subi, dans sa marche, une *modification diurne continue variable*, mais n'existant que pendant les deux intervalles de temps considérés. D'ailleurs, cette modification a affecté en moyenne la valeur normale de la marche de $-0^s,83$ pour chacun des cinq premiers jours, et de $(-0^s,83 + 0^s,83) = 0$, pour chacun des cinq jours



suivants. — Conséquemment, pour avoir le 10 avril, l'état absolu de C, considéré comme un RETARD selon l'habitude actuelle, on devra augmenter de $0^s,83 \times 5 = 4^s,15$, la grandeur de cet état calculé avec les valeurs normales de la marche de C du 31 mars à la date précitée. Cette correction s'opérera une fois pour toutes. Au surplus, comme C ne sert pas ici d'étalon, il n'y aurait même pas à se préoccuper de cette correction. — Il importe de noter, ainsi qu'on en a prévenu au n° 156, qu'on pourrait aussi regarder ladite modification continue de la marche durant les deux intervalles de temps, comme un *saut d'état absolu* qui se serait produit pendant le premier intervalle, en augmentant plus ou moins brusquement le *retard* du chronomètre de $0^s,83 \times 5 = 4^s,15$. Ce n'est qu'en suivant jour par jour les comparaisons de C avec A et B, soit numériquement, soit de préférence sur un graphique de marche, qu'on pourra être fixé sur la réalité des choses. Nous verrons au n° 162, que c'est le premier phénomène qui s'est produit effectivement. — Dans tous les cas, à partir du 10 avril le chronomètre C cessant d'être perturbé, il y aura lieu de le reconsidérer désormais avec sa marche primitive normale de $-4^s,84$, pour 15° de température.

— Il va de soi que pour calculer les longitudes du navire du 31 mars au 9 avril inclus, le mieux serait, tout en conservant, suivant le principe convenu (n° 156), l'emploi exclusif de l'état absolu de l'étalon A, de calculer les valeurs successives de cet état à l'aide de la marche de A déduite de B.

D'autre part, d'après ce qui a été expliqué au n° 149, la perturbation que nous venons de constater pour la marche normale de A, donne lieu à une rectification sur le graphique des chronomètres. Cette rectification consistera en un transport vertical, et parallèlement à elles-mêmes, des portions de lignes isothermes extrapolées, ledit transport ayant pour valeur celle du *saut de marche* constaté. — Pour le chronomètre B, il n'y aura rien à retoucher à son graphique de marche. — Enfin, pour le chronomètre C, on devra reporter sur son graphique l'influence de la perturbation survenue du 31 mars au 9 avril inclus. Mais au delà de cette dernière date, les lignes isothermes déjà tracées par extrapolation, seront conservées sans aucune modification.

N° 161. Exemple numérique de la recherche des perturbations dans le cas de trois chronomètres, en se servant des marches relatives. — Au lieu de traiter l'exemple précédent à l'aide des marches INTÉGRALES, on peut, au grand avantage

de la rigueur, le résoudre en se servant des marches RELATIVES. Il faut pour cela connaître ces dernières marches en rade, puis en tirer par *extrapolation* leurs valeurs normales à la mer. En agissant de la sorte, on trouve pour les marches RELATIVES de B à A et de C à A, du 31 mars au 4 avril inclusivement, que les différences entre les valeurs *déduites* moyennes $(m_B - m_A)_d$ et les valeurs *normales* moyennes $(m_A - m_B)$ atteignent :

$$\Delta(m_B - m_A) = -1^s,02; \quad \Delta(m_C - m_A) = -1^s,62.$$

Du 5 au 9 avril inclus, les différences de l'espèce en question valent :

$$\Delta'(m_B - m_A) = -0^s,84; \quad \Delta'(m_C - m_A) = -0^s,94.$$

Conformément à ce qui a été dit aux nos 158 et 159, nous conserverons ces quantités telles quelles, sans nous préoccuper aucunement de ce que la température moyenne du second intervalle n'est pas égale à celle du premier. — Dès lors, en vertu des équations (IX) à (XI *bis*) du n° 159 appliquées aux marches RELATIVES, nous obtiendrons :

1er intervalle de temps, du 31 mars au 4 avril inclus............
(XIV) $\Delta m_A - \Delta m_B = +1^s,02$;
(XIV *bis*) $\Delta m_A - \Delta m_C = +1^s,62$;

2e intervalle de temps, du 5 au 9 avril inclus..................
(XV) $\Delta m_A + \Delta' m_A - \Delta m_B - \Delta' m_B = +0^s,84$;
(XV *bis*) $\Delta m_A + \Delta' m_A - \Delta m_C - \Delta' m_C = +0^s,94$.

A partir du troisième intervalle de temps, les seconds membres des équations demeurent sensiblement constants et égaux à ceux du second intervalle. Dès lors, aucun des chronomètres n'est soumis à une *modification de marche continue se polongeant*. Donc toutes les perturbations ont effectué leur évolution du 31 mars au 9 avril inclus. — Par ailleurs, on est conduit par des considérations entièrement analogues à celles énoncées au numéro précédent, à poser :

$$\Delta m_A = \frac{+0^s,84 + 0^s,94}{2} = +0^s,89; \quad \Delta' m_A = 0;$$

$\Delta m_B = 0^s,89 - 1^s,02 = -0^s,13$; soit, aux erreurs près d'observation, $\Delta' m_B = 0$;

$$\Delta m_C = 0^s,89 - 1^s,62 = -0^s,73.$$

Il importe de remarquer que les résultats précédents pourraient différer assez notablement de ceux obtenus dans le numéro précédent à l'aide des marches INTÉGRALES. Cela provient des considérations du n° 156, d'où il suit que les erreurs probables d'observation peuvent s'élever à 0s,6 avec ces dernières marches, et à 0s,2 avec les marches RELATIVES, dont l'avantage, nous ne saurions trop le répéter, consiste

dans cette plus grande précision d'appréciation. — Il peut résulter de ce chef important, entre les résultats déduits de l'un ou de l'autre moyen, des écarts susceptibles d'avoir comme erreur probable $\pm\sqrt{(0^s,6)^2 + (0^s,2)^2} = \pm 0^s,63$. Donc tant que les différences trouvées entre les deux modes d'opérer seront au-dessous de cette limite, elles se trouveront parfaitement acceptables.

N° 162. Recherche des perturbations chronométriques à l'aide des graphiques de marche, et en particulier à l'aide d'isotemps de marches relatives. — Ce mode de recherche, proposé par M. Rouyaux, n'offre peut être pas le même degré de généralité que la méthode analytique. Il a aussi l'inconvénient de donner des résultats moins précis, à moins de forcer les échelles des températures et des marches. Mais il offre sur cette méthode l'avantage de suivre de plus près la succession des phénomènes, au lieu de ne les apprécier que par des *moyennes* (nos 158 et 159). Bien qu'il puisse s'appliquer à un graphique de marche INTÉGRALE, il vaut mieux, en principe, s'en servir avec les marches RELATIVES, à cause de la plus grande approximation que fournissent celles-ci (n° 161) pour l'estimation de la grandeur même des perturbations. — Au surplus, il s'associe naturellement aux graphiques d'*isotemps*, qu'il est toujours facile de se procurer à l'aide de quelques bonnes données de rade (n° 150). En se rappelant les remarques faites au n° 147 sur la *permanence* des paraboles d'isotemps, on voit que le tracé en question étant ainsi assuré, l'usage desdits graphiques sera applicable dans tous les cas, aussi bien au début d'une campagne qu'à la suite d'anciennes perturbations. Cette généralité complète de l'usage en question, jointe à son caractère géométrique, lui assure un rôle prédominant dans la question qui nous occupe.

Nous allons donner une application du procédé dont il s'agit sur le même exemple que celui que nous avons traité par la méthode analytique aux nos 160 et 161.

Du registre des comparaisons, on extrait les valeurs moyennes des marches relatives de B et de C par rapport à A, et de B par rapport à C, *en choisissant des périodes faisant ressortir aussi bien que possible les changements de température.* Ce choix, soit dit en passant, explique pourquoi on trouve quelques dates fractionnaires, telles que 24,5 mars. Le point de départ des dates est d'ailleurs l'heure à laquelle se prennent tous les matins les comparaisons. Nous aurons ainsi le tableau suivant :

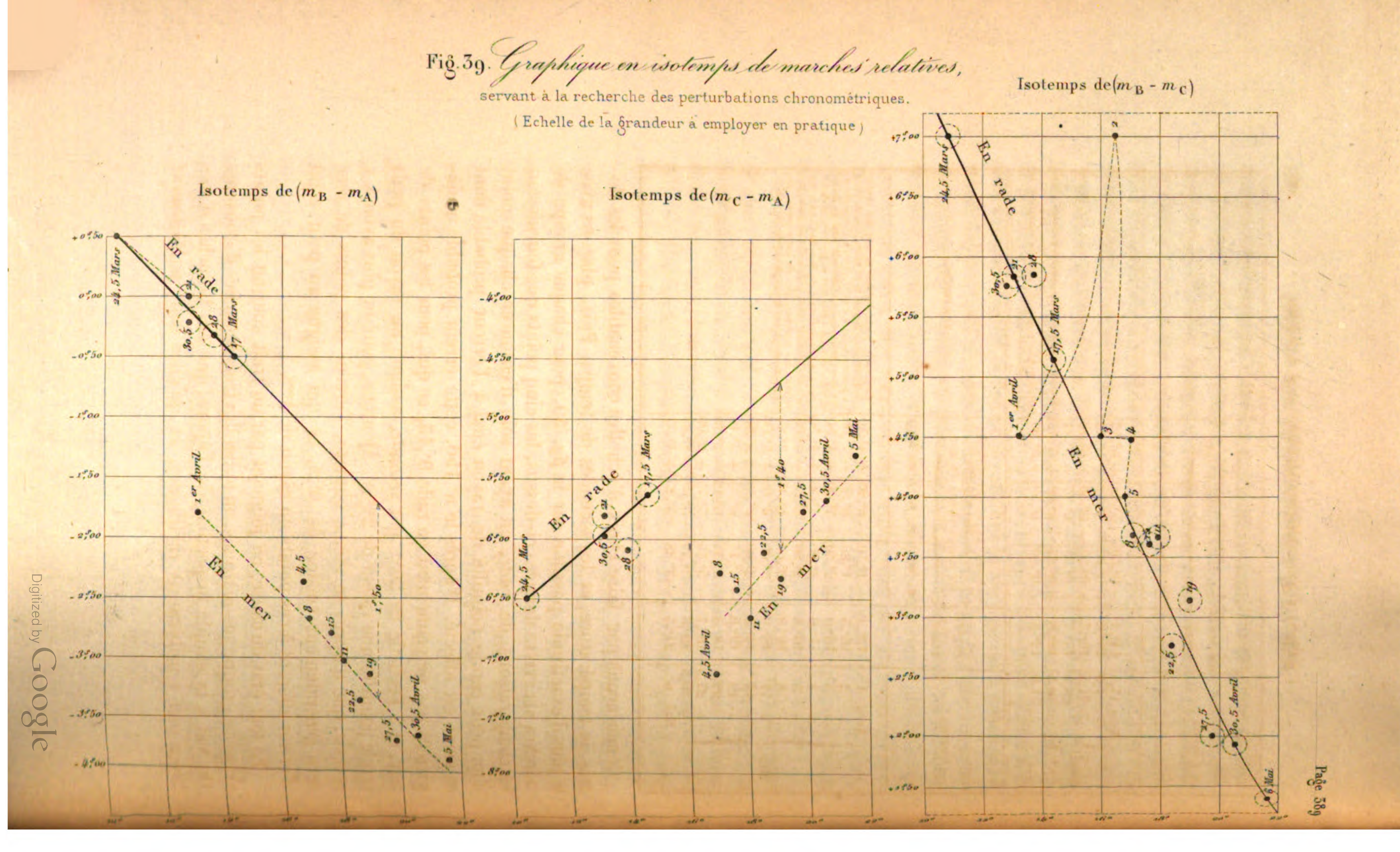


Fig. 39. *Graphique en isotemps de marches relatives,* servant à la recherche des perturbations chronométriques.
(Echelle de la grandeur à employer en pratique)

DATES.		TEMPÉRATURES.	MARCHES RELATIVES *normales*, calculées à l'aide des comparaisons de rade.			REMARQUES.
			(m_B-m_A)	(m_C-m_A)	(m_B-m_C)	
RADE.	Mars 17,5	14°,4	$-0^s,50$	$-5^s,62$	$+5^s,12$	
	» 21,0	13°,0	$+0^s,00$	$-5^s,82$	$+5^s,82$	
	» 24,5	10°,7	$+0^s,50$	$-6^s,50$	$+6^s,00$	
	» 28,0	13°,7	$+0^s,33$	$-6^s,17$	$+5^s,84$	
	» 30,5	12°,8	$+0^s,25$	$-6^s,00$	$+5^s,75$	Il était important de donner les marches pour le 31 même, afin de mieux montrer la perturbation qui se manifeste sur ces quantités à partir de ladite date.
	» 31,0	12°,8	$-0^s,50$	$-6^s,50$	$+6^s,00$	

DATES.		TEMPÉRATURES.	MARCHES RELATIVES *déduites*, calculées à l'aide des comparaisons de mer.			REMARQUES.
			$(m_B-m_A)_d$	$(m_C-m_A)_d$	$(m_B-m_C)_d$	
MER.	Avril 1	13°,2	$-1^s,70$	$-6^s,20$	$+4^s,50$	Comme les perturbations se sont fait sentir principalement depuis le 31 mars jusque dans les premiers jours d'avril, et qu'à l'inspection des comparaisons on reconnaît tout de suite qu'elles ont un effet fort complexe, notamment sur la corrélation de B et de C, on a inscrit de *jour* en *jour*, pour cette période, les valeurs des marches, afin de les reporter de même, au moins sur le graphique de (m_B-m_C).
	» 2	16°,5	$-1^s,80$	$-8^s,80$	$+7^s,00$	
	» 3	16°,0	$-2^s,50$	$-7^s,00$	$+4^s,50$	
	» 4	17°,0	$-3^s,00$	$-7^s,50$	$+4^s,50$	
	» 5	16°,8	$-2^s,00$	$-6^s,00$	$+4^s,00$	
	» 8	16°,8	$-2^s,68$	$-6^s,33$	$+3^s,65$	
	» 11	18°,0	$-3^s,00$	$-6^s,66$	$+3^s,66$	
	» 15	17°,5	$-2^s,80$	$-6^s,40$	$+3^s,60$	
	» 19	19°,0	$-3^s,17$	$-6^s,33$	$+3^s,16$	
	» 22,5	18°,4	$-3^s,37$	$-6^s,12$	$+2^s,75$	
	» 27,5	19°,7	$-3^s,75$	$-5^s,75$	$+2^s,00$	
	» 30,5	20°,5	$-3^s,70$	$-5^s,63$	$+1^s,93$	
	Mai 6	21°,5	$-3^s,88$	$-5^s,25$	$+1^s,37$	

Commençons par faire choix d'échelles convenables pour les degrés de température, et les secondes de temps. Puis, plaçons avec le plus d'exactitude possible sur la *fig.* 39, pour chaque groupe de marches RELATIVES données ci-dessus, les cinq points que fournissent les comparaisons de *rade*, en ayant soin d'entourer chaque point d'un petit cercle pointillé de rayon égal à l'erreur probable dont ce point est affecté. D'après le n° 156, cette erreur probable ne dépassera pas moyennement en rade $0^s,13$, ce qui, pour les points de mer, et à l'échelle de 20^{mm} par *seconde*, assigne au rayon du petit cercle pointillé une valeur de $2^{mm},6$. Ajoutons, pour ne plus avoir à y revenir, que d'après le même numéro, l'erreur des points de mer sera généralement voisine de $0^s,2$, ce qui assigne au petit rond d'erreur afférent à ces points un rayon de 4^{mm}.

En tout état de cause, en joignant par un trait continu les points de même groupe sus-marqués, on obtiendra trois branches d'*isotemps*. On voit à la simple inspection de l'épure, que ces branches d'*isotemps* sont sensiblement rectilignes, et qu'elles sont *parfaitement*

compatibles avec les données de l'observation. On est donc en droit de les prolonger, et d'avoir ainsi par extrapolation les valeurs *normales* que devront conserver les marches RELATIVES. — Si, pendant la durée du séjour en rade, la température était restée stationnaire, les cinq points qui servent au tracé de la branche d'*isotemps* se confondraient en un seul; et la direction de la branche en question se trouverait indéterminée. Néanmoins, la méthode n'est pas en défaut; car, en vertu d'une des propriétés des isotemps signalée au n° 147, il n'y a qu'à prendre un isotemps antérieur, et à le faire glisser d'un mouvement parallèle à l'axe des marches jusqu'à ce qu'il passe par le point unique que l'on possède. D'ailleurs, toutes les fois que les points de rade seront insuffisants pour *déterminer nettement* la branche d'isotemps dont on a besoin, il conviendra de se reporter à un isotemps antérieur, qu'on découpera après l'avoir tracé sur du papier épais, et qu'on cherchera, tout en gardant exactement sa direction, à placer de façon qu'il passe le mieux possible par l'ensemble des points, ou plutôt des petits cercles pointillés que l'observation a fournis.

Portons maintenant sur les graphiques, à l'aide des comparaisons *de mer*, les points qui en résultent, en ayant soin, d'après ce que nous avons dit dans les « *Remarques* » du second des deux tableaux ci-dessus, de tracer en particulier pour $(m_B - m_C)_d$ les points de jour en jour au commencement d'avril. — On reconnaitra très-nettement alors les circonstances suivantes :

1° Dès le premier avril, jour de l'appareillage, la marche RELATIVE $(m_B - m_A)_d$ a sauté subitement d'environ $-1^s,50$; et elle a conservé ensuite, en gardant ce changement, une allure régulière parallèle à son allure de rade.

2° Entre le 31 mars et le 5 avril inclus, les marches RELATIVES $(m_C - m_A)_d$ et $(m_B - m_C)_d$ ont des allures très-irrégulières, annonçant l'existence de perturbations.

3° A partir du 8 avril, ces deux marches RELATIVES sont revenues à une allure régulière, qu'elles gardent dans la suite. L'effet de cette circonstance est de redonner à la marche $(m_B - m_C)_d$ son allure même de rade, comme si les perturbations ne s'étaient pas produites, et à la marche relative $(m_C - m_A)_d$ une allure parallèle avec une diminution constante de $1^s,40$ environ.

On peut donc conclure qu'entre le 31 mars et le 8 avril inclus, s'étend une période de perturbations s'exerçant sur deux chronomètres au moins ; car les trois marches relatives ont été troublées. A partir du 8 avril s'étend au contraire une période régulière, dans

laquelle le système complet des trois chronomètres a repris une sorte d'équilibre, qui ne sera plus dérangé. Avant d'aller plus loin, il importe de remarquer que la période des perturbations présentement trouvée diffère un peu de celle que nous avons admise aux nos 160 et 161, et qui s'étend du 31 mars au 9 avril. C'est que là on a opéré par période de temps unitaire de la longueur adoptée; tandis qu'ici nous avons suivi les choses jour par jour. — Quoi qu'il en soit, il est facile de reconnaître comment la nouvelle période régulière diffère de la période normale qui existerait si les allures de rade s'étaient maintenues. Les marches RELATIVES normales $(m_B - m_A)$ et $(m_C - m_A)$ ont éprouvé, en effet, une diminution commune de $1^s,45$ (moyenne entre les chiffres $1^s,50$ et $1^s,40$, qui ne diffèrent entre eux que d'une quantité inférieure aux erreurs probables de comparaison); et la marche RELATIVE $(m_B - m_C)$ a repris ses valeurs de rade. Il est donc extrêmement vraisemblable que les chronomètres B et C ne sont plus troublés, et que le chronomètre A a subi dans sa marche un accroissement constant de $1^s,45$. Cette nouvelle période régulière ne présente donc aucune difficulté sérieuse pour être expliquée.

Tâchons maintenant de préciser ce qui s'est passé du 31 mars au 8 avril inclus, c'est-à-dire pendant la période de perturbations. L'isotemps de la marche RELATIVE $(m_B - m_A)$ nous apprend que la période régulière, qui ne recommence que le 8 avril pour le système complet des trois chronomètres, reprend dès le premier jour pour ladite marche, et par suite pour l'ensemble des deux chronomètres A et B (*). Or nous savons que l'effet final de cette période régulière est de laisser le chronomètre B indemne de toute perturbation, et d'imprimer à la marche du chronomètre A un accroissement constant de $1^s,45$. — Nous devons donc supposer que cet effet se produit dès le premier jour, et poser la conclusion suivante :

Le chronomètre B *n'a subi aucune perturbation. — De son côté, le chronomètre* A *a éprouvé, dès le premier jour, une perturbation en vertu de laquelle la valeur normale* m_A *de sa marche gardera dans la suite un accroissement constant de* $1^s,45$.

Il ne reste plus dès lors qu'à trouver la manière dont s'est comporté le chronomètre C. Mais puisque le chronomètre B n'a pas

(*) Le tracé jour par jour de l'isotemps de la marche relative $(m_B - m_A)_d$ montrerait que cette conclusion n'est rigoureuse qu'à $0^s,1$ ou $0^s,2$ près, déduction faite des erreurs probables de comparaison. Toutefois, il ne faut recourir qu'avec circonspection à ce tracé jour par jour; car, en détruisant les moyennes, il fait perdre tout le bénéfice de la compensation des erreurs.



été troublé, les perturbations de la marche relative ($m_B - m_C$) sont dues exclusivement à la marche m_C. La simple inspection de l'isotemps de ($m_B - m_C$), qu'on a eu soin, comme il a été dit dans le tableau ci-dessus, de pointer jour par jour pendant toute la période de perturbation, mène à la conclusion suivante :

Le chronomètre C *a éprouvé, à partir du* 31 *mars, une série de modifications de marche inégales en grandeur et en signe.*

Pour apprécier les modifications dont il s'agit, on mesure les distances des points erronés à la ligne isotemps extrapolée. On estime d'ailleurs ces distances le long des ordonnées qui passent par les points; et on les compte *positivement* ou négativement, suivant qu'elles font *diminuer* ou augmenter ALGÉBRIQUEMENT la marche relative ($m_B - m_C$). On à ainsi :

Différences entre les valeurs *perturbées* et les valeurs *normales* de m_C.	Pour le 31 mars $0^s,00$,	Pour le 5 avril $-0^s,15$.
	Id. le 1er avril $+1^s,25$,	*Id.* le 6 avril $-0^s,07$,
	Id. le 2 avril $-2^s,90$,	*Id.* le 7 avril $-0^s,03$.
	Id. le 3 avril $-0^s,25$,	*Id.* le 8 avril $0^s,00$,
	Id. le 4 avril $-0^s,75$,	*Id.* le 9 avril $0^s,00$.

D'après le tableau ci-dessus, le chronomètre C reprend sa marche *normale* à partir du 8 avril; et, en somme, ses perturbations du 31 mars à la date précédente se résument en une modification de la valeur de l'état absolu calculée comme si la marche n'avait pas été perturbée. Cette modification, accumulée du 31 mars au 8 avril inclus, n'est autre que la somme algébrique des diverses quantités du tableau. Elle vaut donc $-2^s,90$.

Afin de pouvoir comparer le procédé actuel avec les méthodes analytiques pour la recherche des perturbations chronométriques, nous combinerons *fictivement* le chiffre ci-dessus avec une période de 10 jours s'étendant du 31 mars au 9 avril, comme aux nos 160 et 161. Nous trouverons ainsi que, du 31 mars au 4 avril, on aurait $\Delta m_C = -0^s,29 = 1/10$ de $-2^s,90$, et, du 5 au 9 avril, $\Delta' m_C = +0^s,29$. — Ces résultats, ainsi du reste que le nombre $+1^s,45$ qu'on a trouvé plus haut pour Δm_A, diffèrent sensiblement des chiffres correspondants obtenus auxdits numéros. Il convient d'insister sur la cause de cette différence. Nous avons prévenu au n° 154 que lorsqu'on était en présence de chronomètres très-sensibles aux changements de température, il importait de restreindre la longueur des intervalles de temps *unitaires*. Or c'est ce qui n'a pas été fait pour les données qui ont servi de base aux calculs des deux numéros en question, bien que, parmi les chronomètres considérés, C et plus encore B fussent affectés de ladite sensibilité. On conçoit dès lors que du chef précé-

dont il soit résulté des inexactitudes notables de report et de lecture sur le graphique de marche, où il a fallu entrer avec la température moyenne, tandis que ces causes importantes d'erreur ont été évitées avec l'usage des lignes isotemps.

En résumé, outre que cet usage offre plus de précision pour les questions de l'espèce qui nous occupe, il présente l'avantage d'avoir recours autant aux yeux qu'au raisonnement. Dès lors, les choses se présentent d'une manière beaucoup plus lucide qu'avec les méthodes analytiques (nos 160 et 161); et on est à même de serrer le problème de plus près. D'ailleurs, il y a ici bien moins de fatigue d'esprit qu'avec lesdites méthodes, ce qui rend le procédé accessible à tous les officiers.

— Les résultats précités pourraient aussi se déduire d'un graphique d'*isothermes*, qui, lorsqu'il est applicable, comporte même une précision un peu plus grande.

Mais il convient de rappeler (n° 150) qu'un pareil graphique fait souvent défaut au début d'une campagne, par manque d'observations en nombre suffisant, et que, de plus, il est sujet à caution quand il y a eu des perturbations antérieures trop fréquentes. Ce manque de généralité constitue donc une infériorité sur les isotemps, dont l'emploi se recommande dès lors tout particulièrement pour le problème que nous venons de traiter.

N° 162. Étude particulière de l'influence des trépidations du propulseur sur les chronomètres. — M. Rouyaux s'est occupé spécialement de cette question sur le *Decrès*. Nous avons vu au n° 159 qu'elle est d'une importance capitale; car la perturbation pouvant affecter ici tous les chronomètres à la fois, quel qu'en soit le nombre, le problème de la recherche des perturbations demeure indéterminé dans tous les cas. — Heureusement que les effets de cette perturbation doivent, en général, être regardés comme très-faibles, et rentrant presque toujours dans les limites des erreurs probables d'observation, puisque jusqu'ici les navigateurs ne les avaient pas signalés, et que M. Rouyaux les a trouvés très-restreints à bord du *Decrès*, où les chronomètres étaient cependant placés à l'arrière du navire, là où les trépidations de l'hélice se faisaient sentir le plus vivement. Cet habile officier a d'ailleurs constaté que les effets en question avaient entre eux un certain rapport d'un chronomètre à un autre, ce qui constitue, comme nous l'avons dit au n° 159, un nouvel élément pour restreindre l'indétermination sus-mentionnée.

A bord du *Decrès*, l'influence des trépidations de l'hélice ressortait à première vue de l'inspection du graphique des marches RELATIVES,

par un *relèvement* de toutes les *isothermes durant chaque période à la mer*, ce qui indiquait une *modification continue* (n° 157) desdites marches. Les déviations n'étaient pas considérables; mesurées à l'échelle des marches, elles variaient de 0ˢ,3 à 0ˢ,9; et ces limites restreintes font voir, d'après le n° 156, qu'elles ne se seraient pas révélées avec un graphique de marches INTÉGRALES. — On les a prises longtemps pour des perturbations inexplicables. Mais quand, peu à peu, on a eu remarqué leur sens constant, leur absence en rade et leur présence en mer, il a fallu rechercher leurs relations avec des circonstances spéciales de navigation. Les trépidations de l'hélice se sont présentées comme l'explication la plus naturelle, surtout quand, en particulier, une de leurs plus fortes manifestations se fut produite dans un voyage de rivière.

Pourtant, comme le fait dont il s'agit n'existait jusqu'ici qu'à l'état de soupçon, M. Rouyaux se proposa de corroborer son existence, par une voie indépendante du graphique de marche formé d'isothermes. A cet effet, il a simplement construit, pour la période voisine de chaque traversée, les *isotemps* de marches RELATIVES, c'est-à-dire (n° 147) les courbes de ces marches en fonction de la température, le temps ne pouvant avoir d'influence à cause de la petitesse des périodes étudiées. — Les courbes, qui auraient dû former chacune très-sensiblement une ligne droite, au cas où les marches auraient conservé leurs valeurs normales, offraient toutes des protubérances positives ou négatives. Ces protubérances commençaient dès le début de la traversée, et décroissaient rapidement dès la cessation du fonctionnement de l'hélice. Un pareil exemple, que l'on pourrait du reste corroborer en prenant au hasard une des nombreuses périodes de mer du *Decrès*, suffit bien pour montrer jusqu'à quel point les trépidations de l'hélice sont de nature, dans certaines conditions, à influencer les chronomètres.

Toutefois, M. Rouyaux s'est surtout attaché à mettre en évidence l'existence de la perturbation dont il s'agit; et il a cru prématuré d'en rechercher les lois, lois qui ne peuvent être qu'assez complexes. — Tout ce qu'on peut dire présentement, c'est que cette perturbation doit varier non-seulement d'un navire à l'autre, eu égard d'ailleurs à la situation de l'armoire des montres par rapport au propulseur, mais encore d'un chronomètre à l'autre. Par ailleurs, pour un emplacement déterminé de ladite armoire et pour un propulseur donné, le principal élément à considérer est évidemment l'allure de la machine qui détermine la vivacité des trépidations. Il semble au premier abord

que la perturbation résultante doit croître d'une façon constante, sinon proportionnellement avec cette allure. Ce fait n'a pas été vérifié à bord du *Decrès*. Il est peut-être en partie masqué par d'autres influences, dont la plus naturelle doit être le synchronisme des mouvements de l'hélice et des battements du chronomètre.

On voit, d'après tout cela, que la question qui nous occupe est à peine élucidée. Mais c'est déjà beaucoup d'avoir constaté d'une manière authentique l'existence de perturbations dues aux trépidations du propulseur. Plus tard, quand les documents s'amasseront, il y aura moyen d'approfondir l'étude du nouveau phénomène qui vient de se révéler dans la science chronométrique. — Toutefois, nous devons dès à présent prévenir qu'il y a moyen, comme l'a proposé l'amiral Pâris, de reconnaître, à l'aide d'assiettes creuses remplies d'eau et réparties sur toute la longueur du navire, les *nœuds* susceptibles de correspondre auxdites trépidations. En marchant de beau temps à toute vapeur, il suffira pour découvrir ces nœuds, s'ils existent, de remarquer les assiettes qui se vident peu ou point. Il va de soi que c'est en un des nœuds de trépidation dont il s'agit, qu'il conviendrait de placer l'armoire des montres.

— Il reste à indiquer la manière dont on peut corriger les marches, approximativement au moins, de la perturbation qui nous occupe.

La première chose à faire est de constater le plus exactement possible, la grandeur de la perturbation sur les marches RELATIVES $(m_B - m_A)$ et $(m_C - m_A)$. A cet effet, on appréciera les valeurs *normales* de ces marches à l'aide des formules ou des graphiques de marche, et les valeurs *déduites* en se servant des comparaisons. — A défaut de formule ou de graphique de marche, on construira, comme au n° 162, au moyen des quelques données de rade qu'il sera possible de se procurer, des *isotemps* qu'on extrapolera. On reconnaîtra de la sorte la grandeur numérique de la perturbation sur les marches RELATIVES.

Ainsi, nous citerons un exemple où M. Rouyaux a trouvé $+0^s,85$ pour la valeur diurne moyenne des Δ successifs (n° 158) de $(m_B - m_A)$ dans la traversée du *Decrès* du 14 au 16 avril 1875. Maintenant, comment répartir ces $0^s,85$ sur chacun des chronomètres A et B? On ne pouvait le savoir *à priori;* mais le troisième chronomètre C fournit une indication. En effet, la marche RELATIVE $(m_C - m_A)$ avait aussi augmenté. A première vue, il semblait plus naturel d'admettre que les accélérations constatées provenaient d'une diminution de m_A, qui seule eût expliqué tout, que d'une augmentation de m_B et de m_C. Un quatrième chronomètre D aurait encore éclairé à cet égard; mais il

n'y en avait pas à bord. Si on avait constaté cette accélération de $0^s,85$ pour la première fois, on aurait donc été conduit à la reporter tout entière en diminution sur m_A; mais la discussion d'un atterrissage antérieur pour lequel on avait agi ainsi, avait montré que m_A n'en devait recevoir que les deux tiers environ, soit $0^s,57$, et que le troisième tiers revenait en accroissement à la marche de B.

En principe, pour répartir entre deux chronomètres une perturbation due au propulseur, on se laissera guider par des conditions analogues aux précédentes. On ne sera réellement embarrassé que les premières fois; parce que, ensuite, l'expérience des répartitions antérieures déjà appréciées par les atterrissages, aura vite fixé sur la manière dont les chronomètres se partagent les effets de la perturbation sur leurs marches *relatives*.

N° 164. Exemple numérique de la recherche de l'état absolu des chronomètres à la mer et de la rectification d'un graphique de marche, dans l'hypothèse de perturbations. — Il importe pour ne laisser aucun doute dans l'esprit du lecteur, de corroborer tout ce qui a trait à l'emploi des chronomètres à la mer, en donnant un exemple numérique de la détermination de l'état absolu des chronomètres dans l'hypothèse de perturbations.

Exemple : On a pris la mer le 16 mars; état absolu du chronomètre étalon A, *retard* $= 1^h 35^m 20^s,5$ à midi moyen de Paris; marche INTÉGRALE $m_A = +0^s,50$, pour $15°$ de température. — On demande l'état absolu le 30 mars, ayant à sa disposition le graphique général de marche donné *fig.* 38.

Du 16 au 30 mars, la température a subi des variations représentées par la branche *hl* de la courbe des températures. Projetons les trois points α, β, γ de cette branche sur les prolongements des isothermes de m_A, de $(m_B - m_A)$ et de $(m_C - m_A)$. Nous obtiendrons pour chacune de ces courbes trois points α, β, γ, qu'il suffit de réunir par un trait continu pour avoir la branche extrapolée fournissant les valeurs *normales* de la marche INTÉGRALE de l'étalon et de la marche RELATIVE correspondante de chacun des autres chronomètres.

Traçons maintenant en traits pointillés les branches des marches relatives *déduites*, c'est-à-dire (n° 148) tirées des comparaisons. On arrive immédiatement aux remarques suivantes :

1° La marche relative $(m_C - m_A)$ n'a pas subi de perturbation, puisque la branche réelle et la branche extrapolée se confondent aux *erreurs probables* près d'observation (n° 156).

2° La marche RELATIVE $(m_B - m_A)$, au contraire, a éprouvé une

perturbation mesurée par l'écart entre la branche *normale* extrapolée $\alpha \beta \gamma$ et la branche *déduite* $\alpha'_1 \beta'_1 \gamma'_1$. Par conséquent, cette perturbation a pris naissance dès le 15 mars ; elle a consisté en une *modification continue* (n° 157) de la marche faisant diminuer progressivement celle-ci, de façon que l'écart avec la valeur normale atteigne $0^s,7$ vers le 22 ; cet écart s'est ensuite maintenu constant, c'est-à-dire que la *modification* de la marche s'est dès lors arrêtée. La perturbation dont il s'agit ayant été discutée suivant les règles des n°s 158 et 159 ou du n° 162, on a trouvé que l'hypothèse la plus probable est de supposer que le chronomètre B a seul subi une perturbation.

La marche INTÉGRALE de l'étalon n'ayant pas été dérangée, ses valeurs du *moment* se confondent avec ses valeurs *normales* données par la branche $h'l'$ extrapolée. Or l'examen de cette branche $h'l'$, montre que la traversée peut se décomposer en trois périodes, pendant chacune desquelles, eu égard à la température, la marche m_A pourra être regardée comme constante, et égale à sa valeur moyenne propre à chaque période partielle. — La 1re période va du 15 mars au 21, correspond à la portion de la branche extrapolée qui commençant en h' s'étend à une certaine distance au delà de α, et admet $+1^s,00$ de marche moyenne, ce qui entraîne $+1^s,00 \times 6 = 6^s,00$ de diminution régulière dans le *retard* de l'étalon. — La 2e période s'étend du 21 mars au 28, correspond à la portion de branche qui partant du bout précédent va jusqu'un peu au-dessus de γ, et admet $+1^s,95$ de marche moyenne, soit $1^s,95 \times 7 = 13^s,65$ de diminution dans le *retard*. — La 3e période, enfin, s'étend du 28 mars au 30, et correspond à la portion de branche allant depuis un peu au-dessus de γ jusqu'en l', qui admet $+2^s,75$ de marche moyenne, soit $2^s,75 \times 2 = 5^s,50$ de diminution dans le *retard*.

La diminution totale du *retard* de l'étalon est donc :

$$6^s,00 + 13^s,65 + 5^s,50 = 25^s,15 ;$$

et par suite ce *retard* vaut le 30 mars, à midi moyen de Paris :

$$R = 1^h 35^m 20^s,5 - 25^s,15 = 1^h 34^m 35^s,35.$$

Il devra d'ailleurs être contrôlé (n° 155) à l'aide des autres chronomètres non perturbés, soit ici à l'aide de C.

— Occupons-nous maintenant de la rectification à faire subir au graphique de marche.

La perturbation de la marche INTÉGRALE m_B dans cette traversée a eu pour effet d'abaisser, au moins momentanément, la branche réelle de la courbe des $(m_B - m_A)$, et par suite les points

déterminatifs des isothermes, qui sont venus en α'_1 β'_1 γ'_1. A partir de cette perturbation, la marche RELATIVE de B devra être utilisée avec une grande réserve, parce qu'on ignore comment cette marche va dorénavant se comporter. On ne sait pas si elle conservera la diminution qu'elle a reçue anormalement, en continuant d'ailleurs à éprouver ses variations régulières afférentes aux changements de température et d'âge des huiles par rapport à sa valeur modifiée; ou bien, au contraire, si elle ne perdra pas peu à peu ladite diminution anormale qu'elle a subie par perturbation. — Dans le premier cas, la courbe des $(m_B - m_A)$ éprouvera un abaissement vertical général, en continuant son cours comme si rien ne s'était passé. Dans le second cas, elle se rapprochera progressivement du prolongement de la branche antérieure à la perturbation, pour se fusionner avec ce prolongement. Les isothermes se comporteront, bien entendu, de la même manière. Il faudra donc attendre, pour être éclairé à cet égard, les comparaisons ultérieures avec l'étalon. — Sur notre figure, les nouveaux points déterminatifs, tels que $\alpha'\beta'\gamma'$, des isothermes ont conservé, aux erreurs près de comparaison, l'abaissement éprouvé par les premiers points $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1$ au moment de la perturbation. Il n'y a donc qu'à tracer par ces premiers points les branches des isothermes $\alpha'_1\alpha'\alpha'$, $\beta'_1\beta'\beta'$, $\gamma'_1\gamma'\gamma'$, parallèlement au prolongement des anciennes, et à se servir désormais de la nouvelle courbe générale afférente à ces nouvelles branches.

— Si c'eût été l'étalon qui eût subi une perturbation pendant une des périodes partielles considérées ci-dessus, il aurait fallu, pour avoir la variation de l'état absolu concernant cette période, apprécier le changement à faire subir à la marche normale déduite du graphique; et même dans le cas d'un *saut d'état absolu* (n° 157), accompagné ou non d'une autre perturbation, on aurait eu à introduire, avec ou sans ledit changement, et une fois pour toutes, une correction fixe destinée à tenir compte de ce saut, et calculée conformément à ce qui a été dit pour le chronomètre C à la fin du n° 160. Pour la période partielle suivant la période perturbée, on agirait avec la circonspection qui vient d'être indiquée, en se guidant sur les comparaisons ultérieures avec les autres chronomètres.

D'ailleurs, en cas de tergiversation, le plus simple sera de changer d'étalon, et d'adopter, pour en faire fonction, le chronomètre inspirant désormais le plus de confiance.

FIN DE LA DEUXIÈME PARTIE.

TROISIÈME PARTIE (*).

PRÉCEPTES DIVERS POUR LA CORROBORATION PRATIQUE DES NOUVELLES MÉTHODES DE NAVIGATION.

3e PARTIE. — § I. CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LA PRÉSENTE PARTIE.

N° 165. Utilité et moyens de corroborer pratiquement les nouvelles méthodes de navigation. — L'étude renfermée dans les deux premières parties de ce livre a été faite avec la plus grande indépendance d'esprit et avec le plus vif désir de démêler, au milieu de tant d'opinions divergentes, la véritable voie à conseiller aux navigateurs, en l'état actuel de nos connaissances et des perfectionnements nombreux proposés depuis quelques années pour l'art nautique.

Mais cette étude a besoin d'être corroborée par un ensemble de *préceptes* d'ordre essentiellement pratique, destinés à donner aux *Nouvelles méthodes de navigation* toute l'efficacité qu'elles comportent. Cette efficacité doit s'entendre du degré de perfection avec lequel on est aujourd'hui à même de déterminer le point complet à la mer et de se servir des chronomètres. Elle implique dès lors l'emploi d'instruments aussi bien confectionnés que le permettent les progrès actuels de la fabrication. — En outre, elle exige d'abord la recherche et l'élimination aussi complète que possible des erreurs *systématiques* (n° 118), dont aucune ne saurait être annulée dans ses effets autrement que par élimination. En second lieu, elle nécessite la réduction à son minimum de l'influence des erreurs *accidentelles* (n° 119),

---

(*) Une portion des renseignements qui forment le corps de cette troisième partie, nous a été fournie par MM. Hilleret et Perrin et par l'excellent opuscule de M. Giquel sur la déviation et la régulation des compas cité au n° 172. Mais, nous nous sommes réservé, dans la rédaction, la coordination des articles et l'enchaînement des idées.

réduction qui, *elle*, peut s'obtenir par la répétition des observations en nombre suffisant, afin d'en prendre *des moyennes sérieuses.*

En somme, les préceptes dont il s'agit doivent comprendre la série de renseignements que voici :

1° Résumé des opérations à effectuer à la mer pour se tenir sans cesse au courant de la position du navire.

2° Examen du choix des instruments de chaque espèce (instruments de route, instruments à réflexion, chronomètres, etc.) qui concourent à la détermination de la position du navire.

3° Recherche des *erreurs systématiques* afférentes à chaque instrument.

4° Meilleur parti à tirer de chacun d'eux dans les observations auxquelles ils servent, et moyen d'acquérir de l'habileté dans leur emploi.

5° Manière d'apprécier les *erreurs probables accidentelles* commises sur les éléments *de départ* des divers calculs, c'est-à-dire les erreurs commises sur les diverses sortes d'*observations* elles-mêmes, et qui forment la base de la détermination des *erreurs probables* affectant *les résultats.*

6° Soins divers à apporter dans l'effectuation des calculs.

Il va de soi que les indications 2°, 3°, 4° et 5° doivent être groupées ensemble par instrument.

N° 166. Résumé des opérations à effectuer sans cesse à la mer. — Les recommandations suivantes conviennent surtout aux *navires rapides* appelés par leur service à atterrir fréquemment de jour comme de nuit et sans perdre de temps :

1° Se munir d'appareils de route, d'instruments à réflexion et de chronomètres, conformément aux prescriptions des nos 167, 178 et 194. D'autre part, suivre pour les observations de toutes sortes les recommandations des §§ II, III et IV ci-après.

2° Embarquer au moins deux chronomètres et un très-bon compteur, de telle sorte qu'on puisse se considérer comme en possession d'au moins trois chronomètres.

3° Avant chaque départ, déterminer ou rectifier le mieux qu'on pourra soit la formule de marche réduite, soit le graphique de marche qu'on a adopté selon les circonstances (n° 141, ou nos 144, 149 et 150). Prendre d'ailleurs pour ÉTALON le chronomètre qui offre le plus de précision. En cas de campagne scientifique, se conformer pour la régulation des chronomètres aux indications du n° 140.

4° A la mer, suivre le régime de tous les chronomètres par rapport

à l'étalon, en les comparant à celui-ci au moment du remontage ; ou plus généralement prendre toutes les données voulues pour remplir le *Carnet des chronomètres* (n° 153). Déduire, tant desdites comparaisons que de la formule ou du graphique de marche, s'il y a eu ou non perturbation (n°s 158 et 159). Dans tous les cas, déterminer (n° 155) la valeur *moyenne* de la marche *intégrale* de l'étalon pour chaque intervalle de temps, après l'avoir contrôlée à l'aide des autres montres ; et en tirer l'état absolu dudit étalon, seul état utile à connaître pour la détermination de la longitude.

5° Loin des terres, se borner chaque jour au calcul habituel d'angle horaire avec une hauteur prise le matin dans les circonstances favorables, et à un calcul de la latitude par la hauteur méridienne ou circumméridienne du Soleil. — Lorsque les observations manquent à midi, prendre, autant que faire se peut dans l'après-dîner, une hauteur extra-méridienne, et en déduire avec la hauteur du matin le point observé. Se servir pour cette détermination du procédé Marcq Saint-Hilaire (n° 42). Toutefois si, comme cela a lieu souvent, l'angle horaire du matin est déjà fait ou préparé, l'utiliser en se servant pour ladite détermination de la méthode Pagel (n° 43). Ne pas oublier d'ailleurs que cette méthode fait défaut (n° 44) quand l'une des deux hauteurs a été prise aux environs du méridien.

6° Dans les longues traversées, observer de bonnes distances lunaires (n°s 67, 76 et 77) pendant plusieurs jours consécutifs, pour en tirer quelques déductions sur le régime des chronomètres, surtout s'il y a eu des perturbations.

7° Aux approches des atterrissages, la nuit ou mieux à chaque crépuscule, prendre de bonnes hauteurs méridiennes ou au besoin extra-méridiennes d'étoiles, afin d'en déduire des *parallèles de position* ou des *droites de hauteur;* se servir aussi de la *polaire*, si on peut la saisir. — Si la Lune est visible, l'observer à sa culmination (n° 19) ; et calculer la latitude en tenant compte de la vitesse de l'astre en déclinaison et de celle du navire en latitude. Le matin crocher, dès qu'on le pourra, une bonne hauteur du Soleil pour en déduire tout de suite une droite de hauteur suivant le procédé Marcq, appliqué du reste autant que possible avec le point estimé *combiné* (n° 5), c'est-à-dire corrigé tant bien que mal des courants et des erreurs de l'estime. Si on a hâte de connaître sa position, déterminer une deuxième droite de hauteur avec le Soleil dès que son azimut différera d'au moins 45° du premier azimut. — Dans tous les cas, aux environs de midi, prendre des cir-

cumméridiennes, tant avant qu'après la culmination du soleil, et observer également celle-ci. Déduire de là une excellente latitude, en ayant soin, à cet effet, de suivre les prescriptions du nº 20 ou 21, pour opérer avec toute la rigueur désirable. — Tenir compte, dans les calculs d'estime, du temps qui s'est réellement écoulé à la montre d'habitacle, eu égard à la coutume existante de la remettre à l'heure au moment de la *culmination* du Soleil, c'est-à-dire eu égard au saut, en avant ou en arrière, qu'on lui fait alors subir. Rappelons, en passant, que ce moment est regardé comme le *midi vrai*. Cette manière de faire n'est pas rigoureuse; mais elle n'a pas grand inconvénient, puisque la montre d'habitacle n'est appelée qu'à donner des intervalles de temps pour l'estime. — En tout état de cause, combiner graphiquement ou par le calcul le ou les lieux géométriques du matin avec celui de midi. Près des côtes, avoir recours d'ailleurs au tracé des aires de certitude (nº 41), et, avec les réserves voulues, à la recherche du point *le plus probable* (nº 65 ou 66), de manière à s'éclairer aussi à fond que possible sur la position du navire; l'après-midi, se procurer une nouvelle droite de hauteur par le procédé Marcq, et en déduire un nouveau point le plus probable.

8° En principe, toujours dans l'hypothèse d'atterrissage, tirer immédiatement ce qu'on peut de chaque nouvelle observation; mais ensuite entre cette observation et la suivante se livrer à l'étude *à fond* dont nous venons de parler. Continuer ainsi d'une manière incessante à se renseigner astronomiquement de mieux en mieux sur sa position, jusqu'à ce qu'on soit assez proche de la terre pour être à même de s'aider des lignes de sonde, des relèvements, des pointes en vue et des phares.

9° Par ailleurs, ne laisser échapper aucune occasion de vérifier aux approches des côtes les déviations du compas, suivant les indications du nº 171 ou 172.

10° Pour les longues traversées, suivre, à moins d'indications contraires afférentes aux courants et aux vents généraux, l'arc de grand cercle qui joint le point de départ au point d'arrivée. Avoir recours à cet effet à un des nombreux procédés connus, et en particulier aux TABLES de M. Perrin (nº 13), ou à la nouvelle carte de M. Hilleret. — Cette carte très-ingénieuse n'est autre qu'une projection conique de la surface de la terre sur un plan tangent mené par un point arbitraire de l'équateur, le centre de la Terre servant d'ailleurs de point de vue. Il est évident que tous les grands cercles sont là représentés par des droites, et qu'il en est ainsi en particulier pour les

méridiens. Les parallèles sont, de leur côté, figurés par des branches d'hyperboles ayant leurs sommets situés du côté de l'équateur sur le méridien passant par le point de contact précité. Cela résulte de ce que leurs projections proviennent de l'intersection de cônes ayant pour axe la ligne des pôles par un plan parallèle à cette même ligne. Les propriétés et l'usage de la carte de M. Hilleret se déduisent tout naturellement du principe sur lequel elle repose. L'explication en est donnée dans la brochure *ad hoc* de l'auteur. Ainsi notamment, on a besoin d'une construction particulière pour déduire la véritable distance entre deux points d'un même arc de grand cercle, de la longueur qui les sépare sur la carte. De même, il faut savoir tirer de deux points voisins pris sur chaque arc de grand cercle, l'angle de route correspondant à la loxodromie menée entre ces points. Du reste, tout lecteur qui a un peu l'habitude de l'analyse, trouvera aisément les relations dont il s'agit.

3e PARTIE. — § II. Considérations sur le choix et l'usage des instruments de route. Déviation des compas.

N° 167. Loch et boussole. Boussoles Duchemin, Ritchie et Thomson. Compas étalon. — Nous avons vu au n° 57 combien, avec les *bâtiments rapides*, il importe de s'affranchir de plus en plus des erreurs de l'estime. Or, cela comporte en particulier, outre l'habileté des timoniers, l'emploi d'*instruments de route* confectionnés dans les meilleures conditions.

En ce qui concerne le *loch*, le vieux système ordinaire demeure encore, somme toute, ce qu'il y a de meilleur. Mais il paraît constant que, pour les navires à vapeur, la longueur de la *houache* et celle du *nœud* doivent avoir une valeur *propre* à chaque navire. Avec un peu de soin, on parviendrait à des résultats satisfaisants; car il suffirait de régler, par tâtonnements, un loch étalon pour chaque bâtiment pendant les essais le long d'une base fixe, essais que l'on fait toujours au début d'une campagne.

— En ce qui concerne les *boussoles*, il y a à distinguer deux points : d'abord leurs *qualités propres ;* en second lieu, les *déviations* auxquelles elles sont soumises sous l'influence des substances magnétiques existant à bord. Occupons-nous présentement du premier

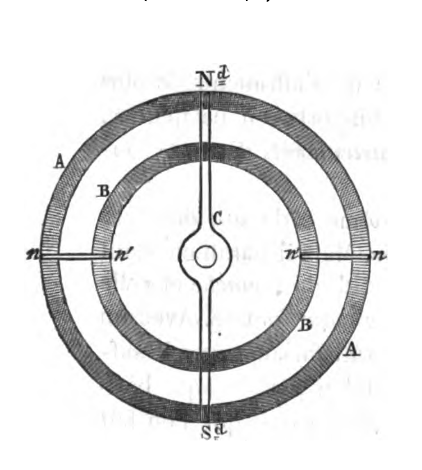
point, nous réservant de traiter en détail dans les numéros suivants ce qui a trait aux déviations.

Depuis quelques années déjà, à côté des boussoles ordinaires à une aiguille simple, on emploie dans la flotte un compas à liquide dont la rose comporte deux barreaux aimantés de section rectangulaires. Ces barreaux sont parallèles entre eux, et reliés par un joug en cuivre portant à son centre le pivot de suspension de la rose. — On se sert aussi d'un compas à sec, avec rose montée sur quatre minces barreaux aimantés fixés de can au-dessous d'elle, et tenus parallèlement entre eux à l'aide de plusieurs petites traverses. Les roses ainsi constituées sont dites *roses de beau* ou *de mauvais temps*, selon que les barreaux employés sont plus ou moins minces.

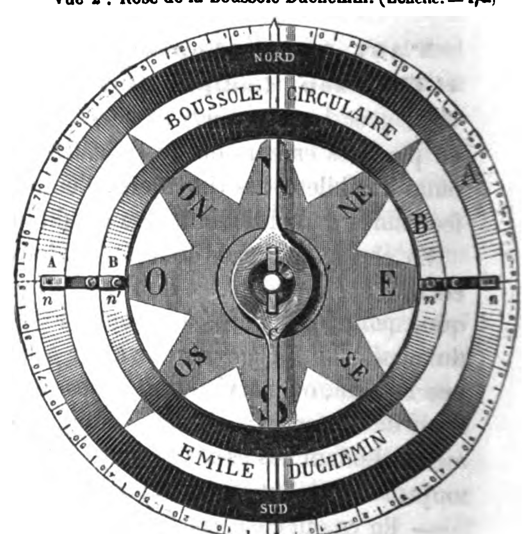
Mais nous recommandons tout de suite la *boussole Duchemin*, comme l'instrument de l'espèce le plus propre à donner entière satisfaction aux navigateurs. La description et l'exposé des qualités de cette boussole feront ressortir du même coup les conditions à exiger actuellement de tout bon compas.

— La boussole Duchemin est représentée par les deux *vues* de la *fig.* 38, qu'explique suffisamment la légende suivante :

Fig. 38. Vue 1°. Aimant de la boussole Duchemin. (Échelle = 1/6.)



Vue 2°. Rose de la Boussole Duchemin. (Échelle. = 1/4.)



Légende de la figure 38.

AA cercle d'acier aimanté, d'un seul morceau;
BB cercle concentrique aimanté, également d'un seul morceau;

C traverse en aluminium ou mieux en acier aimanté, réunissant les deux cercles;
nn', *nn'* supports en aluminium fixés sur les points neutres des cercles A et B.
Le maximum de l'aimantation part des points N et S, et va en décroissant jusqu'aux points neutres *n* et *n*, ainsi qu'il est indiqué par l'ombre projetée sur les cercles d'acier.

La boussole Duchemin repose sur le principe que voici :

Un anneau d'acier AA, soumis à une action magnétique puissante, forme un aimant ayant deux points neutres *n*, *n*, et deux pôles magnétiques N et S, respectivement à l'extrémité d'un même diamètre. Ce cercle disposé sur une chape ordinaire, ou mieux sur une chape de résistance en onyx d'Allemagne, constitue une véritable boussole. — L'addition d'un ou de plusieurs cercles aimantés concentriques BB, augmente la stabilité mécanique et la sensibilité de cet instrument, sans qu'il y ait à craindre, comme dans les roses à plusieurs aiguilles, l'influence nuisible des pôles voisins qui tendent à détruire le magnétisme. Au moyen de ces cercles additionnels, il est possible de régler, pour ainsi dire, le temps des oscillations de la boussole et l'égalité du moment d'inertie dans tous les sens, qualités qu'on doit rechercher avec soin dans un bon compas.

Depuis plus de trois ans, la boussole circulaire Duchemin a été expérimentée sur divers bâtiments de la flotte. Les rapports des commissions sont unanimes à constater que cette boussole possède une *sensibilité* et une *stabilité mécanique* et *magnétique* de beaucoup supérieures à celles des compas à aiguille. La puissance magnétique de la rose Duchemin est considérable; car on a trouvé qu'elle valait de 2 à 4 fois celle des roses qu'on lui a comparées. De là résulte la sensibilité si grande du nouveau compas. — Par mer plate, à la vapeur ou sous voiles, la rose Duchemin suit et accuse immédiatement la moindre embardée, la moindre variation de cap, quand les autres compas dorment ou paraissent affolés. On a pu apprécier cette qualité surtout dans les régions boréales, où les compas à aiguilles ont une tendance marquée à s'insensibiliser. — La marche à la machine n'influence pas la rose Duchemin; les trépidations de l'hélice n'ont jamais donné le moindre soubresaut. Un violent coup de vent essuyé par la *Renommée* a mis à même de juger que la stabilité mécanique de l'instrument ne laissait rien à désirer, et que sa stabilité magnétique dépassait de beaucoup celle de la rose ordinaire. C'est dans cette supériorité de puissance magnétique qu'il faut chercher l'explication des grands avantages qu'offre la boussole Duchemin, lorsque le bâtiment est soumis aux grands et violents mouvements que lui communique une mer très-grosse. Les oscillations de cette boussole

ne dépassent jamais 2°, quand celles d'un compas ordinaire atteignent 8° ou 10°.

En résumé, la rose à aimants circulaires paraît constituer un véritable progrès sur les roses à aiguille actuellement en usage. Comme rose de *beau* temps, elle est excellente, car elle ne dort pas; comme rose de *gros* temps, elle offre une stabilité mécanique qui doit la faire préférer à la boussole ordinaire.

Depuis les premiers essais, M. Duchemin a établi au-dessus de la chape de suspension, une petite aiguille aimantée à pôles renversés. L'axe de suspension de cette petite aiguille coïncide avec celui des cercles aimantés; son axe magnétique se place naturellement dans la direction du diamètre des pôles desdits cercles, et le suit invariablement avec une fidélité et une énergie remarquables. Si le diamètre magnétique des cercles aimantés venait à ne plus coïncider avec l'axe de figure, qui doit passer par les points N et S marqués sur la rose, la petite aiguille l'indiquerait aussitôt. On serait alors prévenu d'un dérangement important, qui est du reste bien moins à craindre pour le système Duchemin que pour le compas ordinaire. Jusqu'à présent, tous les rapports ont constaté que la ligne des pôles, vérifiée au moyen de l'aiguille indicatrice, n'avait jamais bougé.

Le seul reproche adressé à la boussole Duchemin est la difficulté de lire ses indications pendant la nuit, à cause de l'ombre formée sur la rose par les cercles d'acier. Mais il est facile d'y remédier en modifiant la position des cercles, ainsi que l'a fait récemment l'inventeur, ou en disposant le fanal d'éclairage de façon que la lumière se projette au-dessus de la rose, mode d'éclairage qui, sauf pour les compas de relèvement, serait préférable même avec les roses actuelles.

Tout ce qui précède concerne le compas circulaire simple de M. Duchemin. Mais on est édifié aussi sur son *compas circulaire à liquide*, qui, à bord de l'*Orne*, dans un voyage de circumnavigation, a montré sa supériorité sur neuf autres compas, y compris celui à liquide de Ritchie, très-réputé en Amérique. Semblablement, à bord du *Cosmao*, le compas à liquide Duchemin a fait preuve d'une grande stabilité et d'une excessive sensibilité; et il a ainsi rendu l'observation des relèvements extrêmement aisée.

Le compas à liquide de M. Duchemin ne diffère de son compas ordinaire que par les points suivants : 1° Pour éviter l'oxydation, toutes les pièces en acier sont recouvertes de feuilles d'argent, soudées

avec elles; et le pivot de suspension habituel en acier est remplacé par un pivot en iridium. 2° La boîte de la rose est formée d'un tambour en cuivre, doublé intérieurement d'argent et fermé à ses deux bouts par des glaces; elle est d'ailleurs *exactement* remplie d'un mélange de deux parties d'eau et d'une partie d'alcool, où il ne doit rester aucune bulle d'air, ce qui exige qu'on procède au remplissage avec un soin analogue à celui employé dans la construction des baromètres. — Le prix dudit compas à liquide atteint 500 fr., tandis que celui de la boussole circulaire ordinaire ne dépasse pas 100 fr.

Avec le principe fondamental des roses Duchemin, le système à liquide fait bien peu gagner comme qualité à tous les points de vue, tandis qu'il oblige à l'emploi précité d'un pivot en iridium, très-fragile de sa nature.

— A la suite des compas Duchemin, il convient de décrire comme un instrument de l'espèce pareillement recommandable, la *boussole américaine de Ritchie* sus-mentionnée. Elle comporte : 1° un tore creux en aluminium de section triangulaire avec base horizontale, et dont la face supérieure est graduée de façon à servir de rose; 2° deux barreaux aimantés parallèles, que réunit un joug en métal non magnétique, et qui sont enveloppés, ainsi que leur joug, par des gaînes en aluminium, dont les deux renfermant les barreaux ont leurs extrémités soudées avec le tore; 3° une boîte remplie d'un mélange d'eau et d'alcool, et contenant une chape en agate.

La gaîne du joug porte un pivot de suspension qui repose sur ladite chape d'agate. Grâce à sa légèreté, tout le système flotte *presque* au sein du liquide. On obtient ainsi une annihilation à peu près complète des frottements du pivot de suspension; et il y a alors possibilité, sans nuire à la sensibilité, d'augmenter les dimensions des barreaux aimantés, et par suite leur puissance magnétique.

— En signalant toutes les nouveautés sur les boussoles, nous ne pouvons passer sous silence le *compas de sir William Thomson*, qui jouit d'une grande vogue, au moins dans le monde savant.

Ce compas se compose d'une pièce centrale ou chape en aluminium, formant une sorte de chapeau chinois et portant le pivot de suspension de la rose. Des fils de soie partant du pourtour de la chape réunissent celle-ci à une couronne de même métal. De fines aiguilles aimantées, de deux à trois pouces de longueur, sont attachées parallèment entre elles avec d'autres fils de soie à cette même couronne.

Enfin une rose des vents en papier très-fin repose à la fois sur la couronne et sur les fils qui l'unissent à la chape. — La disposition que nous venons de décrire a été adoptée pour reporter à la circonférence presque tout le poids de l'appareil, et obtenir ainsi une grande augmentation de la stabilité du compas. La légèreté du système est telle, que son poids n'est que le vingtième environ de celui d'une rose ordinaire de diamètre égal. Par suite, la résistance due au frottement est très-faible, au grand avantage de la sensibilité du compas.

Un autre perfectionnement consiste dans l'emploi de couteaux, au lieu de cylindres, pour les pivots du joint à la Cardan qui forme la suspension du compas Thomson. La position d'équilibre est ainsi maintenue avec une perfection singulière, quels que soient les mouvements du navire. D'ailleurs, l'espace vide, de forme hémisphérique, qui forme le dessous de la boîte vitrée renfermant la rose du compas, est rempli presque en entier d'huile de ricin, afin d'amortir les vibrations que pourraient encore produire, malgré le perfectionnement apporté, les frottements du système de suspension du compas.

M. Thomson prétend d'ailleurs que son compas peut être *corrigé*, c'est-à-dire débarrassé de toute *déviation* (n° 168), d'une manière infiniment plus simple que les compas ordinaires, par le moyen que nous indiquons d'après lui audit n° 168.

Les diverses notices concernant l'instrument ont été publiées à Glascow, où on peut se les procurer.

— Quel que soit le système adopté pour les roses, il faut d'abord embarquer des compas d'habitacle en nombre voulu, eu égard aux divers endroits du navire où il est bon d'en placer. Il faut aussi se munir de plusieurs compas de relèvement. Parmi ceux-ci, il est indispensable d'en avoir un *excellent*, et qu'on prend pour *compas étalon*. Le compas étalon doit être établi dans le plan longitudinal du bâtiment, éloigné le plus possible de toute matière ferrugineuse, et être élevé de quelques mètres au-dessus du pont. Il ne faut en principe le soumettre à aucune sorte de correction, afin de laisser la loi des déviations se présenter dans toute son intégrité en chaque lieu où on l'étudie.

C'est pour ledit compas qu'on détermine directement les *déviations*. Celles des roses d'habitacle s'obtiennent par leurs comparaisons avec ce compas, étant tenu compte des différences qui résultent de

ce que les roses en question sont compensées. — Dans la marine militaire, le compas étalon sert en général de compas de relèvement; en outre c'est en principe sur lui que le commandant donne la route.

N° 168. Déclinaison, déviation et variation apparente des compas. Sommaire des causes de la déviation et des moyens de la corriger. Régulation des compas. — Une fois les compas embarqués, il y a à se préoccuper du *second point* qui les concerne mentionné dans le numéro précédent, c'est-à-dire de leur *déviation.*

On sait qu'il y a deux causes qui empêchent les boussoles de donner exactement le Nord du monde. La première provient de l'action magnétique de la terre, et produit un écart qu'on nomme *déclinaison magnétique* ou *variation ordinaire.* — La déclinaison magnétique varie avec chaque lieu du globe; mais elle demeure sensiblement constante dans le même lieu; en d'autres termes, elle n'éprouve que des changements qui s'opèrent d'ordinaire avec une extrême lenteur, sauf dans certains parages où ils se produisent avec plus de rapidité. Dans ce moment en France, la déclinaison diminue à peu près de 6′ à 8′ par année, en sorte qu'au bout d'une dizaine d'années elle se trouvera réduite d'environ un degré. Les cartes françaises désignent toujours l'année à laquelle se rapporte la déclinaison qu'elles portent imprimée.

La seconde cause sus-mentionnée est due à l'action des substances magnétiques du bord, principalement sur les navires en fer ou à vapeur. Son effet se nomme *déviation*. Il est variable non-seulement d'un lieu à un autre, mais même, dans chaque lieu, d'un cap du navire au suivant.

— La *déviation*, comme la *déclinaison*, se mesure par la valeur de l'écart des points cardinaux du compas par rapport aux points cardinaux vrais. Ainsi, si le N^d de la boussole se place à droite du N^d vrai, sous l'influence de l'une ou de l'autre des actions précédentes, l'écart est dit NE. Il est NO dans le cas contraire.

Dans le langage nautique actuel, l'écart qui résulte de la combinaison de la déclinaison avec la déviation, s'appelle la *variation apparente* du compas. On voit donc que la variation apparente est une quantité variable avec chaque cap du navire. Il n'y a rien à faire pour sa partie constante, qui est due à la *déclinaison*. Mais on cherche à restreindre le plus possible la *déviation.*

— La *déviation* entendue d'une manière générale se compose de trois effets distincts, dus à des forces magnétiques nettement déterminées. La

question est traitée avec toute l'extension désirable dans la traduction par M. Collet du ***Manuel de l'amirauté anglaise sur les déviations des compas***. Nous nous bornerons ici à un exposé sommaire. — Cela entendu, nous distinguerons :

1° L'*erreur quadrantale*, ainsi appelée parce qu'elle est alternativement E[t] et O[t] dans les quatre quadrants. Cet effet est produit par la résultante, dans un plan parallèle à celui du compas, des actions qu'exercent sur lui les diverses masses de fer doux que contient le navire.

2° L'*erreur semi-circulaire*, qui tire son nom de ce qu'elle a lieu dans un même sens déterminé, E[t] par exemple, pour un des demi-cercles de la rose, et O[t], pour l'autre, à mesure que le navire exécute un tour complet, le sens propre à chaque demi-cercle dépendant d'ailleurs de la manière dont le navire s'est trouvé orienté pendant sa construction. Cette erreur provient de l'influence variable du bâtiment considéré lui-même comme un aimant, dont l'énergie se modifie suivant son orientation, la durée de sa direction à un même cap, etc.

3° L'*erreur de bande*. Cet effet est le résultat de l'action magnétique verticale de la Terre combinée avec l'influence qu'exerce le corps du navire formant lui-même une sorte d'aimant. Il est très-important pour les navires en fer, et a attiré, à cause de cela, depuis quelque temps, l'attention des navigateurs.

Il faudrait, à la rigueur, joindre aux erreurs composantes que nous venons de mentionner les deux suivantes :

L'*erreur constante de déviation*. Cet effet, très-petit en valeur absolue, provient en général d'une mauvaise position de l'index de la rose, et forme une sorte d'angle de collimation.

Enfin l'*erreur quadrantale oblique*. Cette erreur ne se manifeste que quand le compas est placé très en dehors du plan diamétral du navire, ou que lorsqu'il existe des masses de fer inégalement réparties de chaque côté de ce plan.

— Pour la *correction mécanique* de la déviation, on se sert d'habitude de deux barreaux aimantés posés rectangulairement à côté de chaque compas. La pose des barreaux à la meilleure distance du centre de la boussole considérée se détermine par tâtonnements, et constitue du reste une opération très-complexe, qui est du ressort du Génie maritime.

Le mode de correction que nous venons d'indiquer ne vise que l'*erreur semi-circulaire*. D'ordinaire on se borne à cette correction;

et on rectifie alors l'*erreur quadrantale* et l'*erreur de bande* à l'aide de tableaux numériques. — Lorsqu'on veut corriger mécaniquement l'*erreur quadrantale*, il faut avoir recours à des masses de fer doux, placées au même niveau que le compas, soit à tribord ou à bâbord, soit en avant ou en arrière, cela selon les conditions où on se trouve. Avec une déviation quadrantale considérable, la correction mécanique au moyen de masses de fer doux devient impraticable, surtout à cause de la grande quantité de métal nécessaire dans ce cas. On a alors proposé d'avoir recours à deux compas conjugués, mis à tribord et à bâbord, à une distance restreinte déterminée l'un de l'autre. Mais ce procédé ne donne que des résultats incomplets.

En ce qui concerne l'*erreur de bande*, sa correction mécanique peut être réalisée au moyen d'un aimant vertical placé immédiatement au-dessous et à faible distance du centre du compas. Hâtons-nous d'ajouter que la détermination de ladite distance est susceptible de s'effectuer sans qu'on ait besoin pour cela de mettre le navire à la bande, ce qui serait fort difficile avec les grands navires cuirassés. En tout cas, le pôle S^d^ de l'aimant correcteur doit être en haut dans l'hémisphère N^d^ et en bas dans l'hémisphère S^d^. Cette correction une fois faite n'a plus besoin d'être rectifiée, tant que le bâtiment conserve la même différence de tirant d'eau.

— Avec le compas Thomson (n° 167), les corrections mécaniques dont nous venons de parler sont singulièrement facilitées, au dire de l'inventeur, qui fonde sur cette propriété un des principaux avantages de son système.

L'*erreur semi-circulaire* est corrigée par M. Thomson au moyen d'un système de quatre *correcteurs*. Deux des correcteurs, composés chacun d'un simple barreau aimanté, se placent tribord et bâbord du compas; et l'un d'eux peut monter ou descendre verticalement à l'aide d'un mécanisme spécial. Les deux autres correcteurs comprennent chacun une paire de barreaux aimantés formant, avec un certain écart, le prolongement l'un de l'autre, et ayant leurs pôles tournés dans la même direction. Ces deux nouveaux correcteurs se placent l'un à l'avant, l'autre à l'arrière du compas; et l'un d'eux est également installé de façon à pouvoir être mû verticalement. Les correcteurs mobiles permettent de faire varier l'action sur la rose de tout le système destiné à annuler l'erreur semi-circulaire. Au surplus, les positions de ces correcteurs doivent être rectifiées souvent. On y arrive aisément en cherchant, chaque fois, la situation convenable

pour obtenir la correction du compas dans deux directions du navire, faisant entre elles un angle voisin de 90°.

D'autre part, M. Thomson annule l'*erreur quadrantale* au moyen de deux sphères de fer doux, qu'il place à égale distance de chaque côté du compas, généralement sur la ligne passant par le centre de la rose et perpendiculairement au plan longitudinal du navire. Toutefois, cette ligne peut devenir oblique si le compas est éloigné du plan dont il s'agit. — Quand les deux sphères de fer doux ont été mises en position convenable pour annuler l'erreur quadrantale, il n'y a pas à les déplacer en cours de voyage, tant que le compas occupe la même position à bord, et que les masses de fer restent les mêmes et ne subissent aucun déplacement. Alors qu'il faudrait employer des quantités énormes de fer doux (environ deux tonnes) pour arriver à la correction quadrantale parfaite d'un compas ordinaire, la petitesse des aiguilles du compas Thomson permet d'y corriger l'erreur qui nous occupe à l'aide de deux sphères de fer doux, ne dépassant pas six pouces de diamètre.

Enfin, M. Thomson corrige l'*erreur de bande* suivant la manière expliquée plus haut.

— La *correction mécanique* des compas n'est habituellement qu'incomplète, même pour un lieu déterminé, et, *à fortiori*, à mesure que le bâtiment change de latitude.

Il devient donc indispensable de mesurer à bord de chaque navire la *déviation* des boussoles aux divers caps, ou plus simplement celle du compas étalon, non-seulement avant le départ, mais de temps à autre à la mer et dans les relâches, au fur et à mesure que le navire se déplace N^d^ ou S^d^.

— Par ailleurs, comme la *variation apparente*, qui est l'élément définitif dont le navigateur a besoin, relève à la fois de la *déviation* et de la *déclinaison magnétique*, il faudra aussi se préoccuper de se procurer cette dernière quantité dans les meilleures conditions.

En général, la *déclinaison magnétique* du bord se prend égale à celle du lieu donnée sur le routier ou par tout autre document, notamment par la carte anglaise des variations ordinaires; sinon, en rade, elle se calcule à l'aide d'un relèvement astronomique, après qu'on a transporté à terre le compas étalon. Comme nous le ferons voir plus tard (n° 171), on peut encore prendre la *moyenne* d'un certain nombre de *variations* déterminées pour des caps apparents *équidistants* les uns des autres, et comprenant dans leur ensemble un tour complet d'horizon.

En tout état de cause, l'ensemble des opérations ayant pour objet de déterminer à un moment quelconque les éléments dont nous venons de parler, s'appelle *régulation des compas*.

N° 169. Manière de déterminer les déviations des compas dans un port. — En ce qui concerne la détermination des *déviations*, deux méthodes peuvent être employées avec un égal succès lorsque le navire est dans le *port*. — L'une d'elles consiste dans les relèvements successifs d'un *objet éloigné*, lorsque le navire fait un tour d'horizon; l'autre dans les relèvements réciproques faits du bord à terre et de terre à bord, toujours pendant que le navire fait une évolution circulaire.

1° *Détermination des déviations dans un port par un objet éloigné.* — Pour l'emploi de cette méthode, il faut se procurer deux choses : d'abord l'objet, dont la distance au bâtiment doit être de 8 à 10 milles environ, afin que l'on puisse considérer la direction qui va de l'observateur à l'objet comme constante, malgré les déplacements qu'éprouve le navire pendant qu'il exécute son tour d'horizon. Il faut ensuite les moyens de faire ainsi pivoter le navire autour de son ancre tenue à pic. Ces procédés, tout marins, consistent le plus ordinairement en un certain nombre d'amarres frappées sur des bouées ou des corps morts.

Comme on doit comparer chaque relèvement de l'objet obtenu au *compas étalon*, avec la direction magnétique *réelle* de l'objet vu du navire, il faut commencer par déterminer cette direction magnétique. On la prend généralement sur la carte; ou, au besoin, on effectue un calcul de relèvement astronomique, et on altère le résultat de la *déclinaison magnétique* du lieu, évaluée comme il a été dit à la fin du n° 168. — On pourrait aussi obtenir immédiatement l'azimut magnétique réel de l'objet, en *relevant de cet objet* le navire lui-même que préalablement on aurait fait mettre à pic. — Ce procédé n'est pas toujours praticable. Dans ce cas, on transporte le compas étalon à terre. Puis, se plaçant dans l'alignement du navire mis à pic et de l'objet, on relève ce dernier avec le compas. Le relèvement magnétique déterminé de la sorte est précisément celui que l'on obtiendrait du navire, s'il n'avait pas d'action particulière sur le compas. Pour que ce procédé donne un bon résultat, il faut absolument que le point où l'on place le compas à terre soit éloigné de toute masse de fer un peu considérable, telle que ancres, chaînes, etc.

Les opérations préliminaires précédentes étant achevées, on fait

pivoter le navire autour de son ancre, en ayant soin de le maintenir autant que possible immobile à chaque cap principal, c'est-à-dire lorsque le compas étalon indique successivement le N, le N 1/4 NE, le NNE, etc. A chaque station, on relève au compas étalon l'objet choisi. Afin de vaincre l'inertie de la rose, il faut avoir soin, avant de faire un relèvement, de frapper avec la main quelques légers coups sur la boîte. — En tout état de cause, la différence entre le relèvement au compas, qui est l'*azimut dévié* de l'objet, et la valeur constante de l'*azimut magnétique réel* de celui-ci, donne la *déviation* qui convient au rhumb de vent considéré. Ainsi supposons qu'au moment où le cap du navire est au NNE du *compas étalon*, le *relèvement* de l'objet soit le N 71°10′0ᵗ; et l'azimut magnétique *réel* de ce même objet le N 63°00′0ᵗ; nous aurons :

déviation = 8°10′NE, pour l'aire de vent NNE du compas étalon.

On agirait de la même manière pour les autres rhumbs de vent. — S'il était possible d'effectuer à nouveau toutes les observations en faisant tourner le navire dans un sens opposé à celui que l'on avait adopté pour la première série d'observations, la moyenne des deux résultats trouvés pour chaque rhumb de vent aurait plus de chance d'exactitude qu'un résultat unique.

Comme il est important de connaître également les déviations des roses de route, il convient qu'au moment du top donné par l'individu qui est au *compas étalon*, d'autres observateurs prennent simultanément les caps indiqués par lesdites roses. Ces caps comparés aux caps magnétiques réels, d'après la règle précédente, donneront les déviations de chacune de ces roses.

2° *Détermination des déviations dans un port par des relèvements réciproques.* — Quand on n'a pas à sa disposition un objet visible du navire, et placé à la distance de 8 à 10 milles, ainsi que l'exige le premier procédé que nous venons de décrire, on peut obtenir les déviations par le procédé des relèvements réciproques.

Il faut pour cela avoir un second compas d'une construction aussi soignée que celle du compas étalon. On compare ces deux compas l'un à l'autre, pour voir s'ils donnent les mêmes indications. Cette comparaison, qui doit se faire à terre et loin de toute masse de fer, s'exécute en relevant successivement du même point un objet éloigné de 60 à 100 mètres. Les indications des deux compas doivent être identiques. Dans le cas contraire, il faudrait tenir compte de la diffé-

rence. — On arriverait encore au même résultat en éloignant les deux compas l'un de l'autre de 40 à 50 mètres. En relevant alors chacun d'eux au moyen de l'autre, les indications fournies devraient différer de 180°.

Une fois la comparaison effectuée, on reporte le compas étalon sur le navire, et on le met à son poste. A terre, on place l'autre compas loin de toute masse de fer, et pas trop éloigné du compas étalon une fois installé à bord, pour qu'ils soient, à l'œil nu, très-visibles l'un de l'autre. —Alors, au moyen de signaux convenus d'avance, chacun des observateurs doit relever au même moment le compas de l'autre. Cette observation simultanée est répétée pour chacun des instants où le cap du navire, que l'on fait évoluer, est immobile dans chacun des 32 aires de vent du compas.— Afin d'éviter toute méprise, les deux observateurs doivent noter l'heure de chaque relèvement réciproque sur deux montres préalablement comparées entre elles, ou mieux encore, mises à la même heure. Il sera également très-bon de signaler à bord, et au fur et à mesure qu'ils se font, les relèvements pris à terre; parce que, si l'on croyait reconnaître quelque anomalie dans une observation, on pourrait la vérifier immédiatement: et l'on éviterait par là, la nécessité de recommencer l'évolution du navire. — Pour communiquer au bord les relèvements faits à terre, on peut se servir d'une planche noire, sur laquelle on écrit avec de la craie. De leur côté, les signaux, pour être bien saisis, peuvent être exécutés avec la cloche du bord, en ayant toujours soin de faire un signal préparatoire, afin d'appeler l'attention de l'observateur qui est à terre.

Nous avons admis, dans l'un et l'autre des deux procédés ci-dessus, qu'en manœuvrant le navire pour accomplir un tour d'horizon, il avait été possible de le tenir immobile au moment précis où le compas étalon marquait le N, puis le N 1/4 N E, le N N E, etc. Il est facile de comprendre que cette manœuvre ne manque pas de difficultés, et qu'en bien des cas, surtout dans les ports où il n'existe aucune disposition particulière pour régler les compas, il serait à peu près impossible de mettré le cap du navire exactement dans les 32 aires de vents indiqués par le compas étalon. — Mais cette obligation n'est nullement indispensable; et il suffit, en faisant évoluer le bâtiment, de l'arrêter de temps à autre, après avoir décrit des arcs d'horizon égaux ou inégaux, en ayant soin toutefois que ces arcs ne soient pas beaucoup plus grands que 12° à 15°. A chaque arrêt, on

fera le relèvement comme on l'a indiqué; et l'on aura les déviations qui conviennent, non plus aux aires de vent principaux, mais à des aires de vent que l'on notera de la manière suivante, par exemple, N, N 9° E^t, N 25° E^t, etc., qui seront les aires indiqués au compas étalon au moment de chacun des arrêts du navire. Par ce moyen, les observations présenteront moins de difficultés, puisqu'elles auront été exécutées au moment où le navire s'immobilise de lui-même, au lieu d'être tourmenté pour être arrêté dans une direction déterminée. Il est donc probable que les observations recueillies de la sorte seront meilleures.

N° 170. Manière de déterminer les déviations des compas en rade. — Le navire étant sur rade, on peut déjà employer, pour déterminer les déviations de ses compas, les deux procédés du n° 169, en les modifiant, au besoin, suivant les circonstances.

1° *Détermination des déviations en rade par un objet éloigné.* Si du point où le navire est mouillé l'on aperçoit un objet éloigné de 8 à 10 milles, de telle sorte que l'on puisse négliger la parallaxe due au déplacement du navire pendant son évolution, il y aura moyen de se servir de cet objet pour la détermination des déviations, en agissant comme nous l'avons expliqué.

2° *Détermination des déviations en rade par des relèvements réciproques.* La méthode des relèvements réciproques est également applicable dans le cas du navire sur rade. Il suffit pour cela de faire porter un compas à terre; et si l'on est assez près pour s'entendre réciproquement, on opère comme au n° 169. Quant à l'évolution du navire, elle peut s'exécuter au moment du renversement du courant, en contre-tenant au moyen d'une deuxième ancre mouillée soit par le travers, soit par l'arrière; ou encore on profite du moment où le courant cesse, ou au moins est très-faible. — Mais si la côte est trop éloignée du mouillage pour que l'on soit en mesure de s'entendre avec la terre, il n'y a d'autre moyen que de mettre le deuxième compas dans un canot mouillé à une distance convenable du navire. C'est du reste au marin à juger ce qu'il est à même de faire dans cet ordre d'idées, suivant les circonstances dans lesquelles il se trouve.

3° *Détermination des déviations en rade au moyen d'un alignement et en évoluant sur place.* A côté des deux méthodes précédentes, il en existe d'autres praticables sur rade, que nous allons expliquer. On cherche deux objets qui soient situés dans un même alignement, et bien visibles de la rade. Puis, on détermine l'azimut

magnétique de cet alignement au moyen de la carte; et on place le navire dans cet alignement. Si on peut le faire tourner sur lui-même tout en restant dans l'alignement des deux points, on relève ces objets pour les différents caps voulus, en maintenant le navire immobile dans chaque cap pendant le temps nécessaire à l'effectuation du relèvement. On a alors tous les éléments nécessaires à la détermination des déviations du compas étalon.

4° *Détermination des déviations en rade par un alignement que l'on vient couper avec des caps différents.* On pressent la difficulté qu'il y a à faire évoluer le navire tout en le maintenant dans un alignement déterminé. Aussi vaut-il mieux procéder d'une autre manière pour utiliser cet alignement. Au lieu de chercher la fixité du navire, on court un certain nombre de bords dans la rade, en venant chaque fois couper l'alignement avec un cap différent. On ralentit la vitesse au moment où l'on approche de l'alignement; et l'on fait le relèvement à l'instant où l'on est dans l'alignement même. — On manœuvre ainsi jusqu'à ce que l'on ait observé un nombre suffisant de déviations.

Si l'on ne se sert que d'un seul et même alignement, quelques-unes des routes coupent cet alignement sous un angle trop aigu, pour que l'on soit certain du moment précis où il convient d'effectuer le relèvement. Il peut en résulter sur les déviations déduites de ces relèvements, des erreurs qu'il faut éviter. — A cet effet, on ne se contente pas d'un seul alignement, et l'on en emploie un autre incliné d'environ 60° sur le premier. On note les relèvements que l'on fait de l'un et de l'autre alignement, au fur et à mesure que l'on vient à les couper. — Les deux alignements étant dans les directions respectives que nous venons de dire, quand la route coupera l'un d'eux sous un angle extrêmement aigu, *elle coupera l'autre sous un angle de* 50° *à* 70°, *ce qui est une condition très-favorable pour que le relèvement s'exécute avec exactitude.* Et effectivement, il ne faut pas en principe que la sécance d'une route et d'un alignement soit à angle droit : ce serait une mauvaise condition; car on aurait à peine le temps de faire le relèvement, eu égard à ce que le navire dépasserait trop vite l'alignement.

N° 171. Manière de déterminer les déviations des compas en vue d'une côte par un alignement, et à la mer par des observations d'astres ou par un tour complet du navire effectué avec une vitesse uniforme. — Il pourrait, au

premier abord, paraître superflu de s'occuper de la détermination des *déviations à la mer*. Mais, comme nous l'avons dit au n° 168, le magnétisme du navire éprouve, par suite du déplacement en latitude, des variations d'intensité qui font changer son action sur les boussoles, et par suite modifient les déviations afférentes à chaque cap. Il convient donc de s'assurer au large si les déviations du compas étalon sont restées les mêmes, et dans le cas contraire de les déterminer à nouveau.

Quand on passe en vue d'une côte dont on possède une bonne carte, on est en mesure de déterminer avec soin l'alignement de deux objets ou de deux pointes. On se sert alors de cet alignement en venant le couper sous différentes directions, pour obtenir, comme on l'a expliqué en 4° au n° 170, un certain nombre de déviations. Ces données, comparées à celles de même espèce déterminées au départ, feront connaître s'il n'est pas urgent de profiter de la circonstance occurrente pour faire une nouvelle étude complète des déviations des compas du bord.

— Plaçons-nous maintenant dans les circonstances ordinaires de la navigation, en pleine mer, et par suite hors de vue de toute côte. Dans ce cas, plus de point fixe. Mais les astres, et le Soleil en particulier, nous offrent des objets dont on est à même de calculer à chaque instant l'azimut vrai. Au moyen de la *déclinaison magnétique* du lieu, que pour le moment nous supposerons connue, on passera à l'azimut magnétique du Soleil; et comparant cet *azimut magnétique* au *relèvement* fait au compas, on en déduira la *déviation* afférente au cap considéré. — Tel est le résumé de la méthode que nous allons développer avec détail, parce qu'elle est d'une grande importance pour la navigation, surtout aux environs d'un atterrissage.

Le matin ou le soir, lorsque le Soleil est peu élevé au-dessus de l'horizon (depuis 4° à 5° jusqu'à 20°), on fait exécuter au navire un tour complet d'horizon, sans s'inquiéter de la grandeur du circuit. Au moment où le navire a le cap au N, au NNE, au NE, etc., du compas étalon, ou du moins au moment où le cap est voisin de ces points, on maintient le navire dans la direction considérée, jusqu'à ce qu'un observateur, spécialement chargé de ce soin, ait relevé le plus exactement possible le Soleil au compas étalon. Au même instant, une ou plusieurs autres personnes, suivant le cas, prennent les éléments nécessaires au calcul de chaque azimut vrai du Soleil; le *top* est donné par l'observateur chargé de prendre le relèvement. Ces diverses quantités obtenues, on détermine tous les azimuts *vrais*. Quand

ces azimuts ont été trouvés, on les altère de la *déclinaison* magnétique qui convient au lieu où l'on se trouve; et on en déduit l'azimut magnétique du Soleil correspondant à chaque station. Cet azimut magnétique, comparé au relèvement au compas y relatif, fournit la déviation qui convient au cap *noté* au moment du relèvement.

Il importe de remarquer que l'*étoile polaire* ou l'étoile principale de la *croix du Sud*, suivant l'hémisphère où l'on se trouve, peuvent être d'un secours précieux pour le problème qui nous occupe, eu égard à leur faible mouvement en azimut.

—Dans les opérations précédentes, nous avons supposé connue la *déclinaison magnétique* du lieu. Cette quantité se prend le plus ordinairement (n° 168) sur la carte. Mais elle ne convient qu'autant que sa détermination ne remonte pas à un très-grand nombre d'années. Au surplus, on peut se passer de la connaissance de l'élément qui nous occupe; on est du reste à même de le déduire des observations faites pour déterminer les déviations du compas. On a remarqué, en effet, que les déviations d'un compas, *non compensé* toutefois, se reproduisent d'une façon symétrique pour les deux moitiés de la rose, en considérant des rhumbs de vent successifs sensiblement égaux, mais de noms contraires. Ainsi, les déviations d'une de ces moitiés devront tendre à augmenter la *déclinaison* du compas, tandis que les déviations de l'autre moitié devront tendre à la diminuer. D'après cela, quand on ne connaît pas la déclinaison d'une manière assez précise, on emploie directement l'azimut vrai de l'objet ou de l'astre; et l'on a autant de *variations apparentes* que l'on a fait de relèvements. On choisit alors un certain nombre de ces variations déterminées pour des rhumbs de vent également espacés sur le compas; la somme algébrique de ces variations divisée par leur nombre, donne la *déclinaison* d'une manière très-approchée. — Quant aux rhumbs de vent qui conviennent le mieux, ce sont, si l'on n'en prend que quatre, les points *intercardinaux*. Mais on arrive à un résultat plus exact, en se servant des variations pour les huit rhumbs N N E, E N E, E S E, etc.

Par ailleurs, nous remarquerons de la manière la plus expresse qu'en fin de compte (n° 168), c'est la *variation apparente* propre à chaque cap, c'est-à-dire l'élément résultant de la combinaison de la *déclinaison magnétique* et de la *déviation* qu'il importe d'avoir en sa possession. Donc, au moment d'un *atterrissage*, ce sont surtout les différentes valeurs de cet élément qu'on doit connaître rigoureusement; et il suffira, à cet effet, d'opérer comme nous l'avons expliqué ci-

dessus audit moment. — Les déviations elles-mêmes ne sont utiles que pour servir journellement à rectifier au large la route, pendant tout le temps où il est licite de les considérer comme n'ayant pas varié. Leur usage devient aussi indispensable lors des atterrissages, quand il est matériellement impossible de se procurer directement les *variations apparentes* propres aux divers caps.

— M. le lieutenant de vaisseau René Robert a décrit, dans la *Revue maritime* de janvier 1876, un procédé se basant uniquement sur un tour complet du navire effectué avec une vitesse uniforme. A l'aide de ce procédé, on pourrait déterminer en toutes circonstances, même en l'absence d'astres ou de tous autres points de relèvement, le tableau complet des déviations d'un compas. — L'idée n'est pas absolument nouvelle, et avait été déjà émise en 1873 dans le *Naval Science*. Depuis lors, quelques expériences ont été exécutées par M. Robert pour vérifier son procédé; les résultats ne nous paraissent pas concluants. Cependant nous croyons utile de rappeler en peu de mots l'ensemble de la méthode, dans l'espoir que quelques officiers se livreront à de nouvelles expériences, pour affirmer ou infirmer son utilité pratique.

La machine ayant été réglée au nombre de tours qui, d'après des essais antérieurs, doit lui donner la plus grande régularité de rotation, on porte la barre de quelques degrés sur un bord, et on l'y amarre solidement. Le bâtiment abat, décrit d'abord une branche de spirale, puis finalement une circonférence à peu près rigoureuse. Quand on juge que cette deuxième période de l'évolution se produit, on laisse tomber une bouée à la mer, en lisant l'heure à une montre à secondes. Au bout d'un tour complet, qui est indiqué par le retour du bâtiment le long de la bouée, on note également l'heure. Deux ou trois tours, ainsi effectués dans les mêmes conditions de barre et de vitesse, permettent de déterminer avec une grande rigueur le temps que le bâtiment met à décrire 360°, et de vérifier en même temps s'il le fait avec une vitesse uniforme.

Soit T la durée d'un tour complet. Dans un temps t, le navire abattra évidemment d'un angle $N = \frac{360t}{T}$, dont, par ailleurs, le nom par rapport aux points cardinaux se déduira du sens de la rotation.

Supposons maintenant qu'une personne note le plus exactement possible au compas qu'il s'agit d'étudier, les caps successifs du bâtiment aux moments précis de *tops* régulièrement donnés à des inter-

valles de temps égaux t, par un aide muni d'une montre à secondes. Appelons :

$N_1, N_2, N_3 \ldots$ les angles magnétiques d'abatée ainsi relevés, et dénommés comme il convient ;
d_0 la déviation du compas au point de départ du cercle d'évolution ;
d_1 la déviation correspondant au cap magnétique rélevé après t secondes ;
d_2 la déviation correspondant au cap magnétique relevé après $2t$ secondes ;
. . . . ;
. . . . ;
d_{n-1} la déviation correspondant au cap magnétique relevé après un nombre de secondes égal à $(n-1)\,t$, compris entre T et $T - t$.

Il est clair que l'on aura :

$$
\begin{aligned}
d_0 &= d_0,\\
d_1 &= d_0 + (N - N_1) = d_0 + A_1,\\
d_2 &= d_0 + 2N - (N_1 + N_2) = d_0 + A_2,\\
d_3 &= d_0 + 3N - (N_1 + N_2 + N_3) = d_0 + A_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
d_{n-1} &= d_0 + (n-1)N - (N_1 + N_2 + \ldots N_{n-1}) = d_0 + A_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Dès lors, si, par un *procédé quelconque*, on a pu se procurer l'une des déviations à l'un des caps magnétiques du compas, on en déduira immédiatement, à l'aide des équations précédentes, les déviations correspondant à tous les autres caps.

Tel est en substance le procédé proposé par M. Robert. — L'auteur anglais de l'article précité du *Naval Science* va encore plus loin. S'appuyant sur un fait d'expérience, assez généralement bien vérifié pour des compas *non compensés*, et déjà implicitement admis ci-dessus, il suppose que la somme algébrique des déviations, d_0, d_1, $d_2, \ldots\ldots, d_{n-1}$, résultant d'observations faites à des caps suffisamment rapprochés les uns des autres et pour un tour complet d'horizon, est identiquement nulle. De cette hypothèse, on déduit aisément :

$$d_0 = -\frac{A_1 + A_2 + \ldots\; A_{n-1}}{n},$$

formule qui permet de calculer immédiatement d_0, et par suite toutes les autres déviations.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur cette méthode ; et encore moins sur les nombreuses et très-sérieuses objections que l'étude mécanique du procédé soulève immédiatement. Dès à présent, M. Robert déclare que ses propres expérienees lui ont prouvé surabondamment que la méthode était inapplicable avec un *compas ordinaire à une aiguille*. Aussi propose-t-il, avant toute chose, d'employer un bon compas de relèvement à liquide. — En tout cas, pour compenser les erreurs provenant de l'entraînement produit sur l'ai-

guille par suite du mouvement de giration du bâtiment, on devra répéter l'expérience en faisant tourner le navire alternativement sur tribord et sur bâbord. Les déviations que l'on adoptera seront les moyennes des nombres obtenus pour chaque cap magnétique dans les deux séries d'expériences.

N° 172. Manière de déterminer les déviations à la mer par des formules. — Les méthodes du numéro précédent entraînent le défaut capital, dans la pratique de la navigation, d'exiger que le navire fasse un tour complet d'horizon. Or ce tour d'horizon, avec les arrêts nécessaires pour effectuer les observations, exige un temps assez long; il a, en outre, le désavantage d'écarter le navire de la route qu'il doit suivre. Aussi, quand on détermine les *déviations à la mer*, cherche-t-on à réduire à son minimum le nombre d'observations à recueillir; et, même parmi celles-ci, choisit-on de préférence celles qui éloignent le moins possible de la route suivie.

On remplace alors les observations que l'on ne fait pas, par des calculs assez longs et compliqués que nous ne pouvons exposer ici. Les formules que l'on applique sont déduites d'une théorie du magnétisme due à l'illustre Poisson (*Additions à la Connaissance des temps*, 1841). Elles ont été très-habilement transformées en Angleterre par M. Archibald Smith, qui le premier a réussi à leur donner une forme pratique. — On trouvera un exposé très-complet de cette question, aussi bien que de celles se rapportant aux déviations en général, dans le *Manuel de l'Amirauté pour les déviations des compas;* cet ouvrage, traduit de l'anglais par M. Collet et déjà signalé au n° 168, a été édité par le Dépôt de la marine. Sous une forme plus succincte, mais suffisant néanmoins aux besoins de la pratique, le « *Traité de déviation et de régulation des compas* » publié par M. Giquel, ancien professeur d'hydrographie, fournit de bons exemples numériques et de très-utiles renseignements. — Nous signalerons encore les excellentes "*Instructions sur le compas étalon et la courbe des déviations*" rédigées par M. Darondeau pour la Compagnie générale transatlantique. — Enfin récemment, M. le lieutenant de vaisseau Fournier a cherché, en se basant, lui aussi, sur les théories de Poisson, à remplacer les formules de M. Smith, qui exigent en définitive des calculs très-longs et assez compliqués, par des moyens graphiques de la plus remarquable ingéniosité. Inventeur d'un instrument auquel il donne le nom d'*alidade déviatrice*, cet officier semble même avoir résolu le problème difficile et depuis longtemps cherché, de construire

en pleine mer un tableau des déviations sans recourir à l'observation d'astres. Pour cette intéressante étude qui n'est encore que dans la phase des essais, nous renverrons à l'ouvrage de M. Fournier, édité chez Arthus Bertrand, sous le titre de « *Déviations des compas*, etc. ». Nous ajouterons que dans un travail tout récent inséré dans les « *Annales hydrographiques* », M. Fasci a trouvé moyen de simplifier encore la solution de M. Fournier.

— Il nous reste à dire comment M. Thomson procède au large à la correction mécanique de son compas (n° 167).

Il résulte du n° 168 qu'avec un pareil compas, on devra à la mer, ne se préoccuper que de corriger *l'erreur semi-circulaire*, et parfois seulement de vérifier *l'erreur quadrantale*.

M. Thomson donne le moyen de corriger son compas des deux erreurs en question, alors même qu'un brouillard épais ou toute autre cause empêcherait de déterminer une véritable orientation du navire. Pour cela, il emploie un instrument qu'il appelle « *deflector* ». Cet instrument consiste en un barreau aimanté, porté sur un pied, et muni d'une vis qui permet de l'élever ou de l'abaisser au-dessus du centre de la glace du compas. On en fait usage en plaçant successivement le bâtiment dans les quatre directions N^d, E^t, S^d, O^t, telles ou à peu près que les indique le compas, et en mettant successivement le barreau de l'instrument à hauteur convenable pour produire, à chacun de ces caps, une rotation de la rose atteignant 85°, l'axe magnétique du compas et celui du barreau déviateur étant sensiblement à angle droit. Si les diverses hauteurs de ce barreau lues sur une échelle verticale faisant partie de l'ensemble du « *deflector* », ne se trouvent pas égales lorsque le bâtiment est aux orientations N^d et S^d, il faut mettre ledit barreau à sa hauteur moyenne, et disposer les barreaux aimantés placés à l'avant et à l'arrière du compas, de manière à amener la rotation à 85°. Puis, on opère de même aux orientations E^t et O^t, à l'aide des barreaux aimantés placés en travers. On reconnaîtra alors qu'il existe une erreur, si la hauteur du « *deflector* » n'est pas la même aux orientations N^d, S^d et E^t, O^t. Dans ce cas, on devra agir, pour la corriger, sur les sphères de fer doux, qu'on rapprochera ou qu'on éloignera du compas suivant qu'il conviendra. Cette méthode est basée sur le principe qu'avec un système de correcteurs, il ne peut y avoir d'erreur du compas à aucun cap, si la composante horizontale de la force qui agit sur l'aiguille considérée isolément est la même pour tous les caps du navire. Or la hauteur à laquelle il faut

placer le « *deflector* » pour amener un écart de 85°, est justement une mesure de cette composante horizontale.

Il va de soi que ce séduisant procédé de correction du compas Thomson à la mer, aussi bien que l'usage de ce compas, ont besoin de la sanction d'une longue expérience, faite au large dans des conditions diverses de mer, avant que d'être recommandés, couramment aux navigateurs.

N° 178. Causes diverses pouvant produire des déviations anormales dans les compas. — Il importe de signaler différentes perturbations auxquelles certains compas donnent lieu.

Lorsqu'un bâtiment prend de la bande, il n'est pas rare, surtout s'il est en fer, de voir changer notablement les *déviations* déterminées quand il était droit. Par ailleurs, si, comme dans le roulis, le navire penche alternativement d'un bord à l'autre, la rose prend un mouvement d'oscillation très-gênant. — Ces effets sont dus à l'*erreur de bande* signalée au n° 168, lorsqu'on ne l'a pas corrigée mécaniquement suivant les indications de ce même numéro. Pour y obvier, on a eu recours à des compas liquides, et plus récemment à la boussole Duchemin (n° 167). Le remède est bon lorsqu'il n'y a que du roulis; mais il est sans résultat dans le cas de bande; car la rose reste déviée d'un angle plus ou moins considérable, suivant l'inclinaison du bâtiment. Pour pouvoir se servir avec une sécurité absolue des *déviations* déterminées, il faudrait trouver des valeurs de celles-ci correspondant à divers degrés de bande. On ne le fait pas d'ordinaire; mais il serait au moins opportun de tenter quelques expériences, afin de voir dans quelles limites les compas sont affectés par l'inclinaison du bâtiment.

Sur presque tous les navires à vapeur, avec cheminée à télescope, les déviations changent suivant que la cheminée est hissée ou amenée. Il serait donc bon d'étudier les déviations pour ces deux positions différentes de la cheminée. — Enfin, il arrive parfois, à la suite d'orages, de constater dans les compas des perturbations souvent assez considérables, alors surtout que le tonnerre a éclaté dans le voisinage du bâtiment. En pareille occurrence, il sera toujours très-prudent de faire le plus tôt possible des observations, pour s'assurer si les éléments magnétiques de chaque rose n'ont pas changé.

En résumé, le relevé des déviations, même fait avec le plus grand soin, doit être rectifié fréquemment, si l'on veut pouvoir naviguer avec sécurité. Mais qu'on ne l'oublie pas (n° 168), surtout au moment des *atterrissages*, l'élément par excellence, celui qu'un capitaine doit

toujours se préoccuper d'avoir exactement pour les principaux caps, c'est la *variation apparente*, c'est-à-dire la combinaison de la *déclinaison magnétique avec la déviation*. Son mode de détermination, indiqué au n° 171, n'est ni très-compliqué, ni très-long, et n'offre aucune difficulté. — L'usage du relevé antérieur des déviations n'a réellement sa raison d'être qu'au large. Il n'est admissible près des terres, que lorsque la détermination directe des valeurs de la *variation* est matériellement impossible. Bien des navires de commerce, dont la perte a été attribuée à leurs compas, seraient arrivés au port sans encombre si leurs capitaines, moins confiants dans le relevé antérieur des déviations, ou, pour mieux dire, si, plus consciencieux, ils s'étaient donné la peine de consacrer quelques instants à déterminer les *variations apparentes* à différents caps.

N° 174. Courbes de déviation des compas. Diagramme Napier; son tracé et son usage. — Comme contrôle de la bonté des résultats obtenus dans tout relevé des *déviations* d'un compas, et afin de faciliter la recherche *à posteriori* et sans interpolation des déviations qui conviennent à un cap quelconque, on a l'habitude de construire une *courbe de déviation*.

Cette construction ne demande aucune explication particulière. Les abscisses sont prises proportionnelles aux degrés de la circonférence de la rose; l'origine des coordonnées figure le point Nord, et les autres points de l'axe des abscisses comptés en allant de gauche à droite. correspondent aux divers caps, mesurés de 0° à 360° dans le sens N^d, E^t, S^d. O^t. Les ordonnées élevées normalement à cet axe. représentent, à une échelle arbitrairement choisie, mais en principe aussi grande que possible, les déviations observées à chaque cap. — Depuis plusieurs années, les ingénieurs de la marine chargés de fournir aux bâtiments en armement les courbes de déviation des compas, emploient de préférence, pour construire ces courbes, un diagramme particulier avec ordonnées *obliques*, dont l'idée revient à M. Napier, de Glascow. Voici en quoi consiste le procédé :

On trace d'abord, *fig.* 39, une ligne de 360 millimètres, que l'on partage en 32 divisions fondamentales d'égale longueur. Ceci se fait rapidement en se servant de l'échelle métrique, qui divise la ligne en 8 parties de 45 millimètres chacune; les autres subdivisions s'obtiennent par tâtonnement à l'aide d'un double décimètre. — On écrit ensuite le long de l'axe des abscisses, en commençant par la gauche, les noms des rhumbs de vent : N, N$\frac{1}{4}$NE,

NNE, etc., en faisant le tour du compas pour revenir au Nord, qui forme le premier et le dernier point de la ligne des abscisses. On écrit aussi depuis 0° jusqu'à 90°, les angles de 10° en 10° ou de

Fig. 39. Diagramme Napier pour déviations des compas. (Échelle = 1/4).

20° en 20°, compris entre les quatre points cardinaux. — Ceci terminé, par chacun des points de division fondamentaux, on mène un système de droites parallèles inclinées de *gauche* à *droite* de 60° sur l'axe des abscisses; et, par les mêmes points, un autre système de droites parallèles inclinées de DROITE à GAUCHE de 60° sur le même axe. Pour rendre ces deux systèmes bien distincts l'un de l'autre, on trace le premier en lignes *ponctuées*, et le deuxième en lignes PLEINES. Comme le tracé des lignes ponctuées est plus long à faire que celui des lignes pleines, on peut remplacer ces lignes ponctuées par des lignes pleines tracées à l'encre rouge. — Disons tout de suite, comme nous le verrons dans un instant, que les premières espèces de lignes servent à la construction de la courbe, et que les deux espèces jouent un rôle *simultané* dans l'usage de celle-ci. Ce rôle exige expressément que l'échelle des degrés soit la même sur les deux sortes d'ordonnées obliques que sur la ligne des abscisses.

Ces préparatifs achevés, il n'y a plus qu'à porter sur les ordonnées ponctuées, les diverses déviations qui conviennent aux caps indiqués par le compas étalon. Les longueurs à porter doivent être d'autant de millimètres qu'il y a de degrés dans la déviation. Par exemple, la déviation étant supposée de 20° 30′ NO pour le rhumb de vent NE du compas étalon, on porte $ab = 20^{mm},5$ sur l'ordonnée oblique *ponctuée* qui correspond à ce rhumb, et cela au-dessous de l'axe des abscisses, parce que la déviation est NO. On trouve ainsi un point *b* de la courbe. Les autres points s'obtiennent de la même manière, en ayant toujours soin de porter les déviations NE

au-dessus dudit axe, et les déviations NO AU-DESSOUS. — Si le rhumb considéré n'était pas l'un des 32 aires de vent principaux, on déterminerait à l'échelle le point de l'axe qui correspond à ce rhumb. Puis, à partir de ce point, on porterait la déviation correspondante parallèlement aux ordonnées ponctuées.

Quand tous les points de la courbe donnés par les déviations observées, sont portés sur les ordonnées ponctuées, on les joint par un trait continu, qui forme la *courbe cherchée.* L'ensemble de cette courbe et des deux systèmes d'ordonnées obliques, constitue le *diagramme Napier.*

— Il nous reste maintenant à expliquer *l'usage de ce diagramme pour le passage d'un cap magnétique réel au cap correspondant du compas étalon, et réciproquement.* Chacun de ces problèmes se résout au moyen de deux simples coups de compas à pointes.

Pour passer du cap lu au compas étalon au cap magnétique réel, on place une des pointes du compas sur le point a, par exemple, *fig.* 41, de l'axe des abscisses, lequel point indique le cap lu, et l'autre pointe sur la courbe des déviations, en ayant soin que la ligne ab, qui va de la première pointe a à l'autre b, soit parallèle aux lignes ponctuées. Relevant le compas sur la deuxième pointe b, on pose de nouveau la première sur l'axe des abscisses en c, en ayant soin cette fois que la ligne bc des pointes soit parallèle aux ordonnées pleines. Le point c indiqué sur ledit axe par cette pointe du compas, est le cap magnétique réel. — Et effectivement, on se trouve ici en présence d'un triangle équilatéral abc. Donc $ac = ab$; et comme suivant la convention expresse sus-mentionnée, l'échelle des degrés est la même sur toutes les coordonnées, il y a dans ac autant de degrés que dans ab. Mais cette dernière longueur représente évidemment la *déviation* afférente au cap considéré. De plus, d'après les directions successives données plus haut aux pointes du compas, ac est bien de même nom que ab, soit NO dans notre exemple; et dès lors le point c correspond parfaitement au *cap magnétique réel.*

Il est tout aussi facile de passer du cap magnétique réel au cap correspondant du compas étalon. On n'a qu'à placer l'une des pointes du compas sur le point c, par exemple, de l'axe des abscisses, qui exprime le cap magnétique, et l'autre pointe en b sur la courbe des déviations, en ayant soin cette fois-ci que la ligne cb qui va d'une pointe à l'autre soit parallèle aux ordonnées pleines. Relevant le compas sur la pointe b qui est sur la courbe, on place l'autre pointe

en *a* sur l'axe précité, avec la ligne des pointes tenue maintenant parallèle aux lignes ponctuées. Le point *a* marqué de la sorte sur l'axe des abscisses est le cap au compas étalon.

N° 175. Tableaux de déviations des compas; leur construction et leur utilité. — D'ordinaire, on construit, pour les besoins journaliers, deux tableaux, dont on voit des spécimens ci-après. L'un, le TABLEAU I, donne, par exemple, les caps magnétiques réels correspondant aux caps déviés du compas écrits de 10° en 10°. L'autre, le TABLEAU II, donne, au contraire, les caps déviés du compas correspondant aux caps magnétiques réels.

Pour simplifier, nous nous sommes borné à figurer seulement le premier et le cinquième demi-quart de chaque tableau. Mais ces données sont très-suffisantes pour l'entière compréhension du système. Par ailleurs, un seul tableau peut suffire au besoin; mais il est évidemment plus commode d'en avoir deux, pour simplifier les interpolations.

TABLEAU I

donnant les caps magnétiques réels correspondant aux caps déviés du compas.

CAPS déviés du compas. 1	CAPS magnétiques réels. 2	DÉVIATIONS. 3	CAPS déviés du compas 1	CAPS magnétiques réels. 2	DÉVIATIONS. 3
N^{d}	N 11° O^{t}	11° N O	N^{d}	N 11° O^{t}	11° N O
N 10° E^{t}	N 7° O^{t}	17° N O	N 10° O^{t}	N 14° O^{t}	4° N O
N 20° E^{t}	N 4° O^{t}	24° N O	N 20° O^{t}	N 17° O^{t}	3° N E
N 30° E^{t}	N^{d}	30° N O	N 30° O^{t}	N 20° O^{t}	10° N E
N 40° E^{t}	N 5° E^{t}	35° N O	N 40° O^{t}	N 23° O^{t}	17° N E
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .

TABLEAU II

donnant les caps déviés du compas correspondent aux caps magnétiques réels.

CAPS magnétiques réels. 1	CAPS déviés du compas. 2	DÉVIATIONS. 3	CAPS magnétiques réels. 1	CAPS déviés du compas. 2	DÉVIATIONS. 3
N^{d}	N 30° E^{t}	30° N O	N^{d}	N 30° E^{t}	30° N O
N 10° E^{t}	N 49° E^{t}	39° N O	N 10° O^{t}	N 1° E^{t}	11° N O
N 20° E^{t}	N 63° E^{t}	43° N O	N 20° O^{t}	N 30° O^{t}	10° N E
N 30° E^{t}	N 77° E^{t}	47° N O	N 30° O^{t}	N 57° O^{t}	27° N E
N 40° E^{t}	N 87° E^{t}	47° N O	N 40° O^{t}	N 80° O^{t}	40° N E
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .

N. B. — Les nombres de ces deux tableaux sont déduits de la courbe de déviations représentée *fig.* 41, mais dessinée à grande échelle. — A cause des changements rapides des déviations, il vaudrait mieux, dans un cas analogue, faire varier de 5° en 5° les nombres portés dans les colonnes 1.

Les tableaux précédents n'offrent aucune difficulté de construction. Il suffit de relever, une fois pour toutes, sur la courbe, les données nécessaires, en suivant pour cela la marche indiquée au n° 174. On achève chaque tableau par la colonne 3, donnant, pour le premier, la déviation correspondant à chaque cap dévié du compas, et, pour le second, la déviation correspondant à chaque cap magnétique réel.

Les tableaux en question sont fort utiles en ce qu'ils permettent de passer très-rapidement d'un relèvement observé au compas à un

relèvement vrai, et réciproquement. Pour un bâtiment appelé à louvoyer dans des passes tortueuses, où les changements de route sont fréquents, et où il faut pouvoir très-rapidement porter sa position sur une carte, ils sont à peu près indispensables. Dans ce cas, on se procure la déclinaison magnétique locale pour l'année où l'on se trouve; et on corrige de cette déclinaison les relèvements magnétiques réels, après qu'on les a déduits du TABLEAU I à l'aide des relèvements déviés. — Réciproquement, pour changer la route, on commence par prendre sur la carte la nouvelle route vraie. Celle-ci, corrigée de la déclinaison magnétique, donne la route magnétique réelle, avec laquelle on entre dans le TABLEAU II des déviations; et là on obtient la route magnétique déviée, c'est-à-dire celle que l'on doit donner au timonier.

Ainsi que nous l'avons déjà dit plusieurs fois (nos 168 et 171), l'état magnétique du navire change à mesure que le navire se déplace. On doit donc regarder les COURBES et les TABLEAUX DE DÉVIATION comme ne convenant qu'aux lieux qui possèdent une intensité et une inclinaison magnétique peu différentes de celles de l'endroit où les observations ont été faites. — Quand ces éléments ont éprouvé des changements notables, il convient de déterminer de nouveau lesdites courbes et tableaux; c'est surtout à bord des navires en fer ou à vapeur qu'on doit fréquemment s'assurer de la valeur des déviations.

N° 176. Erreurs systématiques et erreurs accidentelles des instruments de route. Erreurs dues au gouvernail. — Pour la mesure de la vitesse du navire, les erreurs *systématiques* sont susceptibles de provenir d'un sablier d'une durée inexacte, auquel cas rien n'est plus facile que de le reconnaître avec le compteur. Mais le plus souvent elles sont dues aux mauvaises proportions du loch, signalées au n° 167. Il est alors très-difficile, sinon impossible, de les apprécier. — Les erreurs *accidentelles* afférentes à ladite mesure dépendent de l'habileté des timoniers. Il importe dès lors de styler avec soin cette catégorie d'individus, pour restreindre à leur minimum les erreurs dont il s'agit. L'appréciation de ces erreurs ne peut se faire que sur place. Elle est évidemment variable, du reste, d'un navire à un autre, et en outre pour un même navire d'une allure à une autre.

Pour les boussoles, les erreurs *systématiques* peuvent provenir d'un mauvais montage des roses, d'une graduation imparfaite, etc., toutes circonstances qu'il est aisé de reconnaître avec un peu de soin. — D'autre part, les erreurs *accidentelles* proviennent principalement

ici des défauts de lecture, surtout à la lumière. Il faut donc s'efforcer de s'en affranchir par des exercices fréquents des personnes chargées de lire au compas. Avec un peu d'habitude, il y a lieu de compter sur une approximation de 2° à 3° par angle lu.

De son côté, le gouvernail, lui aussi, peut donner lieu, sur la détermination de la route, à des erreurs systématiques ou accidentelles. Les erreurs *systématiques* se manifestent, par exemple, si le bâtiment a un faux bord, et qu'il faille toujours laisser la barre un peu oblique pour gouverner. Il résulte, en effet, de ce chef une dérive plus ou moins marquée, dont on pourra du reste, avec un peu de soin, parvenir à apprécier la grandeur. — Les erreurs *accidentelles* dues au gouvernail proviennent des embardées produites par l'homme de barre.

Il est à peine besoin d'ajouter que, dans les diverses sortes d'erreurs *systématiques* précédentes, il n'y a pas à se préoccuper de la partie afférente à *l'équation personnelle* (n° 118), qui est un élément ne devant se prendre en considération que dans les observations délicates. — Nous rappellerons aussi que, pour les erreurs systématiques, il n'y a moyen de se débarrasser de leur influence qu'en les défalquants *à priori*, quand on les connaît, du résultat des observations. Pour les erreurs *accidentelles*, au contraire, on réduit aisément leur influence en répétant le nombre des observations, et en prenant des *moyennes*. Ainsi, si on craint des erreurs de lecture sur la rose, ou des erreurs de route par embardées, il faudra lire fréquemment le cap, et prendre, par série, la *moyenne* des angles lus.

3e PARTIE. — § III. CONSIDÉRATIONS SUR LE CHOIX ET L'USAGE DES INSTRUMENTS A RÉFLEXION ET DES HORIZONS ARTIFICIELS.

N° 177. Principe de la mesure des angles par répétition et par réitération. — La tendance actuelle est de substituer le sextant au cercle à réflexion. Nous verrons au numéro suivant quels sont les véritables motifs de cette tendance.

Mais il importe, auparavant, de mettre le lecteur en garde contre une IDÉE FAUSSE qui s'est propagée dans ces derniers temps, et dont l'origine ne saurait être attribuée qu'à une *confusion de définitions.* Nous voulons parler de l'opinion qui consiste à regarder le cercle comme un instrument à *répétition de contact*, et le sextant comme un instrument à *réitération de contact.* Or, ainsi que nous

allons le voir dans un instant, les instruments à *réitération* permettent d'obtenir des résultats plus précis que les instruments à *répétition*. Dès lors, on s'est empressé de baser sur cette circonstance, la *raison capitale* qui devait désormais faire adopter exclusivement le sextant. Mais la conclusion pèche ici par la base; car *le sextant n'est aucunement un instrument à réitération de contact.*

— Pour mettre le point bien en évidence, nous allons donner quelques explications succinctes sur la mesure des angles par *répétition* ou par *réitération*.

Dans la *répétition*, on mesure le même angle un certain nombre de fois, en ramenant chaque fois dans sa direction première et maintenue *fixée* au limbe, l'alidade avec laquelle on doit lire le résultat. La théorie des probabilités démontre qu'un instrument à *répétition*, et par suite à *deux pièces pivotantes*, est préférable, eu égard à la petitesse d'*erreur probable* (n° 122) des résultats, à un instrument *simple*, c'est-à-dire à une *seule pièce pivotante*, et avec lequel on prend des valeurs *successives* de l'angle à obtenir, en partant toujours de la même division du limbe, dont le zéro ne cesse d'être maintenu dans une même direction. Et effectivement quand on mesure un angle par des observations *répétées*, la valeur de cet angle s'obtient en divisant l'arc total parcouru sur le limbe par le double $2n$ du nombre n des observations *répétées*, c'est-à-dire par le nombre même $2n$ des contacts pris. Or, cette mesure est affectée de $2n$ erreurs de contact, et de deux erreurs de lecture. Si l'on désigne par :

r l'erreur probable d'un contact simple,
l l'erreur probable d'une seule lecture,
R l'erreur probable commise sur l'angle,

on a, conformément au n° 128 :

$$\mathrm{R} = \pm \frac{\sqrt{2nr^2 + 2l^2}}{2n} = \pm \sqrt{\frac{r^2}{2n} + \frac{l^2}{2n^2}}.$$

On voit par cette formule que l'erreur due aux contacts et à la lecture diminue, à mesure que le nombre n des observations répétées augmente. Cette diminution, assez rapide d'abord, est beaucoup moins sensible dès que n atteint 10 ou 12; ce qui prouve, soit dit en passant, qu'il n'y a pas avantage à dépasser cette limite pour le nombre des répétitions. Il existe d'ailleurs une autre raison qui doit également empêcher de pousser trop loin le principe de la répétition : c'est que l'erreur de contact comprend une *partie systématique*,

l'équation personnelle de l'œil (n° 118), qui ne s'élimine point en multipliant les angles; et par suite, cette dernière erreur agit tout entière sur chaque angle observé. Il n'y a moyen d'en réduire l'influence qu'en augmentant le grossissement de la lunette de l'instrument.

De son côté, la méthode *de réitération* s'emploie en principe avec les instruments à une seule pièce pivotante. Elle consiste à mesurer le même angle un certain nombre de fois, en déplaçant systématiquement et de quantités égales, le zéro du limbe par rapport à l'axe autour duquel il tourne, de manière à lui faire parcourir dans l'espace une circonférence entière. En prenant la moyenne de toutes ces observations, on arrive à éliminer complétement, par compensation, la partie *périodique* des erreurs de division, l'effet de l'excentricité, ainsi que les autres erreurs *systématiques* dues à l'instrument. Or cela n'a point lieu avec les instruments à répétition. Sans compter qu'on n'a pas ici à craindre *l'effet d'entraînement* de l'alidade de lecture, si redoutable avec ces instruments. — Quant aux erreurs *accidentelles*, elles se trouvent diminuées dans le rapport $\frac{1}{\sqrt{n}}$, n étant le nombre des réitérations, sauf l'erreur de lecture, qui, au contraire, se conserve évidemment tout entière dans la moyenne des n observations. Mais comme on tend aujourd'hui à substituer les microscopes micrométriques aux verniers, cette dernière erreur est alors extrêmement petite par rapport aux erreurs de division, et devient négligeable.

— Comme on le voit, *la réitération ne saurait aucunement s'appliquer au sextant*, puisqu'on ne peut pas y déplacer dans l'espace le zéro du limbe. Mais chose curieuse, la réitération s'effectue *ipso facto* dans le cercle; car en y réfléchissant, on voit qu'avec les observations tant *croisées* que *d'un même côté*, c'est-à-dire toutes à droite ou à gauche, le zéro du limbe finit par parcourir 360°, quand on prend un nombre suffisant de contacts successifs. D'après cela, le cercle jouirait de la propriété spéciale d'être à la fois un instrument à *répétition* et à *réitération*.

N° 178. Comparaison entre le cercle à réflexion et le sextant. Choix d'un sextant. — Il résulte des considérations du numéro précédent que, dans la comparaison entre le cercle et le sextant, on ne saurait invoquer en faveur de ce dernier la méthode de *réitération*, méthode dont l'essence est tout à fait ignorée de ceux qui prétendent baser là-dessus la primauté du second des

instruments en question sur le premier. Il faut donc reprendre à un point de vue général ladite comparaison, en supposant d'ailleurs qu'on n'a affaire qu'à un seul et même observateur, ou sinon à des observateurs également exercés.

Ceci posé, voici les avantages du cercle :

1° Les observations elles-mêmes s'effectuent plus rapidement et avec plus de précision. D'après le n° 177, les erreurs de graduation et de lecture sont notablement atténuées par le nombre des contacts, et grâce au fonctionnement *ipso facto* du cercle par *réitération;* d'un autre côté, les erreurs sur le point de collimation disparaissent.

2° L'influence de l'excentricité (n° 180) de l'alidade du grand miroir est considérablement affaiblie par la nature même de l'instrument, qui se prête mieux à un centrage parfait. Elle peut d'ailleurs être annulée, si le nombre des observations croisées ramène l'alidade près de son point de départ. La lunette du cercle étant, par la disposition même des choses, plus solidement reliée au limbe que dans le sextant, cette fixité assure bien mieux la constance du parallélisme de l'axe optique pendant la durée des observations.

Toutefois, les adversaires du cercle opposent à ces avantages les inconvénients suivants :

1° Moindre grossissement de la lunette. Cela était peut-être vrai autrefois; mais actuellement les lunettes astronomiques des cercles ont le même grossissement, 7 à 8 fois, que celles des sextants. Pour profiter des avantages de la répétition, il serait à désirer que les lunettes des cercles fussent munies de deux oculaires, l'un donnant un grossissement ordinaire de 7 à 8 fois, et l'autre un grossissement de 12 à 15 fois; ce dernier oculaire serait naturellement réservé pour les observations de précision.

2° Le rayon du cercle étant plus petit que celui du sextant, les lectures se font avec moins de précision. La vogue des sextants actuels tient surtout à ce que, grâce à la grandeur de leur rayon, le limbe peut être divisé en angles très-petits, et néanmoins assez lisibles pour permettre d'apprécier, avec le vernier, les *dix secondes* sans trop fatiguer l'œil.

3° On a à craindre le glissement des alidades pendant la répétition des angles. Malheureusement, ce glissement ne peut être évité en rendant les vis de rappel *un peu dures*, ainsi que le pensent certaines personnes. M. Chauvenet n'a trouvé d'autre moyen, pour remédier au défaut qui nous occupe, que la disposition suivante : L'alidade

du grand miroir devrait être la seule à porter un axe de rotation traversant le noyau central du cercle; l'alidade du petit miroir tournerait alors sur un collier fixe formé par l'extérieur dudit noyau, et dont le but serait de supprimer tout point de contact entre les deux alidades.

4° De mauvais temps à la mer, il y a impossibilité de mesurer les hauteurs au cercle, à moins de s'en servir comme simple sextant.

5° Les observations sont plus difficiles qu'avec le sextant, tant à cause du poids de l'instrument que de l'adresse exigée dans le maniement du cercle.

6° Enfin, le prix du cercle est près du double de celui du sextant.

Ce dernier motif, joint aux deux précédents, a contribué notablement à faire abandonner le cercle.

Il ne demeure pas moins acquis, eu égard à la discussion précédente, que le cercle doit être conseillé pour les *observations de précision*, et pour les *gens soigneux* qui ne craindront pas de s'astreindre à toutes les précautions exigées pour tirer le meilleur parti de l'instrument. Mais attendu, en somme, que le sextant, avec ses derniers perfectionnements, est suffisant comme précision pour l'usage de la navigation, on comprend que son emploi tende à se substituer de plus en plus à celui du cercle; et l'on peut prévoir le moment où celui-ci disparaîtra complétement à bord des navires.

— Étant admis que le sextant est aujourd'hui l'instrument à réflexion généralement adopté, nous nous en occuperons d'une manière exclusive, afin de rester dans le domaine de l'application. Parlons d'abord de l'attention à apporter dans son choix.

Il est à peine besoin de dire que sa fabrication doit être assez soignée pour que les erreurs *systématiques* signalées au n° 180 ci-après, y soient aussi restreintes que possible. Mais à côté de cette supériorité de confection, il y a des détails de disposition qui doivent satisfaire à des conditions déterminées. Ainsi la graduation, tout en donnant sur le limbe la dizaine de minutes, et sur le vernier la dizaine de secondes, doit être d'une lecture facile; ce qui exige, outre une certaine grandeur pour le rayon du limbe, une parfaite installation de loupe et de vernier. De même, il importe que les vis diverses qui servent à tenir ou à rectifier les miroirs, ou encore à fixer l'alidade, soient confectionnées chacune d'une certaine façon; il faut en principe qu'elles puissent se serrer carrément, et que, sans aucun jeu, leur desserrage soit doux.

Malheureusement tel artiste qui réussit bien pour certaines des

dispositions dont nous venons de parler, pêche par les autres. Aussi à notre connaissance nous ne voyons présentement aucun fabricant dont les instruments puissent être signalés comme des modèles du genre sous tous les rapports.

N° 179. Sextants de nuit : systèmes Laurent, Fleuriais et autres. Moyen de faciliter de nuit la lecture des angles. — Pour les observations d'étoile, on a essayé depuis plusieurs années divers systèmes. Ainsi on a employé avec succès l'instrument inventé par M. Laurent. Il diffère du sextant ordinaire par diverses dispositions particulières, dont les principales sont les suivantes :

1° Interposition entre les deux miroirs d'une lentille, qui offre, dans le sens perpendiculaire à la fois à sa largeur et au plan du limbe, une *section rectiligne-convexe.* La partie rectiligne est tournée du côté du petit miroir, et doit être perpendiculaire au plan du limbe. Dans ces conditions, la lentille transforme l'image réfléchie de l'étoile en une ligne lumineuse destinée à se confondre avec l'horizon. Ceci évite à l'œil la difficulté de s'accommoder à la différence de vision pour une ligne et pour un point. — Lorsqu'il faut, comme pour la mesure des hauteurs d'étoile avec l'horizon artificiel, allonger à la fois l'image directe et l'image réfléchie, la lentille se place en avant du petit miroir, c'est-à-dire entre celui-ci et l'œil, ou plutôt se loge dans la lunette.

2° Adaptation d'une lunette terrestre à grand objectif, afin d'avoir le plus possible de clarté, ce qui constitue la condition fondamentale des bonnes observations de nuit.

3° Usage d'un petit miroir, dans lequel la partie non étamée est supprimée, de manière à pouvoir viser plus directement l'horizon.

Cet instrument a été expérimenté sur le bâtiment école d'application, et a donné de bons résultats. Cependant on lui a fait diverses objections, dont la plus grave est celle-ci : lorsque l'horizon est très-peu visible, l'éclat de l'étoile agissant par contraste, fait disparaître l'horizon justement dans la partie où doit s'établir le contact. L'observateur est ainsi réduit à mettre un filet lumineux en alignement avec deux éléments de ligne droite plus pâles, auxquels il sert d'intermédiaire. Cette opération, compliquée de la nécessité du balancement pour parfaire le contact, devient assez délicate d'après M. Fleuriais, pour enlever toute confiance aux résultats d'observation.

Les lecteurs qui désireraient plus de détails, n'auront qu'à con-

sulter la brochure de M. Laurent intitulée : « *Notice sur une modification aux instruments à réflexion* », éditée à Nantes.

— M. Fleuriais, à la suite des expériences sus-mentionnées, s'est proposé de remédier aux inconvénients que l'expérience lui a fait reconnaître au sextant de M. Laurent.

L'instrument de M. Fleuriais ne diffère des sextants ordinaires que par une lunette *ad hoc* pour les observations de nuit et par l'emploi d'un prisme. La lunette en question est une lunette astronomique de bien plus grandes dimensions que celle que l'on emploie d'habitude. L'objectif a ici 40^{mm} de diamètre, et la longueur totale du tube est de 216^{mm}. A cause de son poids et afin de pouvoir être démontée facilement, la lunette est supportée par une disposition spéciale, différant de la monture habituelle.

D'ailleurs, afin de faire disparaître l'inconvénient signalé au sujet de la lentille Laurent, M. Fleuriais interpose entre le grand miroir et le petit miroir le prisme mentionné plus haut, et qui est un prisme bi-réfringent de Wollaston. Grâce à cette interposition, le rayon incident sur le petit miroir se trouve divisé en deux rayons, faisant entre eux un angle connu d'avance, et que l'auteur conseille de prendre de 15′. — Avec ce prisme, si en balançant l'instrument on voit l'horizon passer entre les deux images de l'astre, on a la certitude que la hauteur observée ne peut être entachée d'une erreur plus grande que la moitié de l'angle d'écartement précité. Ce fait est d'une importance très-grande; car il donne une limite de l'erreur commise, chose qu'on ignore absolument en employant tout autre procédé.

En résumé, des expériences nombreuses entreprises avec ce nouvel instrument ont amené à conclure que, en outre de l'avantage précédent, *la limite de visibilité* était celle de l'œil nu, ce qui est évidemment tout ce qu'on est en mesure d'obtenir.

— En dehors des deux systèmes précédents, on a encore proposé récemment, pour les observations de nuit, l'adoption aux sextants d'un binocle ordinaire de spectacle.

Mais l'avantage de ce procédé est fort contesté; car, outre l'addition de poids relativement considérable qui en résulte, on prétend que la vision *binoculaire* est inférieure à la vision *monoculaire* pour l'observation des contacts de deux objets.

— Parmi les diverses difficultés que l'on éprouve dans les observations de nuit, une des plus sérieuses réside dans la lecture des angles. A moins d'avoir une lanterne spécialement faite dans ce but, et pro-

jetant à l'aide d'une lentille un jet de lumière sur la graduation, on est souvent arrêté pendant fort longtemps avant de distinguer aucune des divisions du limbe. Ennuyé et fatigué par des tentatives de toutes sortes, on finit souvent par ne lire qu'à peu près, c'est-à-dire fort mal, l'angle observé. — Un officier qui s'est spécialement occupé des observations de nuit propose le procédé suivant, qui lui a souvent réussi :

Au moment de faire une lecture, on allume au fanal dont est muni l'aide-compteur une de ces mèches jaunes de fumeur que la plupart des officiers ont en poche. Approchant la mèche en feu derrière le verre dépoli qui abrite le vernier, on fait sa lecture, en se tenant en travers au vent, de manière que la brise souffle sur la mèche et active quelque peu sa combustion; l'éclat qui en résulte est, paraît-il, suffisant pour rendre parfaitement visibles les divisions du limbe.

N° 180. Énumération des erreurs systématiques et des erreurs accidentelles des sextants. — Les erreurs *systématiques* (n° 118) des sextants sont de deux espèces. Les unes proviennent des défauts de construction, tels que : — gondolement du limbe; — vernier inexact; — mauvaise graduation, — excentricité de l'alidade, qui tourne alors autour d'un point qui n'est pas le centre de l'arc gradué du limbe; — enfin prismatisme des miroirs et des verres de couleur. Avec la perfection des instruments actuels, ces erreurs, sauf celle inhérente à l'excentricité, sont en principe négligeables.

Les secondes espèces d'erreurs *systématiques* sont dues à une rectification mal exécutée de l'instrument, ou à un dérangement ultérieur de rectification par suite d'un desserrage de vis. De ces circonstances il peut résulter les effets suivants : — non-parallélisme de l'axe optique de la lunette ou plus généralement de la ligne de visée par rapport au plan du limbe ; — inclinaison indue des miroirs sur ce même plan ; — angle de collimation inexact. Il reste à joindre à ces causes l'équation personnelle de l'œil (n° 118).

De leur côté, les erreurs *accidentelles* (n° 119) du sextant résultent en principe des circonstances suivantes : — inhabileté de l'observateur, pour la mise en contact des objets observés ; — ondulations et manque de netteté de l'horizon ; — influence de l'angle de visibilité (n° 189) ; — glissement fortuit de l'alidade.

— Nous allons examiner en détail, dans les numéros qui suivent, les différentes sortes d'erreurs, tant systématiques qu'accidentelles, que nous venons d'énumérer. Nous indiquerons en même temps la ma-

nière de les reconnaître, de les apprécier, et, quand elles sont accidentelles, de diminuer leurs effets. Chaque examen sera d'ailleurs plus ou moins étendu, suivant l'importance de l'erreur considérée.

Il importe de rappeler, comme nous l'avons déjà fait au n° 176, que l'on ne saurait (n° 118) s'affranchir de l'influence des erreurs *systématiques* qu'en les éliminant *à priori* des résultats d'observations, ce qui exige qu'on parvienne à les connaître. Mais pour les erreurs *accidentelles*, tout en tirant d'abord grand avantage de la plus grande réduction possible de leurs valeurs, on est à même, par ailleurs, d'atténuer notablement leurs effets par la répétition des opérations et l'emploi de *moyennes*.

N° 181. Gondolement du limbe. Vernier incorrect, et inexactitude de la graduation dans les sextants. — On reconnaît le gondolement du limbe quand le grand miroir ayant été rectifié dans une certaine position de l'alidade, cesse de l'être pour une autre position. Ce procédé de vérification est un peu long à appliquer; aussi est-il peu usité. Mais c'est à grand tort; car il arrive maintes fois à un observateur d'avoir entre les mains des instruments qui ont leurs limbes faussés. Il va sans dire que le procédé est trop imparfait pour dénoter de très-petites imperfections; mais si l'instrument est sérieusement endommagé, on s'en apercevra certainement. — En tout état de cause, le gondolement du limbe est un défaut *irremédiable*, en ce sens qu'on ne peut en apprécier l'influence sur les angles observés. Aussi dès qu'il est bien constaté, il faut se hâter de mettre de côté l'instrument qui en est affecté.

— Un vernier est mal monté lorsque dans le mouvement de l'alidade, son bord ne s'appuie pas bien également sur le limbe dans toute son étendue. — D'autre part, pour s'assurer qu'il a bien la dimension voulue, on amène son trait zéro exactement dans le prolongement d'un des traits du limbe. Puis, on examine avec soin les traits en regard du limbe et du vernier. On devra les voir s'écarter progressivement l'un de l'autre, de façon que le dernier trait numéroté de la gauche du vernier se retrouve en coïncidence avec une division du limbe. — Si ces diverses conditions sont remplies, le vernier est bien divisé; *s'il en était autrement, le vernier serait ou mal centré ou mal divisé.*

— La vérification que nous venons d'indiquer pour le vernier, sert en même temps à voir si les divisions du limbe sont égales. Il reste à s'assurer si ces divisions ont bien la dimension voulue. Ceci se fait en mesurant dans un même plan horizontal toute une série

d'angles, dont on connaît par ailleurs les grandeurs, soit qu'on les ait déterminées *à priori* par des mesures au théodolite, soit qu'on les déduise d'une carte de l'endroit où l'on opère. — Au besoin, on se bornera à mesurer un grand nombre de fois une suite d'angles comprenant exactement le tour de l'horizon, et dont les valeurs observées devront former une somme exacte de 360°, si la graduation est bonne. — Dans toutes les opérations précédentes, il conviendra de placer l'instrument sur une table; de choisir tous les points à observer dans le plan des arêtes supérieures des deux viseurs posés sur le limbe; et enfin de prendre les angles avec l'instrument maintenu en place sur la table.

Si la vérification qui nous occupe ne donne pas de résultat satisfaisant, il faudra, avant d'en déduire l'erreur de graduation, étudier s'il n'y a pas excentricité de l'alidade, et commencer par tenir compte de cette défectuosité.

N° 182. De l'excentricité dans les sextants. — Plusieurs auteurs ont cru devoir, dans ces derniers temps, attirer l'attention des marins sur ce défaut. Les meilleurs instruments, même actuels, en sont tous affectés plus ou moins, sans qu'on s'en soit préoccupé pendant longtemps, à telle enseigne que les traités de navigation, tant en France qu'à l'étranger, qui remontent à quelques années n'en font aucune mention.

L'analyse montre qu'une imperfection même très-petite dans le centrage de l'alidade du grand miroir, est susceptible de produire, en de certains cas défavorables, une erreur considérable. Pour obvier à cette erreur, on a proposé des formules de correction. Ces formules sont surtout intéressantes, en ce sens qu'elles montrent la grande utilité d'un bon centrage. Mais pour l'application, il est beaucoup plus commode de dresser *à priori* un tableau de corrections à deux colonnes, et où l'angle mesuré est l'argument. — Ceci se fait en observant avec le plus grand soin une série d'angles, déterminés d'avance de la manière indiquée au numéro précédent.

Quoi qu'il en soit, ces sortes de corrections *nous semblent devoir être réservées aux observations de précision*, comme celles qu'il y a lieu de faire pour la détermination *perfectionnée* des états absolus (n° 138), ou encore pour la rectification de ceux-ci après perturbation, à l'aide de distances lunaires (nos 67 et 76).

Pour montrer l'importance des corrections d'excentricité dans les opérations délicates, nous citerons l'exemple suivant :

Un voyageur anglais qui s'était proposé de faire la carte d'une partie de la Mandchourie, détermina sa latitude de départ à l'aide d'un sextant. Selon la valeur de la déclinaison des astres observés, et par suite suivant la grandeur de la hauteur méridienne, il obtint des résultats différents : l'écart atteignait même 40″. Ses hauteurs corrigées de l'erreur d'excentricité ramenèrent une concordance assez grande pour qu'il pût fixer la latitude en question à 2″ près, chiffre qui fut vérifié plus tard par des astronomes russes munis d'instruments astronomiques.

— Dans tous les cas, il est utile de faire des expériences pour chercher approximativement la *grandeur même* de l'excentricité. Si par hasard on trouvait un nombre supérieur à 1/10 de millimètre, on devrait rejeter l'instrument. Pour des nombres plus petits, il y aura lieu de dresser le tableau de corrections indiqué ci-dessus. — Quant à la manière d'obtenir la grandeur même de l'excentricité, voici la marche à suivre :

On détermine avec le plus de soin possible l'*angle de collimation* (*) du sextant à vérifier. A cet effet, on vise une étoile brillante que l'on amène plusieurs fois de suite en coïncidence avec elle-même ; on lit à chaque contact, et l'on prend, pour valeur dudit angle de collimation, la moyenne des lectures. — Cela fait, on choisit deux objets bien nets et bien définis, lumineux de préférence, dont la distance angulaire exactement déterminée *à priori* atteigne 60° environ. On mesure cette distance avec le sextant. On effectue la même opération pour deux autres objets, dont la distance angulaire bien connue à l'avance soit de 120° environ. Si les deux mesures faites au sextant, corrigées de l'*angle de collimation*, ne concordent pas avec les distances réelles, c'est que l'instrument est *excentré*. On pourra alors déterminer, d'après les différences constatées, la grandeur même de l'excentricité à l'aide d'une formule donnée plus loin. — Si l'instrument était mal gradué, l'excentricité ainsi déterminée ne serait pas rigoureuse. Pour reconnaître le fait, il suffira de mesurer de nouveaux angles de grandeurs connues, et de s'assurer si les valeurs observées corrigées de l'influence de l'excentricité trouvée concordent ou non avec lesdites grandeurs. Dans le cas de la négative, on commencera par dé-

(*) Dans ce qui suit, nous emploierons cette expression de préférence à celle d'*erreur instrumentale*. Ce choix est justifié par la nécessité de ne pas donner à l'angle dont il s'agit, un nom qui puisse faire confusion avec les erreurs *véritables* que nous avons à considérer.

terminer au moyen de l'excentricité obtenue une valeur approchée de la rectification (n° 181) à faire subir à la graduation ; et, à l'aide de cet élément, on cherchera une nouvelle expression plus exacte de l'excentricité.

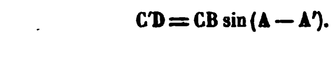
En tout état de cause, il ne faut pas confondre la formule dont il s'agit avec la relation que l'on trouve dans Brunnow et dans Chauvenet, et qui ne convient qu'à des instruments où la lecture s'effectuant à l'aide de micromètres, n'est pas affectée, comme avec l'emploi de verniers, par l'excentricité. Nous commencerons néanmoins par montrer comment on établit cette relation, afin de familiariser, pour un cas simple, le lecteur avec le genre de question qui nous occupe.

Dans un cercle ou un secteur divisé, supposons que le centre de rotation C′, *fig.* 42, de l'alidade ne coïncide pas avec le centre de la graduation C. Pour trouver l'effet de cette excentricité, désignons par :

O le zéro de la graduation ;
E le point du cercle situé sur la ligne des deux centres ;
A la véritable valeur de l'angle à prendre, compté de la ligne OC : cette valeur est évidemment représentée par l'arc BO = angle OCB ;
A′ la valeur B′O de l'angle à prendre affectée de l'erreur d'excentricité ;
F l'angle OCE correspondant au rayon qui passe à la fois par le centre C du limbe et par celui C′ de l'alidade ;
r le rayon CB du cercle ou du secteur gradué ;
e l'excentricité CC′.

S'il n'y avait pas d'excentricité, l'arc donné par l'instrument serait BO, tandis qu'on a obtenu B′O. Il est facile de trouver l'expression de (BO—B′O) = (A—A′). En effet, eu égard à la petitesse de la distance CC′ des deux centres, l'arc BB′ est sensiblement égal à la perpendiculaire C′D. On a donc :

Fig. 42, relative à l'évaluation de l'excentricité dans les instruments de mesure d'angles.



$$C'D = CB \sin(A - A').$$

D'autre part, le triangle CC′D donne :

$$C'D = CC' \sin C'CD = CC' \sin(A - F).$$

De ces deux équations on déduit en remplaçant sin (A — A′) par (A — A′) sin 1″ :

$$(A - A') = \frac{CC'}{CB}\,\frac{\sin(A - F)}{\sin 1''} = \left(\frac{e}{r}\right)\frac{\sin(A - F)}{\sin 1''}.$$

Telle est la formule qui donne l'erreur due à l'excentricité, et dans le second membre de laquelle on peut

remplacer en pratique A par A'. Elle sert incidemment à trouver l'excentricité e elle-même. Il suffit pour cela d'y prendre e et F pour inconnues, et de déterminer par des expériences *ad hoc* diverses valeurs de (A—A'), en admettant d'ailleurs que le rayon r peut se mesurer directement. — A cause du facteur $\frac{1}{\sin 1''}$ qui a une grande valeur numérique, le nombre de secondes qui exprime l'erreur d'excentricité pourra être assez considérable, quand bien même e ne serait qu'une petite fraction de r.

Dans le cas du sextant, la formule précédente se complique un peu, parce qu'il faut nécessairement tenir compte de l'influence de l'excentricité : 1° sur la lecture faite avec le vernier, abstraction faite de l'erreur pouvant provenir d'un léger défaut de centrage de ce dernier avec l'alidade, et qui est d'ordinaire absolument négligeable ; 2° sur le *point de collimation*. Soient :

A la vraie valeur de l'angle à prendre, compté de la ligne qui va du centre même de l'arc gradué au zéro du limbe ;
A' la valeur dudit angle affectée de l'erreur d'excentricité ;
A'' l'angle lu sur le sextant avec le vernier ;
B l'angle lu sur le limbe correspondant à la division de celui-ci coïncidant avec le trait du vernier le plus près du zéro de ce dernier : cette recommandation étant nécessitée par la considération que, par suite de l'excentricité, il peut y avoir coïncidence ou mieux croisement entre plusieurs traits successifs du limbe et du vernier ;
F le même angle que plus haut ;
α et α' les angles dont les côtés partant des centres C et C' vont aboutir, d'une part, au zéro du vernier, et, d'autre part, au trait de celui-ci mentionné en B.

Nous nous rappellerons d'ailleurs que les angles lus sur le sextant sont le double des arcs réels du limbe compris entre les deux mêmes divisions. — Cela compris, on a d'abord, d'après la relation trouvée plus haut :

$$(A - A') = \left(\frac{e}{r}\right) \frac{\sin 1/2 (A - F)}{\sin 1''}.$$

Il s'agit de remplacer dans cette égalité A' en fonction de A''. Or on a évidemment $A' = (B - \alpha)$, et, en vertu même de la théorie du vernier, $A'' = (B - \alpha')$. D'où on tire $A' = A'' + (\alpha' - \alpha)$. On calcule aisément que :

$$(\alpha' - \alpha) = \left(\frac{e}{r}\right) \left[\frac{\sin 1/2 (B - F)}{\sin 1''} - \frac{\sin 1/2 (A - F)}{\sin 1''}\right].$$

Dès lors, il vient manifestement :

$$(A - A'') = \left(\frac{e}{r}\right) \frac{\sin 1/2 (B - F)}{\sin 1''}.$$

En distinguant par l'indice 0 les divers éléments de même espèce que pour un angle quelconque, convenant à l'angle de collimation, nous obtiendrons la nouvelle relation :

$$(A_0 - A''_0) = \left(\frac{e}{r}\right) \frac{\sin 1/2\,(B_0 - F)}{\sin 1''}.$$

En retranchant membre à membre cette équation de la précédente, on trouve :

$$(A - A_0) - (A'' - A''_0) = \left(\frac{e}{r}\right) \left[\frac{\sin 1/2\,(B - F)}{\sin 1''} - \frac{\sin 1/2\,(B_0 - F)}{\sin 1''}\right].$$

Cette formule donne donc la différence due à l'excentricité entre l'angle véritable à avoir $(A - A_0)$, et l'angle $(A'' - A''_0)$ obtenu avec un sextant excentré. Elle nous a été signalée par M. Hilleret, qui l'a établie en suivant une méthode un peu différente de la nôtre.

Pour trouver les trois quantités A''_0, F et $\left(\frac{e}{r}\right)$, qui peuvent être regardées comme des constantes de la formule, il suffirait à la rigueur de se procurer trois équations déduites de trois expériences *ad hoc*, où les angles observés, dont on se procurerait d'ailleurs les valeurs exactes comme il a été indiqué au n° 181, seraient pris aux environs de 0°, 60° et 120°. Mais en pratique, il convient de mesurer un grand nombre d'angles différents; on applique ensuite la méthode des moindres carrés (n° 133) à l'ensemble des équations obtenues. Ces angles seront d'ailleurs préalablement corrigés, s'il y a lieu, des erreurs de prismatisme des miroirs, ainsi qu'il est expliqué à la fin du numéro suivant.

N° 182. Du prismatisme des miroirs dans les sextants. — Rappelons d'abord que théoriquement le grand miroir doit être monté de manière que l'axe de rotation de l'alidade passe par le tiers de l'épaisseur de la glace. Toutefois, on prouve que cette condition n'est pas absolument essentielle pour l'exactitude des observations. Avec la direction par rapport à l'axe de l'alidade que les fabricants adoptent aujourd'hui pour la monture du grand miroir, les erreurs à craindre du chef dont il s'agit sont tout à fait inappréciables.

Cela dit, occupons-nous du *défaut de prismatisme* des miroirs. Ce défaut était autrefois très-fréquent; et une formule, bien connue du reste, mettait à même d'en tenir compte. Comme les moyens actuels de fabrication des sextants permettent d'éviter le *prismatisme* des mi-

roirs, il est inutile de se préoccuper de sa correction. Nous allons cependant passer en revue ses effets, afin d'être à même de reconnaître et de rejeter les miroirs qui en sont affectés. — Pour savoir si le *grand miroir* est prismatique, on emploie le moyen indiqué plus bas; mais à la rigueur il suffit de regarder très-obliquement, avec une lunette, l'image réfléchie d'un astre à contour bien franc, tel que le Soleil ou la Lune, ou d'un objet terrestre distinct et éloigné. Si l'on n'aperçoit qu'une seule image bien nettement terminée et non dédoublée, les deux faces du miroir sont *parallèles;* dans le cas contraire, le miroir est prismatique.—Le mieux à faire en pareille occurrence, est de remplacer la pièce par une autre exempte du défaut qui nous occupe. Au surplus, avant de partir de France pour un voyage lointain, on devra toujours avoir la précaution d'emporter un certain nombre de grands miroirs de rechange, éprouvés avec soin et reconnus bons. — Pour observer le Soleil, il y a moyen de remédier aux inconvénients résultant d'un grand miroir prismatique en peignant en noir sa face postérieure, de façon qu'il n'y ait de sensible que la flexion sur la face antérieure. Il va sans dire que ce procédé n'est applicable qu'au Soleil, qui seul a un éclat suffisant pour fournir avec cette combinaison une image réfléchie visible. Mais si dans le cours d'une campagne et par suite de circonstances exceptionnelles, on se trouve forcé de faire usage d'un grand miroir prismatique, il faut absolument l'étudier afin d'en reconnaître le degré de défectuosité. Voici alors comment on opère :

On rectifie le sextant comme d'habitude; puis on mesure un angle d'environ 120°. On enlève alors le grand miroir de son châssis; et on le retourne de façon que le côté qui était le plus près du plan du limbe en soit le plus éloigné. Si, après avoir rectifié l'instrument, on trouve la même valeur pour l'angle mesuré, les deux faces du grand miroir sont parallèles. Sinon, la différence entre les deux valeurs de l'angle indiquera le degré de défectuosité cherché. — En tout cas, il faut avoir soin que les diverses rectifications aient été faites avec toute l'attention possible, et de plus qu'à chaque observation le contact des images des objets ait lieu à égale distance des deux fils de la lunette. Sans ces précautions, on introduirait de nouvelles erreurs, qui rendraient la détermination incertaine, et la vérification inutile. — En général, les bons constructeurs rejettent tout grand miroir qui ne supporte pas la dernière épreuve que nous venons de décrire.

— Pour reconnaître le prismatisme du petit miroir, on le retire de

sa cage. Puis, on pose l'instrument sur une table; et on vise avec la lunette un objet éloigné, sur lequel on amène exactement l'axe optique. Sans bouger l'instrument, on interpose la partie non étamée du petit miroir entre la lunette et l'objet. Si celui-ci n'est plus sur l'axe optique, c'est que le petit miroir est prismatique.

Une erreur de prismatisme du petit miroir est absolument sans importance sur l'observation finale, si l'on a soin de faire les observations suivant une même ligne de visée. Mais, dans la pratique, il est bien difficile, pour ne pas dire impossible, d'assurer *à priori* que la ligne de visée sur laquelle on a mesuré l'angle de collimation sera exactement celle qui servira à toutes les observations ultérieures. Si cette condition n'est pas remplie, le prismatisme du petit miroir doit causer une erreur sur l'angle mesuré. Cependant on obtient en général d'excellents résultats, même avec un petit miroir médiocre, du moment que le prismatisme demeure dans des bornes restreintes. Ainsi, lorsque la projection de l'angle des faces du miroir sur le limbe n'est pas supérieure à une dizaine de minutes, la valeur de l'erreur devient complétement inappréciable.

— Au surplus, il y a moyen de se mettre à l'abri de l'erreur due au prismatisme de l'un ou l'autre des miroirs. Il suffit de placer, parallèlement au plan du limbe, l'arête d'intersection des deux faces du prisme.

Malheureusement avec le genre de monture adopté par les fabricants, cette combinaison n'est pas possible.

— Comme les différences, constatées dans les deux numéros précédents, entre les mesures faites au sextant et les distances réelles, pourraient provenir en partie du défaut de graduation et de celui d'excentricité et en partie du prismatisme des miroirs, il est bon de se fixer sur ce point. Voici comment on peut y arriver, en se rappelant que, d'après ce qui a été dit plus haut, c'est surtout le prismatisme du grand miroir qui doit faire ressentir son effet :

Le grand et le petit miroir étant rectifiés le mieux possible, on mesure la distance angulaire entre les objets choisis. On répète cette mesure un certain nombre de fois, et l'on prend la moyenne des divers angles. Soient N_1 le nombre ainsi trouvé pour une première distance, N_2 le nombre trouvé pour une deuxième, etc. Cela terminé, on retourne le grand miroir dans sa cage, de manière que son arête supérieure devienne inférieure, et réciproquement. On rectifie à nouveau la perpendicularité du grand miroir; et l'on mesure, avec les

mêmes soins et les mêmes précautions que la première fois, la distance angulaire des mêmes objets. Soient N'_1, N'_2, ..., les nombres que l'on trouve. Si $N_1 = N'_1$, $N_2 = N'_2$, ..., le grand miroir est parfait. Dans le cas contraire, on prend pour mesure de la première distance $N = \frac{N_1 + N'_1}{2}$, pour mesure de la deuxième $N' = \frac{N_2 + N'_2}{2}$, etc. Les nombres N, N', ..., ainsi trouvés étant exempts de l'erreur de prismatisme, ce sont dès lors ces nombres qui serviront à apprécier les défauts de graduation et d'excentricité de l'instrument, conformément aux indications des nos 181 et 182.

N° 184. De la rectification des sextants dans le cas de prismatisme des miroirs. — Si le grand miroir est prismatique, que devient ce qu'on appelle sa rectification? Que donne le procédé habituel, et quelle position occupent, après l'application de celui-ci, les deux faces du miroir par rapport au plan du limbe? Pour un petit miroir prismatique, mêmes objections. Pour la lunette, quelle doit être la situation de son axe optique; puis, que représente l'angle de collimation dans le cas qui nous occupe? En un mot, que deviennent toutes les rectifications habituelles si les glaces sont prismatiques? Nous allons exposer comment M. Hilleret, qui est le premier à avoir approfondi le sujet, répond aux diverses questions ci-dessus.

— Si les faces du grand miroir ne forment entre elles qu'un angle très-petit (quelques minutes, comme cela a toujours lieu quand il y prismatisme), on rectifie le grand miroir avec les curseurs, suivant le procédé habituel. *Pratiquement*, les images directes et réfléchies pourront toujours être amenées à se prolonger l'une par l'autre. *Théoriquement*, la chose est impossible; mais la cassure qui se produit au point de jonction des deux images, est tout à fait invisible à l'œil nu. Lorsque les images des arêtes des viseurs paraissent dans le prolongement l'une de l'autre, le grand miroir est dit *rectifié*.

Dans cet ordre d'idées, le procédé de rectification du grand miroir est le même que dans le cas ordinaire, sous la restriction de faire exclusivement usage des viseurs et de les placer le plus loin possible l'un de l'autre sur le limbe.

— Pour rectifier un petit miroir prismatique, on superpose les images directes et réfléchies d'un objet très-éloigné et très-net. Le mieux est de prendre une étoile de troisième grandeur dépourvue de scintillation. Avec un peu d'attention et en agissant successivement

sur la vis de rappel de l'alidade et la vis de rectification du petit miroir, on arrive à faire coïncider les deux images. La chose est, en principe, parfaitement possible.

Toutefois, cette assertion, due à M. Hilleret, paraissant en contradiction complète avec celle énoncée dans une étude des plus remarquables sur le sextant, publiée récemment par M. Magnani (voir la *Revue maritime* de décembre 1874), nous nous y arrêterons un instant. Pour cadrer avec l'assertion de M. Hilleret, il importe de viser l'objet direct toujours au même point du champ de la lunette; il est alors aisé, par le jeu successif des vis de rappel de l'alidade et des vis de rectification du petit miroir, de faire coïncider les deux images. La difficulté que l'on éprouve quelquefois provient de causes purement matérielles, dont la principale est de viser l'objet direct toujours au même point précis du champ de la lunette. A terre, si l'on pose l'instrument sur une table, ou si on le monte sur un pied, de telle sorte que, pendant toute la durée de la rectification, la lunette conserve invariablement la même position par rapport à l'objet visé, on arrive facilement et promptement à faire coïncider d'une manière rigoureuse les images directe et réfléchie, et cela même avec un grand et un petit miroir tous les deux prismatiques. — En tout état de cause, lorsqu'il y a coïncidence, le petit miroir n'a aucune de ses faces perpendiculaire au plan du limbe; et l'inclinaison de chacune d'elles sur la normale audit plan est une quantité d'ordinaire fort petite, qui dépend manifestement de la plus ou moins grande perfection du grand et du petit miroir. Par ailleurs, aucune des deux lignes de base du petit miroir n'est alors parallèle à celles du grand miroir, ou du moins cela ne pourrait arriver que pour des verres exceptionnels, dont les angles d'inclinaison des faces seraient liés par des relations que l'analyse indique.

— Dans le cas de miroirs prismatiques, la rectification de la lunette devra se faire exclusivement par le procédé habituel, convenant au cas de miroirs à faces parallèles.

Si le petit miroir est prismatique, une lunette ainsi rectifiée aura le plus généralement son axe optique oblique par rapport au plan du limbe. Mais cette obliquité, loin de nuire (comme cela arriverait avec un sextant muni d'excellentes glaces) à la mesure des distances que l'on aura plus tard à mesurer, la rendra au contraire, toutes choses égales d'ailleurs, plus exacte que si l'axe était rigoureusement parallèle au plan du limbe. Ce fait, que les formules analytiques mettent

en évidence, provient de la position particulière, et parfaitement déterminée, donnée à l'axe optique relativement aux faces du petit miroir prismatique.

— L'instrument ayant été supposé rectifié dans toutes ses parties, avec le plus grand soin possible, et d'après les procédés que nous venons d'invoquer, l'angle de collimation s'obtiendra, dans le cas de prismatisme des miroirs, absolument par les mêmes moyens que pour un instrument parfait. Quel que soit le mode employé, on devra trouver des valeurs identiques.

Nous ferons remarquer en outre que si l'instrument est bien rectifié, ledit angle mesuré pour chacune des deux positions du grand miroir dans sa cage doit être le même, au moins pratiquement. Il importe d'ajouter que la demi-somme des lectures faites pour déterminer l'angle de collimation à l'aide du disque du Soleil, même avec un grand miroir très-médiocre, doit, aux erreurs de lecture ou d'observation près, donner la valeur rigoureuse du demi-diamètre réfracté du Soleil, pourvu que les deux contacts soient bien pris sur l'axe optique.

— En résumé, les diverses rectifications préparatoires à la mesure des angles, sont identiquement les mêmes dans le cas de miroirs prismatiques que dans celui de miroirs à faces parallèles.

Ces opérations, que l'on est obligé de faire avant toutes choses pour un instrument donné, n'apprennent absolument rien sur le prismatisme des glaces; et il faut recourir aux procédés spéciaux du n° 183 pour mettre ce défaut en évidence.

N° 185. Du prismatisme des verres de couleur dans les sextants. — On admet généralement que les verres de couleur dans un sextant, ne peuvent causer aucune erreur d'observation. Le fait est vrai, si les verres dont on a fait usage pour la détermination de l'angle de collimation sont les mêmes que ceux employés pour mesurer l'angle cherché. Mais, dans la pratique, ce n'est pas ce qui a lieu d'ordinaire. Souvent, même pendant la durée des observations, on change les verres employés. Dans ces conditions, on est exposé à des erreurs, qui deviennent importantes avec un prismatisme accentué.

En tout état de cause, il importe de ne pas mettre, à l'instar de plusieurs auteurs, sur le compte du prismatisme en question l'effet d'où il résulte qu'avec diverses combinaisons de verres de couleur, on aperçoit deux et même trois Soleils se présentant à la fois dans le champ de sa lunette. L'une des images est de couleur et d'intensité normales. Mais les autres, d'une teinte beaucoup plus pâle et souvent

très-gênantes pour l'observation, proviennent, comme les images blanches, de rayons lumineux réfléchis sur des montures brillantes ou sur les faces des verres situées en avant par rapport à la lumière, et qui viennent traverser, soit directement, soit après une deuxième flexion, les verres colorés placés entre le grand et le petit miroir.

Lorsque la chose est possible, il n'y a pas à hésiter, il faut modifier l'orientation de ces derniers verres. S'il n'y a pas moyen, on peut, en faisant tourner le petit miroir sur sa base, essayer de rejeter en dehors du champ de la lunette toutes les images accidentelles. On sait qu'il existe une disposition spéciale qui permet le déplacement en question. Ce déplacement a, en principe, pour objet de ramener le point de collimation au zéro du limbe. En l'utilisant dans le but actuel, on pourrait s'écarter dudit objet; mais c'est là un inconvénient secondaire.

Pour en revenir au prismatisme même des verres de couleur, il conviendrait, à la rigueur, de trouver l'erreur inhérente au prismatisme de chacun d'eux. Cette étude est rarement faite; peu d'auteurs en parlent même. La raison en est que l'erreur dont il s'agit est d'ordinaire *extrêmement minime*. A cet effet, les constructeurs ont le soin de disposer l'emplacement des verres de couleur de manière à les faire traverser par les rayons lumineux sous des angles incidents aussi petits que possible : il en résulte que le prismatisme de ces verres ne saurait être sensible dans ses effets qu'avec une valeur notable.

N° 186. Influence de l'imparfaite rectification des deux miroirs dans les sextants. — D'après le mode peu raffiné auquel on a recours pour la rectification du grand miroir, il est impossible que celui-ci soit en général *absolument* perpendiculaire au plan du limbe. De même, le parallélisme *rigoureux* du petit et du grand miroir n'est réalisé qu'à peu près. Examinons dès lors l'influence de ces deux circonstances, en commençant par celle qui concerne le grand miroir. A cet effet, appelons :

l l'inclinaison du grand miroir sur la normale au plan du limbe;
β l'angle que fait l'axe optique de la lunette avec la normale au petit miroir, et qui varie entre 15° et 20° dans les sextants;
A l'angle réel qu'on devrait obtenir;
A' l'angle donné par l'instrument.

La différence (A — A') est une fonction de l^2 et de lignes trigonométriques de A' et de β, qui ne laisse pas que d'être très-délicate à

établir rigoureusement. Brunnow en a donné, dans son *Astronomie sphérique*, une expression qu'on ne saurait accepter ni dans les hypothèses de départ ni dans la démonstration. Mais comme, en définitive, la valeur générale de ladite différence n'a aucune utilité pratique, nous nous bornerons à dire que le procédé de rectification du grand miroir au moyen des viseurs, permettant de réduire son inclinaison à 10′ au plus, la correction dont il s'agit ne dépasse pas d'ordinaire quelques secondes de degré. En d'autres termes, si la rectification du grand miroir a été faite avec un peu de soin, l'erreur qui provient d'un léger défaut de perpendicularité est complétement insignifiante dans les applications.

— Pour le petit miroir, appelons :

k son inclinaison sur la normale au plan du limbe;
β, A et A′ les mêmes quantités que pour le grand miroir.

La différence (A — A′) est semblablement ici une fonction de k^2 et de lignes trigonométriques de A′ et de β. Tout ce qui a été dit il y a un instant pour le grand miroir est présentement applicable.

Nous nous bornerons à prévenir que l'erreur qui nous occupe n'est réellement sensible que pour de petites distances angulaires, surtout eu égard à ce que le mode de rectification du petit miroir au moyen du Soleil ne laisse jamais subsister une inclinaison supérieure à 1′ ou 2′. — Au surplus, pour la détermination de l'angle de collimation au moyen du Soleil, l'inexactitude due à l'inclinaison du petit miroir s'élimine d'elle-même dans le double contact qu'il convient alors de prendre.

N° 187. Influence de l'inclinaison de l'axe optique ou de la ligne de visée de la lunette sur le plan du limbe dans les sextants. — L'*axe optique* de la lunette, c'est-à-dire la ligne qui joint le centre de l'objectif au point central du carré formé par les fils du réticule, se rectifie selon les moyens connus. Mais ces moyens ne sont pas assez précis pour que la rectification dont il s'agit n'expose pas à une *erreur*, qui est évidemment une véritable erreur systématique, ainsi que nous en avons prévenu au n° 180. On peut apprécier cette erreur comme il suit. Appelons :

i l'inclinaison de l'axe optique de la lunette sur le plan du limbe, cette inclinaison étant exprimée en *secondes de degré;*
A l'angle réel qu'on devrait obtenir;
A′ l'angle donné par l'instrument.

On démontre aisément que l'on a :

$$A = A' - i^2 \sin 1'' \operatorname{tg} \frac{1}{2} A'.$$

Ainsi, toutes les fois que le contact n'est pas observé dans un plan parallèle au plan de l'instrument, les angles obtenus sont toujours *trop grands;* et il faut en retrancher la correction $i^2 \sin 1'' \operatorname{tg} \frac{1}{2} A'$, qui croît avec l'angle observé. — Le procédé qui consiste à rectifier l'axe optique de la lunette au moyen des deux viseurs, permet d'établir le parallélisme à 8′ ou 10′ près. En supposant $i = 10' = 600''$ et $A' = 120°$ dans la formule précédente, on trouve $-3'',0$ pour la correction convenant à l'angle observé. — Si le réglage de la lunette a été exécuté avec soin, l'erreur produite par son défaut de parallélisme sera donc toujours négligeable.

— Lorsque l'axe optique *réel* étant suffisamment bien rectifié, le contact des images de deux objets est pris, par inadvertance ou inhabileté, en dehors du milieu des fils du réticule, la *ligne de visée* correspondante est alors inclinée par rapport au plan du limbe; et on se trouve dans un cas absolument analogue au précédent. En un mot, l'erreur qui résulte du contact observé en dehors de l'axe optique, équivaut à une inclinaison de cet axe sur le limbe; et elle donne lieu à une correction du même genre. Seulement, il importe de remarquer que cette erreur, bien que ne changeant jamais de signe, est à même de se produire sans aucune régularité ni loi. Dès lors, tout en étant *systématique*, elle a une valeur propre à chaque observation.

Quoi qu'il en soit, il faut chercher à remédier à une pareille influence, en se livrant à des exercices *ad hoc* sur le sextant qu'on possède. Il est difficile, avec un instrument tenu à la main, de faire toutes les observations exactement au milieu du champ des fils. Mais il y a moyen, à force de pratique, d'arriver à prendre les contacts à une distance de l'un ou l'autre fil plus grande que le 1/3 de l'intervalle qui les sépare, et par suite à une distance de l'axe optique moindre que le 1/6 dudit intervalle. La distance des fils étant généralement comprise entre 70′ et 90′, ce qui, soit dit en passant, correspond à un écartement moyen de 2mm,5, on aura toujours ainsi $i < \frac{70'}{6}$ ou $\frac{90'}{6}$, soit $i < 15'$ environ. Dès lors la correction à faire sera toujours inférieure à $-3'',9 \operatorname{tg} \frac{1}{2} A'$. Pour $A' = 120°$, elle atteindrait $-6'',8$.

On conclut de ce qui précède l'importance qu'il y a à prendre

les contacts le plus près possible du milieu des fils : car l'erreur qui en résulte est toujours de même signe ; et les angles mesurés sont toujours *trop grands*. Si le contact était obtenu sur l'un des fils, l'erreur résultante pourrait atteindre 60″ pour un angle de 120°, en supposant la distance des fils égale à 1° 30′. Toutefois, cette même erreur ne dépasserait pas 30″ si l'angle observé était plus petit que 80°, ce qui est le cas général des hauteurs prises à l'horizon de la mer.

N° 188. Totalisation des diverses erreurs systématiques dues aux circonstances énumérées du n° 181 au n° 187. — Toutes les erreurs *systématiques* afférentes aux circonstances mentionnées du n° 181 au n° 187, se superposent pour donner l'erreur systématique totale.

Il ne s'agit pas ici, comme avec les erreurs *accidentelles*, d'appliquer une formule analogue à celle du n° 128 ; car cette formule résulte expressément de la nature de ces dernières erreurs. Il convient de chercher une autre solution.

Dans ce but, nous remarquerons d'abord que les défauts de graduation et d'excentricité, ainsi que ceux de prismatisme des miroirs et des verres de couleur, ont des effets indépendants, qu'il suffira dès lors d'ajouter avec la résultante des autres erreurs systématiques, c'est-à-dire des erreurs concomitantes dues à une imparfaite rectification des miroirs et à une inclinaison de l'axe optique. — Or, en général, la résultante d'erreurs systématiques dépendant les unes des autres peut être considérée comme une fonction des éléments générateurs de ces erreurs *partielles*. D'un autre côté, ces éléments doivent, en principe, être supposés très petits, à moins qu'on n'ait affaire à un instrument entièrement défectueux et par suite à rejeter. Dès lors, en développant, d'après le théorème de Maclaurin, la fonction sus-mentionnée par rapport auxdits éléments, on peut en général s'arrêter, dans le développement, aux premières puissances de ces éléments. En pareille conjoncture, chaque terme représente justement une erreur partielle ; c'est donc en prenant la *somme* des diverses erreurs systématiques partielles qu'on obtient l'erreur systématique *totale*. Mais pour le cas qui nous occupe, ce n'est pas ce qui se passe ; car les coefficients des premières puissances en question sont tous nuls. Il devient alors nécessaire de pousser le développement jusqu'aux termes du second ordre, ce qui donne lieu à une expression fort complexe, renfermant non-seulement les carrés des quantités l, k et i des n°s 186 et 187, mais encore les rectangles de ces quantités. Heureusement que ladite expression n'est d'aucune

utilité pratique, ce qui nous dispense de la donner. Mais il était néanmoins utile de spécifier son existence, afin de ne pas laisser croire, conformément à l'assertion de quelques auteurs, que, dans le sextant, la résultante des erreurs dues à une imparfaite rectification des miroirs et à une inclinaison de l'axe optique, s'obtient en additionnant entre elles les expressions de ces erreurs considérées isolément, expressions dont la forme a été indiquée auxdits n°s 186 et 187.

N° 189. De l'angle de visibilité dans les sextants, et de l'erreur accidentelle qui en résulte. — L'*angle de visibilité*, c'est-à-dire l'angle au-dessous duquel, à l'œil nu, deux points également bien éclairés cessent d'être distincts pour se fondre en un seul, est très-variable suivant les personnes. D'après Béclard, cet angle serait de 50″ pour une vue ordinaire ; et d'après Beaunis, dont les travaux sont plus récents, il ne tomberait pas au-dessous de 60″. Toutefois, quand on a affaire à des points très-lumineux, tels que des étoiles, il est certain que l'angle de visibilité tend à diminuer assez sensiblement. Un moyen facile de s'en assurer consiste à viser avec une lunette ou une jumelle de grossissement connu, une étoile double formée d'étoiles dont la distance angulaire est cataloguée : on se convaincra facilement que l'angle de visibilité minimum descend alors aisément à 30″ pour les vues même les plus médiocres.

D'après ce qui précède, si on fait usage d'une bonne lunette, dont le grossissement soit G, on jugera d'un contact à moins de $\pm \frac{30''}{G}$ à $\frac{60''}{G}$, suivant les cas. Dans les sextants, le grossissement G est généralement compris entre 6 et 8. En pareille condition, le contact de deux astres peut s'obtenir au moins à $\pm 10''$ près environ, si l'on fait l'observation avec soin. C'est un résultat que l'on peut vérifier aisément, et auquel les officiers des montres exercés arrivent sans peine.

Pour des observations de points terrestres, la faible intensité des images empêche généralement de pouvoir faire usage de la lunette astronomique. Dans ce cas, on se sert de la lunette terrestre, dont le grossissement varie entre 2 et 3 ; souvent même on est forcé de se servir d'une simple pinnule. La précision des contacts est alors bien moins grande que pour les astres ; et l'on ne peut en général compter, dans l'appréciation du contact, sur une exactitude supérieure à $\pm 30''$ avec la lunette terrestre, et à $\pm 60''$ avec la pinnule.

— Il importe de remarquer que, d'une manière générale, l'exis-

tence de l'angle de visibilité détermine *ipso facto* une erreur dans les observations.

En effet, d'après ce qui précède, toute distance angulaire mesurée peut se trouver, du chef dont il s'agit, trop grande ou trop petite d'une quantité comprise entre zéro et la plus grande valeur de l'angle de visibilité : soit, avec les sextants, entre 0″ et 10″, 0″ et 30″, ou 0″ et 60″, suivant qu'on s'est servi pour l'observation de la lunette astronomique, de la lunette terrestre ou de la pinnule. — Par ailleurs, l'erreur dont il s'agit est manifestement une *erreur accidentelle*, puisqu'elle n'est soumise à aucune loi régulière, et qu'elle a lieu tantôt dans un sens, tantôt en sens opposé.

N° 190. Étude des erreurs accidentelles dans les sextants. — Nous avons énuméré au n° 180 les causes des erreurs *accidentelles* dans les sextants. Nous venons d'examiner en particulier dans le numéro précédent celle qui est due à l'*angle de visibilité*. Nous allons étudier ici comment on peut rationnellement apprécier la grandeur des autres erreurs en question, avec la plupart desquelles se fond du reste l'*erreur de visibilité*.

1° *Erreur probable provenant de l'angle de collimation.* — Le moyen le plus précis de déterminer l'angle de collimation, consiste, on le sait, à mettre successivement en contact les bords des deux images du Soleil, puis à prendre la moyenne de la somme algébrique des deux lectures. Le grossissement de 6 ou 8, employé dans les lunettes astronomiques des instruments à réflexion, permet d'obtenir chaque contact avec une erreur inférieure à 10″ d'après le n° 189. Comme il n'y a pas de raisons pour que cette erreur soit plutôt supérieure qu'inférieure à $5'' = \frac{10''}{2}$, c'est-à-dire à la moitié de l'erreur extrême, on peut prendre $\pm$ 5″ pour erreur *probable* (n° 122) d'un contact simple. Il est intéressant de remarquer, en passant, qu'ici l'*équation personnelle* de l'œil (n° 180) se trouve éliminée dans l'opération. — Si l'on suppose que le vernier de l'instrument donne les 10″, chaque lecture a pour *erreur probable* $\pm$ 5″. Par suite, l'angle de collimation étant le résultat de deux contacts et de deux lectures, a, d'après le n° 128, pour *erreur probable :*

$$r_1 = \pm\sqrt{5^2+5^2+5^2+5^2} = \pm 10''.$$

2° *Erreur probable provenant de l'imparfaite observation du contact*

dans l'angle définitif à mesurer. — Sa valeur dépend du grossissement de la lunette et de l'habileté de l'observateur. Elle varie beaucoup suivant la nature du temps, la netteté plus ou moins grande des objets à mettre en contact, et en particulier de l'horizon, s'il s'agit d'une hauteur, etc. Avec les grossissements de 6 à 8 des lunettes astronomiques de sextant, on peut prendre pour l'*erreur probable* sur une hauteur $r_2 = \pm 15''$, en affectant $\pm 10''$ au manque de netteté de l'horizon, et les $5''$ restantes à la moitié de la valeur maximum $10''$ (n° 189) de l'angle de visibilité avec ledit grossissement. Pour la lunette terrestre, il faudrait prendre $r_2 = \pm 25''$; et enfin pour la pinnule $r_2 = \pm 40''$.

— D'après les chiffres précédents, et conformément aux règles du n° 128, l'*erreur probable* R sur une hauteur due à l'ensemble des erreurs accidentelles inhérentes au sextant lui-même, soit la *résultante* de ces erreurs, est donnée par la relation :

$$R = \pm \sqrt{(10'')^2 + (15'')^2} = \pm 18'',$$

dans le cas où l'on s'est servi de la lunette astronomique.

Avec l'emploi de la lunette terrestre, l'*erreur probable* R_1 est :

$$R_1 = \pm \sqrt{(10'')^2 + (25'')^2} = \pm 27''.$$

Enfin avec la pinnule, l'*erreur probable* R_2 est :

$$R_2 = \pm \sqrt{(10'')^2 + (40'')^2} = \pm 41''.$$

N° 191. Erreur probable totale afférente aux angles observés avec des sextants. — Pour une hauteur, cette *erreur probable totale* se compose de la *résultante* des erreurs du numéro précédent, combinée avec les erreurs accidentelles provenant de la dépression apparente et de l'imparfaite détermination de la réfraction.

L'*erreur probable sur la dépression apparente* est due à deux causes : 1° incertitude de la hauteur de l'œil de l'observateur au-dessus du niveau de la mer ; 2° variation du coefficient de réfraction terrestre γ dans la formule : *dépression apparente* $= \frac{1-\gamma}{\sin 1''}\sqrt{\frac{2e}{\rho}}$, e étant la hauteur de l'œil, et ρ le rayon terrestre. — Il est bien difficile à la mer de connaître la hauteur de l'œil à moins de $0^m,50$ près. L'exa-

men de la table de dépression montre que l'erreur provenant de cette incertitude est d'autant moins sensible que l'observateur est plus élevé. Pour une hauteur moyenne de 4 ou 5 mètres, une incertitude de $0^m,50$ donnerait une erreur *probable* de $\pm 12''$ environ. — Quant au coefficient de réfraction γ, il varie communément entre 0,06 et 0,10; par temps brumeux, il peut atteindre 0,15. D'après la formule ci-dessus, l'erreur qui résulte de cette variation est d'autant plus sensible que la hauteur e de l'œil est plus grande. La table de dépression étant construite avec la valeur moyenne $\gamma = 0,08$, on voit que cette erreur peut atteindre $\pm 20''$ pour une hauteur de 5 mètres, et $\pm 30''$ pour une hauteur de 10 mètres, en supposant que γ devienne 0,15. Cette erreur ne dépasserait pas $8''$ pour les mêmes hauteurs de l'œil, si l'on admettait que le coefficient γ reste compris entre ses limites habituelles 0,06 et 0,10. En définitive, en dehors des cas de *mirage*, qui donnent lieu à des erreurs tout à fait anormales, il est licite de prendre, sans s'éloigner beaucoup de la vérité, $r_3 = \pm 15''$ pour *erreur probable* de la dépression apparente.

De son côté, l'*erreur probable* provenant *de l'imparfaite détermination de la réfraction* est d'autant plus forte que la réfraction est plus grande, c'est-à-dire que la hauteur de l'astre est plus petite. Les tables de réfraction sont calculées pour une température moyenne de $+10°$ centigrades, et pour une hauteur barométrique de 760^{mm}; des tables spéciales permettent ensuite de corriger ces réfractions moyennes suivant la température et la pression de l'air ambiant. — Si l'on suppose que la hauteur de l'astre soit supérieure à 10° ou 11°, on voit, à l'aide de ces tables, que, pour une température de $+30°$ et une hauteur barométrique de 740^{mm}, la correction à faire à la réfraction serait de $-(22''+8'')$; et elle ne serait que de $-(11''+6'')$ pour une hauteur de 20°. Si donc on néglige, comme cela a lieu la plupart du temps à la mer, les corrections dont on vient de parler, l'erreur probable due à la réfraction sera, en général, inférieure à $\pm 15'' = r_4$.

— Dès lors, en groupant, conformément au n° 128, les deux erreurs probables que nous venons d'apprécier, avec les deux erreurs probables du numéro précédent, nous voyons que l'*erreur probable totale* R_1 d'une hauteur prise à l'horizon de la mer en se servant de la lunette astronomique, est représentée par la relation :

$$R_1 = \pm\sqrt{(10'')^2 + (15'')^2 + (15'')^2 + (15'')^2} = \pm 28''.$$

L'erreur maximum qu'on peut avoir à craindre sur une hauteur isolée ne dépassera pas quatre ou cinq fois cette erreur probable, c'est-à-dire en nombre rond $\pm 2'$ à $2',5$: car il ne faut pas oublier que les diverses valeurs attribuées aux erreurs précédentes sont évaluées pour les circonstances ordinaires de la navigation ; et il peut y avoir obligation de les augmenter notablement ou de les diminuer, suivant la nature du temps et la manière dont les observations ont été faites.

L'élément que nous venons de déterminer est important à connaître, surtout pour le tracé des polygones de certitude (nos 37 et 41). Du reste, chaque observateur peut apprécier directement la valeur dudit élément qui convient à ses propres observations. Il suffit pour cela qu'il s'exerce fréquemment dans les rades ouvertes à prendre des hauteurs de nuit à l'horizon de la mer, et des hauteurs de jour par ciel brumeux. Puis, comparant les résultats de ses observations avec les hauteurs rigoureuses déduites de la position connue du lieu, il en déduira les limites d'erreur qu'il est susceptible de commettre à la mer sur des hauteurs prises dans des circonstances semblables.

— Pour une hauteur observée à l'horizon artificiel, il n'y a pas d'erreur provenant de la dépression ; et d'ailleurs on corrige d'habitude alors la réfraction pour la température et la pression de l'air ambiant. Les seules *erreurs probables* à considérer sont les suivantes, dont les valeurs ont été données au n° 190 :

1° Erreur sur l'angle de collimation $r_1 = \pm 10''$;

2° Erreur provenant de l'imparfaite observation du contact ; comme on est ici dans de bien meilleures conditions qu'à la mer, on peut adopter $r_2 = \pm 10''$;

3° Erreurs accidentelles propres à l'horizon artificiel lui-même, mais à l'abri desquelles on peut toujours se mettre (n° 193).

La hauteur prise à l'horizon artificiel étant le double de la hauteur réelle, il en résulte pour *erreur probable totale* R_2 sur cette dernière hauteur :

$$R_2 = \pm \frac{\sqrt{(10'')^2 + (10'')^2}}{2} = \pm 7''.$$

— Enfin, pour la distance angulaire entre deux astres ou deux objets terrestres bien éclairés, les *erreurs probables* à considérer sont les mêmes que pour une hauteur prise à l'horizon artificiel. Seulement, la distance angulaire ne devant pas être divisée par 2,

l'*erreur probable totale* R_3 dont elle est affectée, a pour expression :

$$R_3 = \pm\sqrt{(10'')^2 + (10'')^2} = \pm 14''.$$

Si l'on a à mesurer l'angle formé par deux objets terrestres mal définis ou mal éclairés, on est obligé de remplacer la lunette astronomique par la lunette terrestre, ou même le plus souvent par la simple pinnule, qui ne donne aucun grossissement. Dans ce cas, l'erreur provenant du contact doit être notablement augmentée ; et l'on peut prendre pour sa valeur probable $\pm 40''$. En cette dernière conjecture, on aurait pour *erreur probable totale* R_4 de la distance angulaire des deux objets :

$$R_4 = \pm\sqrt{(10'')^2 + (40'')^2} = \pm 41''.$$

N° 192. Coup d'œil général sur ce qui concerne les défectuosités et l'usage des sextants. — Si nous essayons d'envisager l'ensemble des défectuosités que l'on peut rencontrer dans les sextants, nous voyons, en définitive, que quelques-unes, par leur importance, exigent impérieusement le rejet de l'instrument ou le remplacement de la partie affectée. D'autres sont atténuées par certaines précautions et ne vicient que très-peu les angles mesurés. Une longue expérience semble même montrer que dans la pratique il s'établit entre ces diverses erreurs une certaine compensation, qui, finalement, se traduit par des résultats d'une rigueur très-satisfaisante. Combien d'officiers des montres ont été frappés de l'exactitude relative à laquelle on arrive, avec un peu d'habitude et de soin, dans le réglage des montres du bord à l'aide d'un simple sextant servant journellement aux observations de mer !

Il s'ensuit qu'un sextant, même médiocre, suffira toujours, *sans aucune sorte de correction*, aux besoins usuels de la navigation. Mais il n'en est plus de même quand il s'agit de régler les chronomètres. Dans cette opération, on ne saurait, même pour la navigation courante, demander trop de précision, parce que l'obtention de marches erronées ne permet d'établir avec une rigueur suffisante aucune formule ni aucun graphique de marche (n°ˢ 141, 142, 144, 149 et 150).

— Il nous reste à donner quelques renseignements sur le nombre d'angles qu'il importe de mesurer par séance d'observation, suivant l'élément que l'on a en vue de déterminer.

Pour obtenir une droite de hauteur, on observe trois ou quatre hauteurs ; et on voit si elles varient tout à fait proportionnellement aux

heures du compteur. Si *oui*, l'on choisit l'une quelconque d'entre elles; et on effectue avec elle un seul calcul. Dans le cas contraire, on prend la moyenne des hauteurs et des heures. — Aux environs du méridien, il ne faut jamais prendre de moyenne de hauteurs et d'heures; car on sait qu'à ce moment les éléments dont il s'agit ne varient pas proportionnellement entre eux.

Pour la détermination perfectionnée des états absolus, on peut observer une suite de hauteurs isolées; ou encore on prend trois à quatre séries de trois hauteurs chacune. En principe, les séries n'offrent pas les avantages, du reste mal définis, qu'on leur a attribués pendant longtemps. Elles sont même défavorables quand on applique à la fin du calcul, comme au n° 138, le *criterium de Chauvenet* pour éliminer les observations manquées. D'ailleurs, lorsqu'on se propose d'opérer par séries, on a le tort d'habitude de se laisser aller à trop de précipitation dans l'observation, et plus encore dans la lecture, à seule fin d'avoir des angles aussi rapprochés que possible entre eux. Or c'est évidemment là une manière d'opérer très-inexacte, et qui est de nature à occasionner des erreurs graves. En règle générale, il faut toujours observer, sans se préoccuper du temps qui s'écoule entre deux contacts; il faut d'ailleurs noter les observations qui semblent les plus précises. On voit ensuite les angles successifs qu'il est avantageux de grouper par série, et ceux qu'il vaut mieux traiter isolément. — Toutefois, il est des cas où l'usage des séries devient indispensable, c'est lorsqu'on peut de la sorte annuler une erreur *systématique*, comme dans le cas d'un horizon artificiel où les glaces du toit sont prismatiques (n° 193).

Il nous reste à ajouter que pour prendre de bonnes hauteurs, il vaut mieux mettre au préalable l'alidade à une *division connue*, puis attendre la séparation des deux images, que d'amener les contacts successifs par les mouvements de la vis de rappel. D'ailleurs, ce procédé offre encore l'avantage de se prêter à la combinaison préconisée par M. Rouyaux au n° 138, et qui consiste à prendre des hauteurs équidistantes.

N° 193. Des horizons artificiels. Erreurs systématiques et accidentelles qui les concernent. — Les horizons artificiels les plus employés aujourd'hui sont les horizons *à liquide*, qui sont de deux espèces : l'horizon à mercure et l'horizon à huile. Ils comprennent tous une cuvette, plus un flacon renfermant le liquide.

Pour les horizons *à mercure*, on ne doit employer que du mercure parfaitement clair. Quand il est sale, on peut le nettoyer rapidement en le versant alternativement de la cuvette dans le flacon, et réci-

proquement : on a d'ailleurs soin de tenir celui-ci verticalement, le fond en l'air. En versant le mercure, les impuretés resteront alternativement dans la cuvette et dans la bouteille; on les retirera alors soigneusement après chaque opération.

Quand le mercure est par trop impur, il faut lui faire subir un nettoyage *ad hoc.* On arrive au résultat voulu en versant dans le flacon à mercure une certaine quantité d'acide sulfurique. On secoue fortement; puis on lave à l'eau pure, et l'on filtre à travers un linge fin. — On peut encore effectuer très-simplement ce filtrage, en versant le mercure dans un cornet de papier à pointe très-effilée; on arrête l'écoulement du métal un instant avant le moment où les impuretés vont passer à travers la pointe. Ce moyen demande un peu de temps, mais réussit parfaitement, les impuretés de toute sorte restant constamment, à cause de leur faible poids spécifique, à la surface supérieure du métal dans le cornet.

L'excessive mobilité du mercure met à l'abri de toute observation douteuse; car on est prévenu du moindre dérangement dans l'horizontalité de la surface supérieure du liquide par la déformation de l'image de l'astre réfléchi. — Cette extrême mobilité peut, dans certains cas, devenir fort gênante. Pour y remédier, il suffit d'introduire dans la cuvette un double fond en bois, dans lequel on a préalablement pratiqué des rainures de 3 millimètres de profondeur et distantes entre elles de la même quantité. Ce dispositif assure aux couches inférieures du métal une immobilité si absolue, que le niveau de la surface du bain lui-même peut résister aux trépidations du sol. Les rainures pratiquées dans le bois qui forme le double fond en question, n'ont un effet certain qu'à la condition de laisser au bois toute la rugosité que lui donnent les traits de scie.

— L'horizon à huile possède une sensibilité bien moins gênante que celui à mercure. Pour les observations du Soleil, il donne, surtout dans les pays chauds, des résultats très-satisfaisants. Sa cuvette doit être noircie. Par ailleurs, pour s'en servir, il faut que la température soit au moins de + 10°, sans quoi l'huile perd sa fluidité.

— Quel que soit le genre d'horizon à liquide employé, le fluide est soustrait à l'influence du vent par une toiture munie de deux fenêtres. Celles-ci sont le plus communément fermées par des feuilles de talc, qui ont la propriété de peu réfracter les rayons lumineux.

Le toit doit être construit de telle sorte qu'il emboîte extérieurement la cuvette, sans reposer sur elle. Cette disposition offre l'avan-

tage de soustraire plus complétement le liquide à l'influence de l'air extérieur. On peut, dans ce but, faire un joint parfaitement étanche entre le toit et l'endroit où il repose, en formant une petite rigole de terre autour de son bord inférieur. — Le talc a souvent des veines qui produisent une certaine réfraction; il en est rarement exempt. D'autre part, il se boursoufle. Ces divers défauts déforment l'image qui le traverse, et rendent quelquefois l'observation difficile. Pour obvier à ces inconvénients, on remplace aujourd'hui le talc par des *glaces* disposées de telle façon que, dans les observations rigoureuses, on puisse, en opérant alors par séries, leur faire faire une demi-révolution au milieu de chaque série, qui doit dès lors renfermer un nombre *pair* d'angles, afin d'annuler l'erreur *systématique* pouvant résulter du prismatisme des glaces. De plus, ces dernières pièces, au lieu d'être fixées au toit, sont placées sur des panneaux mobiles glissant dans des coulisses. Au moyen d'une vis de pression, on arrête chaque glace à différentes hauteurs par rapport au niveau du fluide placé sous le toit. — Enfin on trouve encore dans la boîte à niveau, une ou deux semelles ou des cales en fonte, dont le but est expliqué dans ce qui suit.

— Pour se servir d'un horizon artificiel à liquide, il importe d'orienter les montants de la cuvette dont les plans doivent se trouver perpendiculaires à l'intersection des deux faces inclinées du toit, de façon qu'ils soient dans la direction du vertical de l'astre au milieu de l'observation. On satisfait à cette condition quand l'ombre produite par les arêtes verticales de la cuvette se projette un peu à l'ouest desdits plans ou de leurs prolongements.

A ce moment, on recouvre la cuvette de son toit; et on applique un morceau de papier blanc sur le verre situé du côté de l'observateur. Si une image lumineuse complétement circulaire vient s'y dessiner, le niveau est bien placé; mais si le cercle lumineux est en partie caché par le haut ou par le bas, cela prouve que la surface supérieure du liquide n'est pas à la hauteur voulue par rapport aux fenêtres du toit. On voit facilement, d'après l'image, s'il faut élever ou abaisser cette surface. Dans le premier cas, à l'aide des semelles ou des cales susdites placées sous la cuvette, on élève le niveau du mercure, c'est-à-dire qu'on diminue la distance verticale entre celui-ci et le centre de la glace du toit. Au contraire, en élevant d'une même hauteur les deux panneaux mobiles qui portent les glaces, on augmente la distance en question. Après quelques essais, on peut donc arriver, par la manœuvre des semelles et des panneaux, à amener l'image réfléchie

de l'astre observé à se projeter en un cercle lumineux complet sur la feuille de papier précitée. Le niveau est alors bien placé.

Il est bon, avant d'observer, de mettre le toit en place sur la cuvette pendant quelques minutes. L'air emprisonné ne tarde pas à déposer une buée très-intense sur les glaces; on les essuie avec soin de manière à ne pas les rayer, et l'on remet le toit en place. Il est rare qu'une deuxième condensation de vapeur se produise, tandis que la première a lieu presque toujours, et d'habitude très-rapidement.

— Nous ne parlerons pas ici de l'horizon artificiel à glace. Il en est de celui-ci par rapport à l'horizon à liquide comme du cercle par rapport au sextant. En un mot, c'est un instrument qui tend à disparaître en marine.

— Nous ne terminerons pas ce qui concerne l'usage des horizons artificiels sans indiquer la manière d'y observer les étoiles; c'est là un cas particulier susceptible de se présenter dans quelque campagne scientifique, et que, par conséquent, il n'est pas inutile de faire connaître.

En principe, il est très-difficile d'établir le contact entre l'image de l'étoile dans le petit miroir du sextant et son image dans l'horizon artificiel, ou plutôt d'avoir la certitude que l'astre renvoyé par le grand miroir est bien l'étoile qu'on voit directement dans le liquide. On démontre aisément, comme l'a fait le premier le professeur russe Knorre, que, quand les deux images d'un objet sont en coïncidence, l'inclinaison du grand miroir sur l'horizon artificiel et par suite sur un plan horizontal quelconque, est égale à l'inclinaison de l'axe optique sur le petit miroir, et a, par conséquent, une valeur *constante*. Il propose donc d'adapter un petit niveau à bulle d'air sur l'alidade, en le montant de façon que sa base fasse avec le grand miroir l'angle constant dont il s'agit. Dès lors, en manœuvrant l'alidade de façon à amener la bulle entre ses repères, on aura les deux images dans le champ de la lunette. — En cas de besoin, on peut remplacer le niveau à bulle d'air par un petit pendule composé d'un fil de soie et d'un poids léger, et qu'on fixe à un trou pratiqué dans l'alidade en un point de celle-ci tel, que le pendule vienne tangenter l'extrémité de la tête de la vis de rappel lorsque les deux images sont en coïncidence. Pour déterminer ce point de suspension, il suffit de mettre en contact une ligne horizontale lumineuse et son image, comme l'horizon direct et l'horizon réfléchi de la mer. Puis, dans cette position du sextant, on fait marquer par une autre personne la trace sur l'alidade du prolongement de la verticale qui tangente la tête de la vis de rappel. Le

grand miroir étant alors parallèle au petit miroir, en même temps que l'axe optique est horizontal, fait présentement avec l'horizon l'angle constant sus-mentionné, et cela pour la position de l'alidade qui correspond au *point de collimation.* Le point de suspension du pendule ainsi obtenu permettra évidemment de remettre le grand miroir sous le même angle par rapport à l'horizon, pour une position quelconque de l'alidade par rapport audit point.

— Occupons-nous maintenant des erreurs *systématiques* et *accidentelles* afférentes aux horizons artificiels.

Les erreurs *systématiques* ne peuvent évidemment provenir que du manque de parallélisme des glaces du toit, ou de la mauvaise qualité du *talc*, susceptible de donner une image légèrement déformée. — On peut se mettre à l'abri des erreurs de parallélisme des glaces, en faisant faire à celles-ci, ainsi qu'il a été dit plus haut, une demi-révolution à chaque observation, ou simplement au milieu de chaque série si elle doit comprendre plus de deux angles. Lorsque l'installation des glaces ne se prête pas à cette combinaison, il faut retourner le toit lui-même à chaque contact. De l'une ou l'autre façon, les observations paires et impaires seront erronées d'une quantité sensiblement égale et de signe contraire. Leur moyenne fera donc disparaître l'influence de la circonstance qui nous occupe.

De leur côté, les erreurs *accidentelles* dans les horizons artificiels peuvent provenir d'observations faites près des bords, là où la surface du liquide est susceptible de former *ménisque* sous l'influence de l'action capillaire des parois de la cuvette. — Elles se manifestent encore quand la surface du liquide cesse d'être très-claire, comme avec du mercure sale; ou quand elle tend à se déformer sous l'influence de trépidations dues au vent, ou à toute autre cause. — Les détails très-circonstanciés donnés plus haut pour l'usage des instruments qui nous occupent, permettent toujours de réduire à des quantités insignifiantes les erreurs accidentelles que nous venons de signaler.

3ᵉ PARTIE. — § IV. CONSIDÉRATIONS SUR LE CHOIX ET L'USAGE DES CHRONOMÈTRES; ET SUR LE MODE DE PROCÉDER A TOUT CALCUL.

N° 104. Du choix et de l'usage des chronomètres. Erreurs systématiques et accidentelles susceptibles de les affecter. — Le choix des chronomètres se fixe, au moins dans

les marines militaires, d'après les règles que nous avons indiquées au n° 106. Mais, à égale perfection de construction, il est bon de rappeler que les chronomètres dont la loi de la variation normale de la marche en fonction des changements de la température et du temps est le mieux établie, sont ceux où l'âge des huiles atteint 12 à 18 mois (n° 111).

En ce qui concerne l'usage des chronomètres, nous n'avons qu'à renvoyer aux §§ V et VI de notre deuxième partie, où le sujet a été traité avec un développement aussi complet que possible. Toutefois, il est un point de la question des chronomètres que nous n'avons pas abordé, au moins *explicitement*, dans les paragraphes sus-mentionnés : nous voulons parler des erreurs *systématiques* et *accidentelles* qui sont propres à ces instruments.

Les erreurs *systématiques* comprennent d'abord l'équation personnelle de l'œil et de l'oreille (n° 118), lorsqu'elle porte, d'une part, sur la lecture de l'heure et, d'autre part, sur l'appréciation du moment précis où se produit le phénomène à observer. — Lesdites erreurs peuvent ensuite provenir de l'adoption d'une *loi* erronée pour les variations *normales* (n° 100) de la marche en fonction des changements de la température et du temps. Mais il y a moyen de se mettre à l'abri de cette circonstance par un bon choix et un bon établissement de formule ou de graphique de marche (n°s 140, 141, 142, 144, 149 et 150). — Les perturbations à la mer doivent aussi être classées, d'après la connaissance que nous avons de leurs effets, dans la catégorie des erreurs systématiques.

En ce qui concerne les erreurs *accidentelles*, elles relèvent exclusivement des erreurs de *lecture* et de *top*, en dehors de celles dues à l'équation personnelle. Il est donc utile, avant de voir comment on peut les apprécier, d'étudier à fond ce qu'on appelle les *comparaisons*.

N° 195. Étude spéciale des comparaisons dans les chronomètres. — Pour la plupart des calculs de navigation, il faut, à chaque observation, avoir l'heure que marque le chronomètre *étalon* (n° 137). On se sert à cet effet du *compteur*, que l'on monte sur le pont, et sur lequel on note les heures des contacts.

Les compteurs ont généralement des marches moins uniformes que les montres marines, et sont de plus très-fréquemment influencés par les déplacements. Aussi est-il indispensable de comparer le compteur à l'étalon avant et après chaque séance d'observation, afin de connaître la variation du compteur par rapport à celui-ci dans l'intervalle

écoulé, et de pouvoir obtenir, par une simple partie proportionnelle, l'heure de l'étalon au moment même de l'observation.

Par ailleurs, il faut comparer journellement tous les chronomètres entre eux (6°, n° 152).

En principe, pour prendre une comparaison, l'officier chargé des montres doit opérer *seul*. Dans les débuts, ce mode d'agir offre une certaine difficulté. Mais on arrive très-promptement à la vaincre; et une fois l'habitude acquise, on cesse d'être à la merci d'une autre personne, qui peut ne pas toujours être disponible, et qui n'a pas d'ordinaire le même intérêt que vous à l'exactitude du résultat.

— En tout état de cause, soit à comparer un compteur M avec un chronomètre quelconque, et incidemment divers chronomètres A, B, C entre eux, en prenant M comme *repère des comparaisons*. — On place le compteur de manière à pouvoir entendre distinctement ses battements, et lire en même temps facilement sur le chronomètre *à comparer*.

On écrit l'heure et la minute que M va marquer, soit $M = 3^h 42^m 00^s,0$. Alors on approche le compteur de l'oreille; on écoute ses battements; et on prend bien sa cadence, tout en suivant des yeux son aiguille des secondes. Quand elle arrive sur $41^m 55^s$ si le compteur bat les $0^s,5$, ou bien sur $41^m 56^s$ si le compteur bat les $0^s,4$, on compte *zéro*, puis aux battements suivants, 1, 2, 3, 4, 5, etc. Au sixième ou au septième battement, on porte les yeux sur le chronomètre; et quand on arrive à 10, on estime à vue la position de l'aiguille des secondes du chronomètre. On écrit alors immédiatement le nombre de secondes que l'on a lu; puis on regarde où est l'aiguille des minutes et enfin celle des heures. Tout ceci donnera finalement $A = 7^h 24^m 36^s,3$, par exemple.

A la minute précise suivante de M, on compare B. Supposons qu'il marque $5^h 26^m 43^s,8$. On retranche une minute; et on écrit $B = 5^h 25^m 43^s,8$.

Encore à la minute suivante de M, on compare C. Soit $C = 2^h 28^m 34^s,7$. On retranche deux minutes; et on écrit $C = 2^h 26^m 34^s,7$.

Si l'on avait un plus grand nombre de chronomètres, on continuerait ainsi jusqu'à ce qu'ils aient été tous comparés.

On obtient de la sorte des heures A, B, C, M, lesquelles, vu la petitesse ordinaire des marches diurnes, peuvent être considérées comme correspondant rigoureusement à un seul et même moment. Ces heures, combinées avec celles de l'*Étalon* A, donnent les comparaisons entre celui-ci et une quelconque des autres montres.

— Ce mode de procéder, en ce qui concerne la comparaison de plusieurs chronomètres entre eux, est le plus habituel. Cependant il offre l'inconvénient de faire ressentir, plus qu'il n'est nécessaire, l'influence des erreurs d'observation sur la comparaison de l'étalon A à un autre chronomètre B ; car cette comparaison est alors affectée du double effet dû aux deux erreurs d'observation des comparaisons du compteur M à l'étalon A, et de M au chronomètre B. Aussi préfère-t-on souvent prendre pour *repère des comparaisons* l'étalon lui-même. En d'autres termes, on lui compare, selon d'ailleurs le même mode d'opérer que ci-dessus, tous les autres chronomètres ; c'est même dans ce but qu'on a soin (3°, n° 152) de le placer au milieu de la caisse de l'armoire des montres.

Toutefois, si on avait plus de trois chronomètres, comme les battements de l'étalon pourraient être confondus par l'oreille avec ceux du chronomètre intermédiaire entre l'étalon et le chronomètre extrême à comparer, il faudrait se servir du compteur, au moins à partir du quatrième chronomètre.

— Il reste à ajouter que si on désire se mettre à l'abri des erreurs possibles de lecture et de transcription, il sera bon, dans l'un comme dans l'autre des deux modes d'opérer précédents, de *doubler* chaque comparaison, c'est-à-dire de prendre comme *repère* la montre *comparée* et *vice versâ*.

D'autre part, lorsque les comparaisons sont prises par deux personnes, on suit à peu près les mêmes errements que ci-dessus. L'une des personnes compte à haute voix sur la montre prise comme *repère des comparaisons* (soit l'étalon, soit le compteur), sans d'ailleurs perdre des yeux l'aiguille des secondes de cette montre ; en même temps, l'autre observateur regarde attentivement l'aiguille des secondes du chronomètre comparé, pour saisir le plus exactement possible la position de cette aiguille au moment du *top*.

N° 196. De l'échelle personnelle dans l'appréciation des fractions de seconde à un chronomètre comparé. — Dans les procédés du numéro précédent, l'opération délicate, la seule qui demande un peu d'habileté, c'est la lecture sur le chronomètre qu'on compare à la montre prise pour *repère*.

Si ce chronomètre bat la demi-seconde, et que par suite l'aiguille des secondes parcoure chaque seconde en deux sauts, cette lecture n'offre aucune difficulté ; et l'on arrive assez rapidement à apprécier l'heure à moins de $\pm 0^s,25$. — Si le chronomètre bat les $0^s,4$, et que

par suite l'aiguille des secondes fasse cinq sauts à chaque double seconde, il faut un peu plus d'attention; et dans les débuts on peut aisément se tromper. Cependant, en s'exerçant bien, on lèvera très-vite cette difficulté; et l'on arrivera encore à lire un *top* à moins de $\pm 0^s,2$. Il y a même moyen de parvenir à une approximation de $\pm 0^s,1$. Mais il faut alors être parvenu à se faire une bonne *échelle personnelle.*

L'expérience montre, en effet, que, quand on a acquis une certaine pratique, on apprécie toujours de la *même* manière une *même* fraction soit de l'intervalle de temps compris entre deux battements d'un chronomètre, soit de l'espace du cadran que parcourt l'aiguille des secondes dans ledit intervalle. Ainsi, quand on prend des comparaisons, on finit par apprécier d'une *manière constante* les diverses fractions de seconde du chronomètre comparé. Avant que cette habitude soit invétérée, il est bon de vérifier la justesse de *l'échelle personnelle* qu'on s'est formée de la sorte.—Le professeur Pierce indique un moyen très-ingénieux et très-simple d'effectuer cette *vérification*. Sur un très-grand nombre d'observations, 500 par exemple, chaque décimale doit s'être présentée le même nombre de fois à peu près, soit 50 fois. Dès lors, consultant le registre des comparaisons, on comptera le nombre de fois que chaque décimale de $0^s,0$ à $0^s,9$ s'est présentée. Si ces nombres sont à peu près *égaux* entre eux, l'échelle personnelle est *juste*. Mais s'ils sont *très-différents*, l'échelle est *fausse;* et on tâchera de la rectifier, s'il est encore possible. — Ainsi, supposons que les décimales $0^s,0$, $0^s,1$, $0^s,4$, $0^s,5$, $0^s,6$ et $0^s,9$, et par conséquent les fractions correspondantes de seconde soient bien appréciées par un observateur, mais que les décimales $0^s,2$ et $0^s,7$ se présentent beaucoup trop rarement, et les décimales $0^s,3$ et $0^s,8$ trop souvent. Si les chronomètres battent la demi-seconde, cet observateur devra nécessairement conclure que, quand l'intervalle à estimer est d'environ un demi-intervalle de battement, et par conséquent se trouve compris entre $0^s,2$ et $0^s,3$, ou bien entre $0^s,7$ et $0^s,8$, il prend presque invariablement le *maximum* de cette durée. Étant prévenu de cette circonstance, il pourra donc se tenir en garde contre elle.

N° 107. Du comptage dans les observations. — L'observateur est ici dans l'obligation de se faire aider. On habitue un ou deux timoniers à compter d'une manière nette et brève, depuis *un* jusqu'à *dix*, au moment exact où l'aiguille du compteur passe sur chaque seconde. A chaque dizaine de seconde écoulée, l'aide remplace le mot

dix par celui de *vingt*, *trente*, *quarante*....., suivant que l'aiguille se trouve à cet instant sur l'une de ces dizaines. — Comme *signal* au timonier, l'observateur ne devra pas dire *top*, ainsi que cela se pratique souvent. Mais il répétera le nombre de secondes *appelé*, au moment où son contact lui a paru le plus parfait. En agissant ainsi, on enlève toute chance d'erreur pouvant provenir du timonier; et on a une plus grande liberté d'action pour soigner l'observation elle-même. Dans les observations de précision, telles que celles de réglage de chronomètre, le *comptage* peut se faire autrement. Il y a alors à considérer les deux cas que nous expliquons ci-après en détail.

— Si le compteur bat la demi-seconde, l'aide, supposé très-exercé, commence à compter à partir d'une seconde de numéro *pair*, dès que l'observateur l'en avertit par le mot « *comptez* ». L'appellation des nombres qui doit avoir lieu au moment précis de *chaque battement* de l'aiguille, se fait de la manière suivante :

1, 2, 3, *seize*, par exemple : *seize* étant la *seconde* du numéro *pair* dont la valeur est donnée, abstraction faite des dizaines, s'il y en a, par la position même de l'aiguille, au début du comptage;

Puis 1, 2, 3, *dix-huit* : *dix-huit* étant la seconde du numéro *pair* venant après seize.

Dans ce procédé, il est clair qu'à chaque battement 1, 2, 3, correspond un nombre de secondes égal au *dernier nombre pair prononcé*, augmenté de 0ˢ,5, 1ˢ,0, 1ˢ,5. Dès lors à chaque *signal* donné par l'observateur, l'aide écrit ce nombre de secondes et de demi-secondes, ajouté au dernier nombre pair de secondes appelé. Il note ensuite la minute, puis l'heure.

— Si le compteur bat les 0ˢ,4, l'aide partant de *chaque seconde paire*, compte :

4, 8, 12, 16, *vingt-quatre*, par exemple : *vingt-quatre* étant la seconde de numéro *pair* dont la valeur est donnée par la position même de l'aiguille au début du comptage;

Puis 4, 8, 12, 16, *vingt-six* : *vingt-six* étant la seconde de numéro *pair* venant après vingt-quatre.

Dans le cas qui nous occupe, l'heure d'un signal donné par l'observateur s'écrit comme dans le cas précédent, en remarquant que les battements appelés 4, 8, 12, 16, correspondent ici à la dernière seconde de numéro *pair* prononcée, augmentée de 0ˢ,4, 0ˢ,8, 1ˢ,2, 1ˢ,6.

— Les deux manières de compter que nous venons d'expliquer sont d'un usage assez difficile; et l'on ne doit les employer que lors-

qu'on a une confiance absolue dans son aide. Par prudence même et de peur d'erreur très-facile à commettre, il sera bon de surveiller soi-même, après chaque observation, la transcription de l'heure.

Au surplus, comme nous l'avons dit au n° 138, on peut encore, dans les observations, s'arranger de façon à compter soi-même avec l'oreille. Pour plus de commodité, il est bon ici de marquer d'avance sur l'instrument à réflexion une grandeur déterminée de l'angle à observer; alors c'est le moment où cet angle atteint ladite grandeur qu'indique l'heure donnée par le compteur.

N° 198. Estimation de l'erreur probable dans les comparaisons, les marches relatives déduites et le comptage. —Nous supposerons que l'observateur prend ses comparaisons seul. Si on se servait d'un aide, on introduirait dans les observations du genre dont il s'agit des erreurs qu'il serait bien difficile d'estimer exactement.

Au moment où l'oreille de l'observateur perçoit, à la montre prise pour *repère*, le battement qui indique un nombre exact de secondes, il doit apprécier la position de l'aiguille des secondes du chronomètre à comparer. Les chronomètres battant d'ordinaire la *demi-seconde*, la position de cette aiguille à un moment considéré peut toujours être estimée à moins d'*une demi-seconde*. L'erreur d'une comparaison simple est donc toujours moindre que $\pm 0^s,5$. Il faut ajouter qu'avec un peu de pratique, on apprécie facilement, au moyen de la succession dans l'oreille des battements des deux montres considérées, quelle est la demi-seconde du chronomètre comparé *la plus voisine* de l'instant de la comparaison. Dans ce cas, l'erreur sur la comparaison atteint rarement $\pm 0^s,25$, comme nous l'avons déjà dit au n° 196, surtout si l'on sait évaluer approximativement la fraction de seconde qui sépare les battements des deux montres.

Prenons d'abord le cas le plus défavorable, celui d'un observateur complétement inexpérimenté. D'après ce qui précède, l'erreur d'une comparaison sera toujours comprise entre $0^s,0$ et $\pm 0^s,5$. Comme il n'y a pas de raisons pour que cette erreur soit plutôt supérieure qu'inférieure à $\pm 0^s,25 = \pm \frac{0^s,50}{2}$, c'est-à-dire à *la moitié de l'erreur maximum possible*, on peut prendre $\pm 0^s,25$ pour *erreur probable d'une comparaison simple.*

D'ordinaire (n° 195) le compteur sert d'intermédiaire entre deux chronomètres, pour avoir leur comparaison journalière. Si chaque comparaison du compteur aux chronomètres a $\pm 0^s,25$ pour erreur

probable, la comparaison entre les deux chronomètres, qui se déduit des deux précédentes, aura (n° 128) pour *erreur probable r* :

$$r = \pm\sqrt{(0^s,25)^2 + (0^s,25)^2} = \pm 0^s,25 \times \sqrt{2} = \pm 0^s,35.$$

Dans le cas d'un observateur exercé, qui prend ses comparaisons à moins de 0ˢ,25, soit en nombre rond à 0ˢ,30 près, si l'on fait un raisonnement analogue au précédent, on voit qu'on peut prendre $\pm 0^s,15 = \pm \frac{0^s,30}{2}$ pour erreur probable d'une comparaison simple du compteur au chronomètre. Il en résulte pour l'*erreur probable r'* de la comparaison journalière entre deux chronomètres :

$$r' = \pm\sqrt{(0^s,15)^2 + (0^s,15)^2} = \pm 0^s,15 \times \sqrt{2} = \pm 0^s,21.$$

— Les marches RELATIVES *déduites* (n° 148) jouent un rôle important dans le service des chronomètres, tant par leur emploi direct, si on a basé la régulation de l'ensemble des chronomètres sur les marches RELATIVES, que par leur usage dans la détermination pour l'*Étalon* de ses diverses marches INTÉGRALES *déduites*, obtenues à l'aide des autres chronomètres, si la régulation est basée sur les marches INTÉGRALES. Il est dès lors important d'étudier en particulier les erreurs probables afférentes aux marches dont il s'agit.

Une marche RELATIVE *déduite* s'obtient, nous le savons, par la différence de deux comparaisons journalières consécutives. Or, l'*erreur probable* r_1 de cette marche est fonction des erreurs probables de comparaison r ou r' trouvées quelques lignes plus haut. Conséquemment, pour un observateur inexpérimenté, on aura :

$$r_1 = \pm\sqrt{(0^s,35)^2 + (0^s,35)^2} = \pm 0^s,35 \times \sqrt{2} = \pm 0^s,50;$$

et pour un observateur exercé :

$$r'_1 = \pm\sqrt{(0^s,21)^2 + (0^s,21)^2} = \pm 0^s,21 \times \sqrt{2} = \pm 0^s,30.$$

Le plus ordinairement (n° 154) on prend pour les marches RELATIVES leur valeur moyenne correspondant à 4 ou 5 jours, soit d'une manière générale à n jours. D'après le *nota important* de la fin du n° 128, la moyenne de n marches RELATIVES consécutives peut se calculer en divisant, par le nombre n de jours, la différence entre la comparaison du premier et du dernier jour. Dès lors, l'*erreur probable* R ou R' de la moyenne de n marches RELATIVES consécutives, s'obtiendra en divisant par n la racine carrée de la somme des carrés

des erreurs probables de la première et de la dernière comparaison. On aura donc, pour un observateur inexpérimenté :

$$R = \pm \frac{\sqrt{(0^s,35)^2 + (0^s,35)^2}}{n} = \pm \frac{0^s,50}{n};$$

et pour un observateur exercé :

$$R' = \pm \frac{\sqrt{(0^s,21)^2 + (0^s,21)^2}}{n} = \pm \frac{0^s,30}{n}.$$

— En ce qui concerne les ***erreurs probables*** afférentes au ***comptage***, il est manifeste qu'elles comprennent exclusivement les erreurs de lecture sur le compteur.

Or, d'après le n° 197, l'erreur d'un comptage peut toujours être largement comprise entre $0^s,0$ et $\pm 0^s,5$, il n'y a pas de raison pour que la ***valeur probable*** de cette erreur soit plutôt supérieure qu'inférieure à $\pm 0^s,25 = \pm \frac{0^s,50}{2}$, c'est-à-dire à la moitié de l'***erreur maximum possible***.

N° 199. Conseils relatifs à l'exécution de tout calcul. — M. Liagre, dans son « *Calcul des probabilités* », cité au n° 116, a étudié cette question avec le soin et la sagacité qui distinguent toute son œuvre; et nous ne pouvons faire mieux que de l'exposer d'après ses indications.

Un point très-important pour le calculateur qui veut opérer promptement et avec une exactitude suffisante, c'est de choisir une table de logarithmes *convenable*, c'est-à-dire ne renfermant pas plus de décimales qu'il n'en faut; car les tables volumineuses sont longues à feuilleter. Encke, que l'on peut citer comme l'un des calculateurs les plus habiles et les plus expérimentés de notre époque, dit à ce sujet : « *Les durées d'un même calcul, fait avec des tables à* 5, 6, *ou* 7 *décimales, sont entre elles comme les nombres* 1, 2, 3. »

Quand on s'arrête à la *minute* dans le calcul des angles, et à $\frac{1}{4.000}$ dans celui des longueurs, des tables à 4 décimales sont suffisantes. Elles doivent aller à 5 décimales, si l'on veut avoir les angles à 5″ près, et les longueurs avec l'approximation de $\frac{1}{40.000}$. Des tables à 6 décimales donnent presque sûrement la $\frac{1}{2}$ seconde, et à 7 décimales le $\frac{1}{20}$ de la seconde d'arc.

L'*ordre* et la *division* du travail facilitent singulièrement les opérations les plus compliquées. Les calculateurs exercés peuvent en général travailler longtemps sans fatigue, parce qu'ils introduisent dans

la conduite de leur ouvrage une régularité pour ainsi dire *mécanique*.

Il faut éviter de faire des opérations *de tête*, à moins qu'on n'ait pour elles une aptitude particulière. En général, il est plus sûr, et par conséquent plus court, d'*écrire* tous les calculs qu'on a à exécuter.

Il est bon de se donner des moyens fréquents de vérification, surtout dans les commencements d'un long calcul: c'est alors que les erreurs sont les plus communes et les plus fâcheuses.

Par ailleurs, il est bon de faire d'une seule traite chaque groupe d'opérations de même espèce. Ainsi l'on doit consacrer un temps largement suffisant rien qu'à former les canevas des tableaux numériques, c'est-à-dire à préparer le type du calcul; — puis chercher *tous* les logarithmes; — une fois occupé à calculer, effectuer *tous* les calculs (ordinairement ce ne sont que des additions et des soustractions); — enfin ouvrir de nouveau les tables, pour en déduire *tous* les nombres correspondant aux logarithmes calculés.

— Pour les *calculs de navigation* en particulier, il importe, conformément au n° 33, d'avoir recours dans les opérations à toutes les abréviations, et spécialement à l'emploi du plus petit nombre de décimales logarithmiques, compatibles avec l'obtention de résultats présentant un degré d'exactitude suffisant, eu égard à l'espèce du calcul, ou plutôt à la précision que l'on a en vue.

Il peut être bon aussi, dans les calculs renfermant un certain nombre de séries, de n'écrire qu'une fois, et sur *papier mobile*, les éléments communs à chaque série. On présente ce papier successivement, dans chaque série au moment voulu, à la place que doit occuper le nombre qu'il porte. — Toutefois, ce système est rejeté par beaucoup de navigateurs, au moins *en mer*, alors que les mouvements du navire rendent difficile la fixation momentanée du papier mobile.

Il nous reste à indiquer une précaution qu'on ne saurait négliger avec les bâtiments *rapides*, pour lesquels les erreurs au moment des atterrissages sont d'une gravité extrême; car le plus souvent on n'a pas le temps de les reconnaître avant qu'elles aient produit leurs effets, qui peuvent être désastreux. Cette précaution consiste à faire exécuter, audit moment, tous les calculs par *deux* personnes à la fois, de façon à être en mesure de contrôler les résultats obtenus.

FIN DE LA TROISIÈME PARTIE.

QUATRIÈME PARTIE.

RÉSOLUTION DE DIVERS PROBLÈMES DE NAVIGATION PAR LA SÉRIE DE TAYLOR CONDENSÉE.

4e PARTIE. — § I. DIVERSES FORMES CONDENSÉES DE LA SÉRIE DE TAYLOR A UNE OU PLUSIEURS VARIABLES.

N° 200. Condensation de la série de Taylor dans le cas d'une seule variable. — La série de Taylor est susceptible d'être condensée sous différentes formes, qui donnent une grande valeur pratique à son emploi dans toutes les branches des mathématiques appliquées, et, en particulier, en astronomie et en navigation. Ce sont ces formes que nous nous proposons d'exposer succinctement, en signalant leurs applications nautiques les plus importantes Occupons-nous d'abord du cas d'une seule variable indépendante. Le développement complet de Taylor appliqué à la fonction $\varphi(x+h)$, donne la série bien connue :

$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+\frac{h}{1}\varphi'(x)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}\varphi'''(x)+\ldots\ldots$$

Or, si on applique ce développement à la fonction $\varphi'\left(x+\frac{h}{2}\right)$, on trouve :

$$\varphi'\left(x+\frac{h}{2}\right)=\varphi'(x)+\frac{h}{2}\varphi''(x)+\frac{1}{1.2}\frac{h^2}{2^2}\varphi'''(x)+\frac{1}{1.2.3}\frac{h^3}{2^3}\varphi^{\text{IV}}(x)+\ldots\ldots$$

En multipliant les deux membres par h, on peut écrire :

$$h\,\varphi'\left(x+\frac{h}{2}\right)=\frac{h}{1}\varphi'(x)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}\frac{3}{2^2}\varphi'''(x)+\frac{h^4}{1.2.3.4}\frac{4}{2^3}\varphi^{\text{IV}}(x)+\ldots\ldots$$

En comparant cette relation à la première, on obtient immédiatement la formule condensée :

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=h\varphi'\left(x+\frac{h}{2}\right). \qquad (76)$$

Cette formule tient compte intégralement des termes des deux premiers ordres, ainsi que de fractions importantes des termes d'ordre su-

périeur, à savoir : les $\frac{3}{4}$ du terme du troisième ordre, la moitié du terme du quatrième ordre, etc. Mais, sous les réserves faites au n° 7, ces fractions ne sont pas en général à considérer pour le degré d'approximation obtenue. Ce degré est en principe spécifié par le terme qui suit l'ordre le plus élevé *intégralement* conservé, soit présentement par le terme du troisième ordre. Ainsi on dira que le résultat ci-dessus est obtenu aux quantités près du troisième ordre.

Si on remarque que le calcul de la dérivée première n'est ni plus long ni plus difficile pour la valeur $\left(x+\frac{h}{2}\right)$ de la variable que pour la valeur x, on comprendra facilement toute l'importance de la formule (76); car avec un seul terme elle donne toute la précision requise dans diverses questions délicates de la science nautique.

M. Rouyaux a proposé, dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences* du 7 mai 1877, la forme condensée ci-dessus de la série de Taylor à une variable, pour en tirer de très-intéressantes applications à la navigation, que nous donnons aux n°s 202, 203 et 204. Il a prévenu d'ailleurs que, dans le cas en question d'une seule variable, la forme dont il s'agit avait déjà été indiquée avant lui. On trouve, en effet, dans les mémoires de Legendre, une proposition sur les équations différentielles du premier ordre qui la renferme *implicitement*. Depuis lors, M. Jourjon, ignorant la proposition de Legendre, a donné *explicitement* ladite forme dans les *Comptes rendus* du 16 février 1874.

— Au surplus, en se reportant à la partie du *Cours d'analyse* de M. Hermite qui traite des *quadratures*, ou plus généralement de l'évaluation approchée des intégrales, on voit tout de suite que la méthode de Gauss y signalée conduit à une loi générale des formes les *plus condensées possibles* de la série de Taylor, loi qui est en quelque sorte le pendant de ladite méthode pour l'obtention d'une quadrature avec l'approximation de l'ordre le plus élevé, eu égard au nombre des éléments employés. On sait, en effet, que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ peut s'exprimer sous la forme :

$$Af(\alpha)+Bf(\beta)+\ldots\ldots+Lf(\lambda),$$

$\alpha, \beta, \ldots\ldots, \lambda$ étant des valeurs comprises entre les limites a et b;
$A, B, \ldots\ldots, L$ des coefficients indépendants de la forme de la fonction $f(x)$.

On en conclut, en supposant $f(x)=\varphi'(x)$, la relation analytique

suivante :

$$\varphi(b) - \varphi(a) = A\varphi'(\alpha) + B\varphi'(\beta) + \ldots\ldots + L\varphi'(\lambda).$$

L'approximation dépend ici du choix et du nombre des quantités α, β, ..., λ, ainsi que des coefficients A, B, ..., L. Or, en faisant usage de la méthode précitée de Gauss, on réalisera pour un *nombre donné n* d'éléments α, β, ..., λ, l'approximation de l'ordre le plus élevé qu'il soit possible d'atteindre. Prenons, par exemple, $n = 1, 2, \ldots\ldots$, nous aurons, en nous reportant à la page 451 du *Cours* précité de M. Hermite, les formules que voici :

$$\varphi(b) - \varphi(a) = (b-a)\,\varphi'\left(\frac{b+a}{2}\right);$$

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \frac{(b-a)}{2}\left[\varphi'\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) + \varphi'\left(\frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)\right],$$

. . . .

Posons :

$$a = x, \quad b = (x+h); \quad \text{et} \quad \epsilon = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right), \quad \epsilon' = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right).$$

On tire d'abord de la première formule :

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = h\,\varphi'\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

ce qui est précisément la relation rappelée par M. Rouyaux, et où on a le résultat aux quantités près du troisième ordre. — De son côté, la seconde formule donne :

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = \frac{h}{2}\left[\varphi'(x + \epsilon h) + \varphi'(x + \epsilon' h)\right],$$

où le résultat est obtenu aux quantités près du cinquième ordre.

Hâtons-nous d'ajouter que, eu égard aux approximations auxquelles il y a lieu de se borner en navigation, et en raison de la nécessité d'abréger les calculs, nous n'aurons dans ce qui suit à recourir qu'à la première forme condensée.

— Nous ne saurions terminer cet intéressant numéro sans citer deux applications de ladite forme, qui, bien qu'étrangères à notre sujet spécial, sont trop utiles en elles-mêmes pour être passées sous silence.

1° Pour la quadrature d'une surface plane, on a :

$$\int_a^{a+h} dx\,\varphi(x) = h\,\varphi\left(a + \frac{h}{2}\right),$$

aux quantités près du troisième ordre.

Pour la cubature d'un solide, il vient, en considérant $\varphi(x, y)$ successivement comme fonction d'une seule variable en x d'abord, puis en y :

$$\int_b^{b+k} dy \int_a^{a+h} dx\,\varphi(x, y) = kh\,\varphi\left(a + \frac{h}{2},\ b + \frac{k}{2}\right),$$

aux quantités près du troisième ordre aussi.

On comprend tout de suite combien les deux relations précédentes sont de nature à abréger le calcul numérique d'une quadrature ou d'une cubature.

N° 201. Condensation de la série de Taylor dans le cas de plusieurs variables. — La formule (76) du numéro précédent peut s'étendre au cas d'un nombre quelconque de variables, comme l'a fait voir dans la communication sus-mentionnée à l'Académie des sciences M. Rouyaux, auquel l'extension en question revient tout entière. On a en effet :

$$(77)\qquad \varphi(x+h, y+k)-\varphi(x, y) = h\varphi'_x\left(x+\frac{h}{2},\ y+\frac{k}{2}\right)+k\varphi'_y\left(x+\frac{h}{2},\ y+\frac{k}{2}\right).$$

$$(78)\qquad \varphi(x+h, y+k, z+l)-\varphi(x, y, z) = h\varphi'_x\left(x+\frac{h}{2},\ y+\frac{k}{2},\ z+\frac{l}{2}\right)$$
$$+k\varphi'_y\left(x+\frac{h}{2},\ y+\frac{k}{2},\ z+\frac{l}{2}\right)+l\varphi'_z\left(x+\frac{h}{2},\ y+\frac{k}{2},\ z+\frac{l}{2}\right).$$

Ces relations se démontrent en appliquant le développement complet de Taylor aux différentes fonctions φ', et en comparant ensuite le résultat au développement de la fonction φ elle-même. On reconnaîtra ainsi qu'*elles tiennent compte intégralement des termes des deux premiers ordres ainsi que des 3/4 des termes du troisième ordre* et de certaines fractions des termes suivants.

M. Rouyaux a aussi tiré un excellent parti pour la navigation (n°ˢ 205 à 207), des formules condensées ci-dessus à deux ou trois variables, notamment dans le calcul de la réduction des distances lunaires.

— M. Hermite a étudié le cas d'une condensation de la série de Taylor à plusieurs variables correspondant à une approximation supérieure à celle du commencement du présent numéro, et formant le pendant de la seconde condensation du numéro précédent. Afin que la question puisse former un tout complet, nous citerons le résultat auquel il est parvenu dans l'hypothèse de trois variables, et d'où on déduit aisément l'expression qui convient au cas de deux variables.

Pour abréger l'écriture, posons, comme au n° 200 :

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right), \quad \varepsilon' = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right).$$

Cela étant, on a l'expression approchée :

$$\begin{aligned} &\varphi(x+h,\ y+k,\ z+l) - \varphi(x,\ y,\ z) = \\ &= \frac{1}{2} h \left[\varphi'_x(x+\varepsilon h,\ y+\varepsilon k,\ z+\varepsilon l) + \varphi'_x(x+\varepsilon' h,\ y+\varepsilon' k,\ z+\varepsilon' l)\right] \\ &+ \frac{1}{2} k \left[\varphi'_y(x+\varepsilon h,\ y+\varepsilon k,\ z+\varepsilon l) + \varphi'_y(x+\varepsilon' h,\ y+\varepsilon' k,\ z+\varepsilon' l)\right] \\ &+ \frac{1}{2} l \left[\varphi'_z(x+\varepsilon h,\ y+\varepsilon k,\ z+\varepsilon l) + \varphi'_z(x+\varepsilon' h,\ y+\varepsilon' k,\ z+\varepsilon' l)\right]. \end{aligned}$$

Les quantités négligées sont ici du cinquième ordre en h, k, l; c'est-à-dire que si on développe les deux membres suivant les puissances de ces quantités, les quatre groupes homogènes des termes du premier, du deuxième, du troisième et du quatrième ordre sont complétement identiques.

— Il importe, à propos de l'usage des expressions condensées de la série de Taylor, de prévenir qu'à côté de ces expressions on ne connaît pas de *limites précises* des quantités négligées. Dès lors, ce n'est qu'à la suite de nombreuses applications numériques propres à chaque sorte de calcul, et comparées aux résultats *complets* obtenus par une autre voie, qu'on sera à la rigueur en droit de stipuler s'il est licite d'appliquer d'une manière courante au calcul considéré, l'expression condensée à laquelle on se sera arrêté.

4e PARTIE. — § II. Applications nautiques de la série de Taylor condensée.

N° 202. Emploi de la série condensée de Taylor à une seule variable pour déduire d'un calcul déjà fait un nouvel angle horaire, la latitude n'ayant pas changé. — La formule (76) du n° 200 fournit le moyen d'obtenir rapidement un nouvel angle horaire quand on en a calculé un quelques instants auparavant, et dans l'hypothèse qu'entre les deux observations la latitude n'a pas changé. Cette hypothèse ne convient, il est vrai, qu'au cas d'un navire au mouillage, ou sinon en panne ou en cape. Mais elle prépare par ailleurs à la solution générale de la même question donnée au n° 205. Si on désigne par ΔP la variation de

l'angle horaire correspondant à la différence ΔH de la hauteur, la latitude et la déclinaison restant constantes, nous aurons, en tenant compte intégralement des quantités du deuxième ordre :

$$\Delta P = \Delta H \left(\frac{dP}{dH}\right)_{\frac{1}{2}},$$

l'indice $\frac{1}{2}$ signifiant d'une manière générale que les éléments variables qui figurent dans la dérivée doivent être augmentés de leurs accroissements correspondant à $1/2\,\Delta H$.

Or on sait que la dérivée $\left(\frac{dP}{dH}\right)$ est égale à $-\frac{1}{\cos L \sin Z}$. Par conséquent, il vient : $\left(\frac{dP}{dH}\right)_{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\cos L \sin (Z + 1/2\,\Delta Z)}$, en désignant par ΔZ la variation de l'azimut correspondant à la variation ΔH de la hauteur, et en notant qu'en général ces deux variations sont sensiblement proportionnelles entre elles, quand elles demeurent suffisamment limitées, et que par suite à $1/2\,\Delta H$ correspond $1/2\,\Delta Z$. — Si on remarque que le terme ΔZ n'entre que par sa moitié dans $\sin (Z + 1/2\,\Delta Z)$, on voit qu'il n'a pas besoin d'être calculé avec une très-grande exactitude. Il sera donc suffisant de le déduire des TABLES de M. Labrosse ou de celles de M. Perrin, en opérant comme il suit, selon les indications de M. Rouyaux :

Tables de M. Labrosse. Entrer successivement dans la table d'azimuts avec l'argument H, et l'argument (H + 1°) ou (H + 2°) suivant le cas. En déduire deux azimuts, dont la différence sera la variation de Z qui correspond à une variation de la hauteur égale à 1° ou à 2°. En conclure, par parties proportionnelles, la variation $1/2\,\Delta Z$ correspondant à $1/2\,\Delta H$, et l'ajouter ou la retrancher de l'azimut Z que l'on a dû calculer par ailleurs, puisqu'on en a besoin pour tracer la droite de hauteur. La variation $1/2\,\Delta Z$ sera ajoutée ou retranchée, suivant que dans son mouvement l'astre observé s'éloigne ou se rapproche du méridien. Toutefois, l'insuffisance d'approximation des azimuts fournis par les *tables* de M. Labrosse, ne donne pas toujours $1/2\,\Delta Z$ avec l'exactitude voulue.

Tables de M. Perrin. En différentiant par rapport à Z et à H, la relation $\sin D = \sin L \sin H + \cos L \cos H \cos Z$ fournie par le triangle de position, on trouve facilement :

$$\Delta Z = \left(\frac{\operatorname{tg} L}{\sin Z} - \frac{\operatorname{tg} H}{\operatorname{tg} Z}\right) \Delta H.$$

La parenthèse est immédiatement obtenue en entrant dans la *table I* avec la latitude regardée comme déclinaison, et l'azimut pris comme

angle au pôle; puis en entrant dans la *table II* avec la hauteur regardée comme latitude, l'azimut étant toujours considéré comme angle au pôle. Le calculateur devra porter grande attention au signe du second terme de la parenthèse, lequel terme est négatif quand $Z > 90°$. — En remarquant que les tables ci-dessus fournissent chacun des termes au demi-centième près, on voit que la parenthèse sera connue au moins au centième près, ce qui donne toute l'exactitude dont on a besoin dans les calculs les plus précis, par exemple dans la détermination d'une série d'états absolus au mouillage. — A la mer, où une minute d'arc est généralement une approximation très-suffisante, on sera à même d'utiliser des hauteurs très-écartées, ce qui est un avantage précieux dans les mauvais temps et dans les temps à grains, où l'on ne prend que des hauteurs discontinues quand l'astre vient à passer dans l'éclaircie de deux nuages. A moins que les observations n'aient été faites dans le voisinage du méridien, on pourra hardiment employer des hauteurs écartées de 3 à 4 degrés; car l'ensemble des termes négligés dans ΔP sera toujours extrêmement petit, et les seules erreurs à craindre seront celles qui proviennent de l'imparfaite détermination de ΔZ.

Notons encore que celui des calculs d'angle horaire qui a dû être exécuté en entier donne d'avance le logarithme de $\cos L$, dont on a besoin dans la recherche du terme de correction :

$$\Delta P = -\frac{\Delta H}{\cos L \sin\left(Z + \frac{1}{2}\Delta Z\right)}.$$

Par conséquent, il n'y a qu'un logarithme nouveau à chercher, celui de $\sin\left(Z + \frac{1}{2}\Delta Z\right)$, logarithme qu'il suffira d'ailleurs largement de prendre à la mer avec 4 décimales sans parties proportionnelles.

Il importe de prévenir une fois pour toutes que, dans les diverses formules d'application de l'espèce ci-dessus ou ci-après, les signes des éléments doivent être fixés conformément à la légende générale de la page 1, et que par suite P et Z, en particulier, sont *positifs* ou négatifs suivant qu'ils sont *Ouest* ou Est.

Exemple. Par coup de vent et en cape, on a pris vers 8 heures du matin une première hauteur de Soleil de 16°00′, par une latitude de 48° N[d], et sachant que la déclinaison de l'astre = 2° S[d] (ce qui met à 1[h] 1/2 environ du passage au premier vertical). On en a déduit un angle horaire P de — 63°11′40″, et un azimut de N111°53′ E[t]. Puis le Soleil s'étant caché, on n'a pu l'observer que 33 *minutes*

après; et on a pris alors *une deuxième hauteur de* 21°00'. — On demande d'en déduire la valeur de ΔP, qui combinée avec P doit fournir un nouvel angle horaire, en admettant que la latitude n'a pas changé.

Calcul de ΔZ par les *tables de M. Perrin*.

Table I, $\frac{\text{tg} L}{\sin Z}$	=	$-1{,}20$
Table II, $-\frac{\text{tg} H}{\text{tg} Z}$	=	$-0{,}12$
Somme algébrique	=	$-1{,}32$
$\times$ 1/2 ΔH	=	$\times +2°30'$
1/2 ΔZ	=	$-3°18'$

Z = N 111°53' E^t		
1/2 ΔZ = − 3°18'		
(Z + 1/2 ΔZ) = N 115°11' E^t	col. sin =	0,0434
	col. cos L =	0,1745
	l. ΔH = l. 5° =	4,2553
	l. ΔP =	4,4732
	ΔP =	+ 8°15'30"

Le calcul exécuté en entier avec la deuxième hauteur comme avec la première aurait donné $\Delta P = +8°16'20''$, ce qui dénote, pour le résultat fourni par notre formule réduite, une erreur de 50". Il est d'ailleurs facile de voir que la presque totalité de cette erreur provient uniquement de ce qu'on a calculé ΔZ par la relation :

$$\Delta Z = \left(\frac{\text{tg} L}{\sin Z} - \frac{\text{tg} H}{\text{tg} Z}\right)\Delta H,$$

qui ne tient compte que du premier terme de la formule ordinaire de Taylor. En calculant au contraire ΔZ par la formule condensée :

$$\Delta Z = \left[\frac{\text{tg} L}{\sin(Z + 1/2\,\Delta Z)} - \frac{\text{tg}(H + 1/2\,\Delta H)}{\text{tg}(Z + 1/2\,\Delta Z)}\right]\Delta H,$$

on aurait trouvé $1/2\,\Delta Z = -3°28'$, au lieu de $-3°18'$ et par suite $(Z + \Delta Z) = \text{N}115°21'\text{E}^t$, et $\Delta P = +8°16'04''$, *avec une erreur de* 6" *seulement*. — En réfléchissant que nous avons considéré une hauteur prise 33 *minutes après la première*, on ne saurait méconnaître que c'est là un résultat fort curieux, et bien digne de fixer l'attention des navigateurs.

N° 202. Emploi de la série condensée de Taylor à une seule variable pour déduire d'un calcul déjà fait une nouvelle hauteur estimée, la latitude n'ayant pas changé. — Au lieu de chercher, comme au numéro précédent, à déduire d'un calcul antérieur où la hauteur vaut H, l'angle horaire (P + ΔP) correspondant à une hauteur (H + ΔH), on peut se proposer, au contraire, de calculer avec la *hauteur estimée* H_e employée dans le procédé Marcq Saint-Hilaire (n° 4), et qui se déduit de l'angle horaire $P = (G_e - G_o)$, la nouvelle hauteur estimée $(H_e + \Delta H_e)$ relative à (P + ΔP).

Tout ce que nous venons de dire dans le numéro précédent s'ap-

plique ici, en renversant notre formule de correction, qui devient :

$$\Delta H_e = -\Delta P \cos L \sin(Z + 1/2\,\Delta Z).$$

N° 204. Emploi de la série condensée de Taylor à une seule variable pour tracer une courbe de hauteur. — Comme troisième application de la formule (76) du n° 200, signalons encore le tracé sur la carte par points successifs de la *courbe de hauteur*, laquelle (n° 27) devient de jour en jour d'un usage plus général, on pourrait presque dire plus exclusif.

Pour effectuer ce tracé conformément à 1°, n° 32, on a besoin ici de connaître diverses variations ΔP de l'angle horaire correspondant à diverses variations ΔL de la latitude. Or on a approximativement :

$$\Delta P = \frac{dP}{dL} \times \Delta L.$$

Le coefficient $\frac{dP}{dL}$ peut se calculer rigoureusement sous le nom de *p*, avec les TABLES de M. Perrin. Mais, avec les TABLES de M. Labrosse, il faut le regarder comme égal au coefficient Pagel (n° 12) ; et du reste il ne se trouve alors donné qu'en *secondes de temps*. En tout état de cause, ledit coefficient $\frac{dP}{dL}$ résulte (n° 13), dans les deux tables en question, des deux formules :

$$\frac{dP}{dL} = \text{fonction de L, H et D (Labrosse)}; \qquad \frac{dP}{dL} = \frac{\operatorname{tg} D}{\sin P} - \frac{\operatorname{tg} L}{\operatorname{tg} P} \text{ (Perrin)}.$$

Pour de faibles variations de la latitude, il suffira amplement d'entrer dans lesdites tables avec la valeur de cet élément qui a servi au calcul d'angle horaire complet. — Mais quand ΔL deviendra un peu élevé, il faudra, avec Labrosse, se servir de l'élément en question augmenté de son demi-accroissement, de façon à avoir une valeur plus exacte $\Delta_1 P$ de la variation corrélative de l'angle horaire. Avec les *tables* de M. Perrin, on se servira de $\left(L + \frac{1}{2}\Delta L\right)$ au lieu de L, et de $\left(P + \frac{1}{2}\Delta P\right)$ au lieu de P : la valeur de ΔP entrant dans le second de ces nouveaux arguments sera fournie avec toute la précision voulue par l'emploi même des valeurs de L et de P, dont on s'est contenté pour les faibles variations susdites de L. — Pour les mêmes raisons qu'au n° 202, cette manière de faire tient compte de la totalité des termes du second ordre ; par conséquent, elle peut s'appliquer à des variations très-étendues de la latitude. Malheureusement, on sera arrêté ici par le manque d'approximation des tables sus-mentionnées, qui ne four-

nissent le coefficient $\frac{dP}{dL}$, même *rectifié* comme il vient d'être dit, qu'au centième près, et ne laissent pas dès lors la faculté de faire ΔL plus grand que 2°. Mais attendu que la formule condensée permettrait en principe des variations beaucoup plus larges, on pourra hardiment regarder ce maximum de 2° comme compatible avec l'usage desdites tables, à moins qu'on ne soit tout à fait dans le voisinage du méridien.

Exemple. Un calcul d'angle horaire exécuté le matin par une latitude de 48° N[d], avec une hauteur de Soleil de 16°00′ et une déclinaison de 2° S[d], a donné $P = -63°11'40''$, d'où on a déduit un certain point sur la carte. — On demande de trouver la variation ΔP correspondant à une *augmentation* en latitude de $\Delta L = 2°$, afin d'en tirer, par les différences en latitude et en longitude, un nouveau point de la courbe de hauteur qui passe par le point sus-mentionné.

Tables de M. Perrin.

Table I, $\frac{\operatorname{tg} D}{\sin P}$	$= +\ 0{,}04$	$\frac{\operatorname{tg} D}{\sin(P + 1/2\,\Delta P)}$	$= +\ 0{,}04$
Table II, $-\frac{\operatorname{tg} L}{\operatorname{tg} P}$	$= +\ 0{,}55$	$-\frac{\operatorname{tg}(L + 1/2\,\Delta L)}{\operatorname{tg}(P + 1/2\,\Delta P)}$	$= +0{,}60$
Somme algébrique	$= p = +0{,}59$	p	$= +0{,}64$
$\times\ 1/2\,\Delta L$	$= \times + 1°$	$\times\ \Delta L$	$= \times + 2°$
$1/2\,\Delta P$	$= +\ 35'24''$	$\Delta_1 P$	$= +1°16'48''$
$(P + 1/2\,\Delta P)$	$= -62°36'16''$		

Un second calcul fait directement avec la latitude de 50°, aurait donné $P' = -61°55'15''$. Or, on tire de là :

$$(P' - P) = (-61°55'15'' + 63°11'40'') = +1°16'25'',$$

ce qui indique sur le résultat fourni par la formule condensée une erreur de 23″, tout à fait négligeable à la mer.

Si on n'avait pas eu recours à cette formule, il se serait produit une erreur égale à $2° \times (0{,}64 - 0{,}59) = 6'$, qui n'est aucunement tolérable.

N° 205. Emploi de la série condensée de Taylor à deux variables pour déduire d'un calcul déjà fait un nouvel angle horaire ou une nouvelle hauteur estimée, la latitude ayant changé. — Nous allons maintenant aborder les applications nautiques que M. Rouyaux a tirées de la formule (77) du n° 201, c'est-à-dire de la relation :

$$\varphi(x + h, y + k) - \varphi(x, y) = h\varphi'_x\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k}{2}\right) + k\varphi'_y\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k}{2}\right),$$

dans laquelle entrent, cette fois, deux variables indépendantes recevant chacune un accroissement arbitraire.

Nous avons vu, aux nos 202 et 203, comment on pouvait utiliser le calcul soit d'angle horaire, soit de hauteur estimée fait avec une hauteur observée, pour en déduire, avec un petit nombre d'opérations, les résultats relatifs à diverses autres hauteurs observées, susceptibles d'ailleurs d'être très-écartées de l'observation adoptée comme fondamentale. Mais, afin de simplifier la question, nous avons d'abord supposé que la latitude n'avait pas varié. C'est surtout pendant les temps brumeux, les temps à grains et les coups de vent, que le procédé dont il s'agit s'impose. La longueur du temps d'observation, qui peut s'étendre jusqu'à une heure et plus dans le voisinage des circonstances favorables, fera généralement alors varier la latitude de quelques minutes. Il y a donc lieu de trouver la variation de l'angle horaire ou de la hauteur estimée correspondant aux deux variations ΔH de la hauteur et ΔL de la latitude.

Occupons-nous d'abord de la variation ΔP de l'angle horaire. La formule (77) donne, toujours à la même approximation des termes du troisième ordre :

$$\Delta P = \Delta H \left(\frac{dP}{dH}\right)_{\frac{1}{2}} + \Delta L \left(\frac{dP}{dL}\right)_{\frac{1}{2}},$$

l'indice $\frac{1}{2}$ signifiant que les éléments variables qui figurent dans les dérivées doivent être augmentés de leurs accroissements correspondant à $1/2\Delta H$ et $1/2\Delta L$.

Toutefois, comme $1/2\,\Delta L$ sera toujours un très-petit nombre de minutes, quelquefois même une fraction de minute, on pourra le négliger dans la quantité $(L + 1/2\,\Delta L)$, et ne pas tenir compte de son influence sur Z. On écrira alors simplement :

$$\Delta P = -\Delta H \frac{1}{\cos L \sin (Z + 1/2\,\Delta_H Z)} + \Delta L \frac{\operatorname{cotg}(Z + 1/2\,\Delta_H Z)}{\cos L},$$

l'indice H de $\Delta_H Z$ rappelant que dans la variation de l'azimut on se borne à considérer l'influence de la variation de la hauteur.

Le premier terme se calcule identiquement comme dans le cas où la hauteur seule varie. Le second terme se détermine au moyen du coefficient p pris dans la table III des TABLES de M. Perrin, en y entrant avec $(Z + 1/2\,\Delta_H Z)$ et L comme arguments.

Exemple. Dans l'application du n° 202 où on est resté 33 minutes en observation, on suppose maintenant que la latitude a varié de $+ 4'$. — Trouver l'angle horaire correspondant à la deuxième hauteur et à la deuxième latitude.

Représentons par :

$\Delta_H P$ la variation provenant de l'augmentation de la hauteur;
$\Delta_L P$ la variation provenant de l'augmentation de la latitude.

On a trouvé au numéro précité comme deuxième approximation :

$(Z + 1/2\Delta_H Z) = N 115°21' E^t -$; puis $\Delta_H P =$ $+ 8°16'04''$;
d'où, *Table III* de M. Perrin, $p = +0,71$; et par suite $\Delta_L P = +0,71 \times +4' = +$ $2'50''$
Somme algébrique. . . . . . $\Delta P =$ $+ 8°18'54''$

Le calcul exécuté entièrement avec la deuxième hauteur de 21°00', et la latitude de 48° 04', aurait donné $P' = - 54° 52' 04''$. On tire de là :

$$(P' - P) = (- 54°52'04'' + 63°11'40'') = + 8°19'36'',$$

ce qui assigne au résultat fourni par la formule condensée une erreur de 42'', parfaitement négligeable à la mer.

On remarquera que l'intervalle des deux observations étant de 33 minutes, si le calcul complet se faisait avec une hauteur intermédiaire, on serait en mesure, dans les conditions où nous nous sommes placé, d'utiliser rapidement des hauteurs prises à une heure d'intervalle.

— Pour la prompte détermination d'une hauteur estimée à l'aide d'un calcul déjà fait, soit pour la recherche de la variation ΔH_e que l'élément cherché subit entre les deux observations dans l'hypothèse d'un changement ΔP sur l'angle horaire et ΔL sur la latitude, on a la relation :

$$\Delta H_e = \Delta P \left(\frac{dH}{dP}\right)_{\frac{1}{2}} + \Delta L \left(\frac{dH}{dL}\right)_{\frac{1}{2}},$$

l'indice $\frac{1}{2}$ ayant la signification mentionnée dans la question précédente.

Le premier terme de l'expression ci-dessus se détermine facilement d'après les indications du n° 203. Mais le deuxième terme ne se présente pas sous une forme commode ; et il n'existe d'ailleurs aucune table pour en faciliter le calcul.

N° 206. Emploi de la série condensée de Taylor à deux variables pour la réduction des distances lunaires. — La formule (77) du n° 201 donne aussi une nouvelle méthode de réduction des distances lunaires, qui nous paraît très-curieuse au point de vue mathématique, et très-suffisante dans la pratique. C'est incontestablement la plus élégante application que M. Rouyaux ait faite de ladite formule.

On sait que pour passer de la distance apparente $\Delta_a = AB$, *fig.* 20, du n° 71, de deux astres à la distance vraie $\Delta_v = A'B'$. il suffit de faire

varier les deux hauteurs apparentes a et b de leurs corrections arithmétiques respectives $da = +(p - R)$ pour la Lune A, et $db = +(R_1 - p_1)$ pour le deuxième astre B. Or, dans cette opération, l'angle z au zénith demeure constant; par conséquent, on a les deux relations :

$$\Delta_0 = \varphi(a, b, z),$$
$$\Delta_v = \varphi(a + da, b - db, z),$$

en désignant par φ la fonction qui donne explicitement la valeur de Δ_0 correspondant à la relation bien connue :

$$\cos \Delta_0 = \sin a \sin b + \cos a \cos b \cos z.$$

On déduit de ce qui précède :

$$\Delta_v - \Delta_0 = \varphi(a + da, b - db, z) - \varphi(a, b, z).$$

Dès lors, en vertu de la formule condensée (77), il vient, en tenant compte intégralement des termes du second ordre :

$$\Delta_v - \Delta_0 = da\,\varphi'_a\left(a + \frac{da}{2}, b - \frac{db}{2}, z\right) - db\,\varphi'_b\left(a + \frac{da}{2}, b - \frac{db}{2}, z\right).$$

On sait de plus, d'après le n° 71, que les dérivées $-\varphi'_a(a, b, z)$ et $-\varphi'_b(a, b, z)$ sont respectivement représentées par les cosinus des angles A et B du triangle apparent AZB. Donc les quantités $-\varphi'_a\left(a + \frac{da}{2}, b - \frac{db}{2}, z\right)$ et $-\varphi'_b\left(a + \frac{da}{2}, b - \frac{db}{2}, z\right)$ seront elles-mêmes représentées par les cosinus des angles A_1 et B_1 d'un triangle A_1ZB_1, que nous laissons au lecteur le soin de tracer, et qui a pour éléments z, $\left(90° - a - \frac{da}{2}\right)$, $\left(90° - b + \frac{db}{2}\right)$. Par suite, on trouvera finalement :

$$\Delta_v = \Delta_0 - da \cos A_1 + db \cos B_1.$$

Or, il est facile de voir maintenant que les angles A_1 et B_1 peuvent être calculés, si l'on veut, au moyen d'un triangle ayant pour côtés $\left(90° - a - \frac{da}{2}\right)$, $\left(90° - b + \frac{db}{2}\right)$ et $\left(\Delta_0 + 1/2\,(\Delta_v - \Delta_0)\right)$. Il suffit évidemment pour cela que le côté A_1B_1 soit égal à $\left(\Delta_0 + 1/2\,(\Delta_v - \Delta_0)\right)$. Il l'est, en effet, aux très-petits près du second ordre; car en cette hypothèse on a :

$$A'B' = AB - da \cos A + db \cos B;$$
$$A_1B_1 = AB - 1/2\,da \cos A + 1/2\,db \cos B;$$

d'où :

$$A_1B_1 = AB + 1/2\,(A'B' - AB) = \Delta_0 + 1/2\,(\Delta_v - \Delta_0).$$

Nous arrivons ainsi à cette conclusion curieuse :

On tiendra compte de la totalité des termes des deux premiers ordres se rapportant aux corrections de a *et de* b, *si l'on effectue la réduction d'une distance lunaire par la formule :*

$$\Delta_v = \Delta_o - da \cos A_1 + db \cos B_1,$$

les angles A_1 *et* B_1 *étant d'ailleurs calculés à l'aide du triangle ayant pour côtés les côtés du triangle apparent augmentés de leurs demi-variations respectives* $\frac{da}{2}$, $-\frac{db}{2}$, $\frac{(\Delta_v - \Delta_0)}{2}$, *c'est-à-dire à l'aide du triangle moyen entre le triangle apparent et le triangle vrai.*

La différence $1/2\ (\Delta_v - \Delta_0)$ n'est pas connue *à priori*, comme les variations $1/2\ da$, $1/2\ db$. Mais on la calcule avec une exactitude suffisante en déterminant une valeur approchée Δ_v de la distance vraie d'après l'heure approchée de Paris déduite des chronomètres. Et effectivement le mouvement propre de la Lune est en moyenne de 30″ par minute ; par conséquent $1/2(\Delta_v - \Delta_0)$ ne sera erroné de ce chef que de 15″, pour un écart de 1 minute dans l'heure de Paris déduite des chronomètres. — Remarquons encore que le calcul préalable de Δ_v se fait en trois lignes, grâce au logarithme de $\frac{3^h}{\text{diff.}}$ qui se trouve tout donné dans la *Connaissance des temps*. Ce calcul n'entraîne donc aucune longueur sérieuse ; et il sert incidemment à prévenir des fautes de signe susceptibles d'être commises dans l'expression $(\Delta_0 - da \cos A_1 + db \cos B_1)$ de la fin du calcul, puisque l'on a d'avance une valeur approchée de Δ_v.

Les avantages inhérents au mode de réduction du n° 71 sont attribuables à la méthode précédente de M. Rouyaux, qui toutefois cesse d'être applicable quand on ne peut compter que sur une heure approchée de Paris erronée de plus de 1 minute. Une discussion approfondie de ladite méthode ne saurait trouver place ici. Il suffit actuellement de dire qu'une étude attentive amène à conclure que :

La réduction des distances lunaires par la série de Taylor condensée ne donne, quand elle est applicable, plus de 1″ *d'erreur qu'avec les distances inférieures à* 15°, *et cela pour toutes les latitudes où l'on est appelé à naviguer couramment, c'est-à-dire entre* 60° Nd et 60° Sd.

Elle suffit donc amplement avec toutes les distances fournies par la *Connaissance des temps*.

Pour achever la question, il reste à en donner une application nu-

mérique. On trouvera cette application au TYPE DE CALCUL 8 *bis* de la fin du texte : ce type est suffisamment explicite par lui-même pour ne nécessiter ici aucun développement auxiliaire.

N° 207. Emploi de la série condensée de Taylor à trois variables pour déduire, avec la Lune, d'un calcul déjà fait plusieurs nouveaux angles horaires. — Il convient de signaler une application dont est susceptible la formule condensée (78) du n° 201 :

$$\varphi(x+h, y+k, z+l)-\varphi(x, y, z)=h\varphi'_x\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{k}{2}, z+\frac{l}{2}\right)$$
$$+k\varphi'_y\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{k}{2}, z+\frac{l}{2}\right)+l\varphi'_z\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{k}{2}, z+\frac{l}{2}\right),$$

dans laquelle figurent cette fois trois variables indépendantes, recevant chacune un accroissement arbitraire.

L'application dont il s'agit se présentera quand, par temps brumeux, coup de vent, etc., on aura observé la Lune d'une manière discontinue. Dans les mauvais temps, il arrive fréquemment que le Soleil reste caché toute la journée, et que la Lune se montre au contraire pendant la nuit. Comme, près des côtes, on a un grand intérêt à reconnaître le plus vite possible sa position, on prendra alors quelques hauteurs, quand la Lune apparaîtra dans l'éclaircie de deux nuages. Il s'agit d'utiliser ces hauteurs assez écartées les unes des autres, en ne faisant, bien entendu, qu'un seul calcul d'angle horaire avec la hauteur intermédiaire. Eu égard à la rapidité du mouvement en déclinaison de la Lune, il y a lieu ici de tenir compte des trois variations simultanées : ΔH de la hauteur, ΔL de la latitude, et ΔD de la déclinaison. La formule (78) donne, en tenant compte intégralement des termes du deuxième ordre :

$$\Delta P=\Delta H\left(\frac{dP}{dH}\right)_{\frac{1}{2}}+\Delta L\left(\frac{dP}{dL}\right)_{\frac{1}{2}}+\Delta D\left(\frac{dP}{dD}\right)_{\frac{1}{2}},$$

l'indice $\frac{1}{2}$ signifiant toujours que les éléments variables doivent être augmentés de leurs accroissements correspondant à $1/2\Delta H$, $1/2\Delta L$ et $1/2\Delta D$.

Remarquons que $1/2\Delta L$ et $1/2\Delta D$ atteignant au plus quelques minutes, on pourra les négliger dans les éléments $(L+1/2\,\Delta L)$ et $(D+1/2\,\Delta D)$, et ne pas tenir compte de leur influence sur Z. Il viendra alors simplement :

$$\Delta P=-\Delta H\frac{1}{\cos L\sin(Z+1/2\,\Delta_H Z)}+\Delta L\frac{\cot g(Z+1/2\,\Delta_H Z)}{\cos L}+\Delta D\left(\frac{dP}{dD}\right)_{\frac{1}{2}}.$$

Nous avons vu aux n°s 202 et 205 la manière de calculer les deux

premiers termes, au moyen des TABLES de M. Perrin. — Quant au troisième terme, on l'aura facilement ; car, si on différentie l'équation fondamentale du triangle de position par rapport à P et à D, et qu'on néglige l'influence de $1/2\Delta L$ et $1/2\Delta D$ sur P, on trouve sans difficulté :

$$\left(\frac{dP}{dD}\right)_{\frac{1}{2}}=\frac{\operatorname{tg}L}{\sin(P+1/2\,\Delta_H P)}-\frac{\operatorname{tg}D}{(\operatorname{tg}P+1/2\,\Delta_H P)},$$

$\Delta_H P$ ayant la même signification qu'au n° 205.

Or cette expression se calcule en entrant dans lesdites *tables* (là où elles donnent les deux parties du coefficient Pagel), avec la latitude comme déclinaison, et la déclinaison comme latitude.

Exemple. Dans les mêmes conditions qu'à l'exemple du n° 205, supposé d'ailleurs se rapporter présentement à la Lune, on a trouvé 21°00′ pour une deuxième hauteur prise 33 minutes après la première. — La latitude ayant varié de + 4′ et la déclinaison de + 3′, c'est-à-dire la latitude étant devenue 48° 04′ N^d et la déclinaison 1° 57′ S^d, on demande le deuxième angle horaire.

Nous avons déjà trouvé audit exemple :

$$\Delta_H P=-\frac{\Delta H}{\cos L\sin(Z+1/2\,\Delta Z)}=+\,8^\circ16'04''$$

$$\Delta_L P=+\,\Delta L\,\frac{\operatorname{cotg}(Z+1/2\,\Delta Z)}{\cos L}=+\quad 2'50''$$

On a, en outre, ci-contre à droite :

$$\Delta_D P=\Delta D\times\left(\frac{dP}{dD}\right)_{\frac{1}{2}}=-\quad 3'56''$$

Somme algébrique $\Delta P=+\,8^\circ14'58''$

Calcul de $\left(\frac{dP}{dD}\right)_{\frac{1}{2}}$ par les *Tables* de M. Perrin :

Table I, $\frac{\operatorname{tg}L}{\sin(P+1/2\Delta_H P)}=\frac{\operatorname{tg}48^\circ}{\sin(-59^\circ)}=-1{,}29$

Table II, $-\frac{\operatorname{tg}D}{\operatorname{tg}(P+1/2\Delta_H P)}=-\frac{\operatorname{tg}(-2^\circ)}{\operatorname{tg}(-59^\circ)}=-0{,}02$

Somme algébrique. . . . . $=-1{,}31$

$\times+3'$

produit $=-3'56''$

Un deuxième calcul d'angle horaire fait directement avec la hauteur de 21°00′, la latitude de 48°04′ N^d et la déclinaison de 1°57′ S^d, aurait donné $P'=-\,54^\circ56'13''$; d'où :

$$(P'-P)=(-54^\circ56'13''+63^\circ11'40'')=+\,8^\circ15'27''.$$

Ceci assigne au résultat fourni par la formule condensée une *erreur de 29″ seulement*, quantité absolument négligeable dans l'hypothèse d'observations de nuit et de mauvais temps où nous nous sommes placé.

FIN DE LA QUATRIÈME ET DERNIÈRE PARTIE.

Note supplémentaire concernant un cas particulier de l'emploi des graphiques de marche en isothermes, et l'usage des lignes dites thermiques.

Si, avec un graphique de marche en *isothermes* (nos 144 et 149), la température d'un jour donné à la mer correspond, dans la partie dudit graphique dressé en rade, à une date très-éloignée, on ne devra pas se fier complétement à la marche tirée du graphique ; car une tangente isotherme partant de très-loin peut donner des différences notables, par suite d'une légère erreur sur son inclinaison. Dans ce cas spécial, il convient de vérifier ladite marche, en la comparant à des marches de mer de date plus récente et de température qui approchent de la sienne.

Toutefois, ce mode de procéder cessera d'être applicable si la température du jour *de mer* considéré se trouve différer notablement des diverses températures avec lesquelles a été construit *en rade* le graphique de marche employé. Or le cas qui nous occupe se présente assez fréquemment, même sur des bâtiments depuis longtemps en cours de campagne et où le graphique de marche des chronomètres a pu être complété par diverses parties dressées en rade ; tels sont, par exemple, les navires en station l'été à la côte de Terre-Neuve, et descendant l'hiver aux Antilles, etc.

On peut évidemment lever la difficulté en ayant recours à une *ligne isotemps* (nos 147 et 150), qu'on extrapole. Mais M. Hilleret a proposé un moyen très-ingénieux directement applicable au graphique en isothermes dont on dispose, et qu'il nous semble utile d'expliquer.

Au lieu de mener par le point de la température du jour de mer considéré une parallèle à l'axe des temps, on tire une sécante qui coupe en le plus grand nombre de points possibles la courbe des températures ; et on projette sur la courbe générale des marches (n° 142) chacun des points d'intersection ainsi déterminés. Il résulte de là une série de nouveaux points, qui tous devront se trouver sur une courbe, que nous appellerons, avec M. Hilleret, *ligne thermique*. — Il peut se faire que la sécante sus-mentionnée ne coupe la courbe des températures qu'en un ou deux points. En pareille occurrence, on cherche aussi les points de rencontre de cette sécante avec les diverses horizontales menées (n° 144) à travers ladite courbe pour la détermina-

tion des isothermes. On projette chacun des nouveaux points sur celle de ces dernières lignes qui lui correspond. On a évidemment ainsi des points appartenant à la *ligne thermique cherchée*, et qui se trouvent en nombre suffisant pour bien déterminer cette ligne. — En tout état de cause, si la formule générale des marches correspondait à la série de Taylor bornée aux termes du second degré, ainsi que nous l'avons supposé aux n°s 145 à 147, la ligne thermique serait une parabole. Mais, dans la pratique, il n'en est pas généralement ainsi. On se contente alors de tracer une courbe continue et sans inflexion, en s'écartant le moins possible des points projetés précités. Cette opération faite, on extrapole la ligne thermique; et le point où cette ligne coupe l'ordonnée menée par la date de mer en question, fournit la marche diurne cherchée.

Comme toutes les lignes thermiques ont la forme approchée d'une parabole, si la ligne obtenue paraissait avoir son sommet dans la région à extrapoler, il serait préférable, au lieu de l'employer, de mener une nouvelle sécante pour déterminer une autre ligne thermique. On se servirait alors de cette dernière ligne pour l'extrapolation, autant toutefois qu'elle ne se trouverait pas dans la même situation particulière que la première. — En tout état de cause, si on trace, en partant de la même température relative à une date donnée, une série de sécantes, il est évident que les différentes lignes thermiques résultant de ces diverses sécantes, devront toutes passer, aux erreurs près de construction, par le point dont l'ordonnée est appelée à fournir la marche inconnue.

Il nous reste à faire remarquer que les lignes isothermes forment un cas particulier des lignes thermiques, à savoir celui où ces dernières lignes sont menées parallèlement à l'axe du temps.

CONCLUSION.

Les principes généraux de *Navigation* résumés dans le cours de cet ouvrage, comporteraient, pour leur développement intégral, *tout un traité* rédigé suivant l'ordre d'idées actuelles. Mais nous avons dû, dans la présente publication, nous borner à esquisser la question à grands traits, en insistant particulièrement sur ses côtés originaux et généralement ignorés. Ces côtés ont d'ailleurs été abordés dans certains cas à l'aide des mathématiques transcendantes. Nous n'avons pu éviter un pareil emploi, à cause de la nécessité d'approfondir diverses discussions importantes. Toutefois, les officiers instruits et les professeurs auxquels s'adresse plus particulièrement notre travail, ne sauraient trouver là une difficulté; et nous espérons qu'ils seront dès à présent à même de mettre leur instruction nautique en complète harmonie avec les doctrines que nous préconisons.

Selon nous, toutes les démonstrations du traité auquel nous venons de faire allusion, devraient être d'ordre *élémentaire* et *géométrique*. Les marins n'ont ni le besoin ni le temps de connaître *à fond* la théorie des méthodes qu'ils ont à appliquer. Il suffit de satisfaire leur esprit par des preuves qui parlent aux yeux, tout en ayant un degré suffisant de rigueur. Quant à ce degré, il appartient aux auteurs et aux professeurs de l'apprécier et de le discuter *in petto* par l'analyse. Cette précaution est indispensable; et nous avons exprès donné au n° 23 un exemple de la délicatesse extrême qu'il faut apporter, en de certains cas, à l'établissement des démonstrations par figures.

Les objections, nous le savons, ne manquent pas à notre manière de voir. On met principalement en avant que la discussion complète de la validité des démonstrations de l'espèce qui nous occupe, rend, en somme, la théorie d'une question plus longue que si on l'abordait tout de suite par l'analyse. Nous acceptons cette observation en elle-

même ; mais nous nous élevons contre l'opportunité d'enseigner aux navigateurs la quintessence des théories dont ils ont à faire usage. Ceux d'entre eux qui se sentent l'esprit inventif doivent seulement être prévenus que, pour élucider quelque problème nouveau, il faut n'employer les procédés géométriques qu'avec la plus grande circonspection, et se servir de préférence des méthodes analytiques, au courant desquelles il importe du reste de se mettre, le jour où on a la prétention de faire progresser la science nautique.

FIN DU TEXTE.

TYPES DE CALCUL

POUR

LA DÉTERMINATION :

1° DES DROITES DE HAUTEUR ET DU POINT COMPLET A LA MER,
2° DES DISTANCES LUNAIRES,
3° DE L'USAGE PERFECTIONNÉ DES CHRONOMÈTRES,

AVEC

APPLICATION ÉLÉMENTAIRE DE LA THÉORIE DES ERREURS D'OBSERVATION.

Appendice au Type de calcul n° 1, ci-après.

Recommandation générale. — S'aider, dans le cours de chaque calcul, de croquis analogues aux figures dessinées dans les types. D'ailleurs, eu égard à l'approximation à laquelle il suffit de viser à la mer pour les déterminations dont il s'agit, ne prendre que cinq décimales pour les logarithmes, et substituer aux secondes, dans l'évaluation des angles, des dixièmes de minute appréciés en nombre rond. Ce mode d'opérer abrége les conversions de temps en degrés, toutes les additions en général, et, en particulier, l'effectuation des nombreux calculs d'estime que nécessite la méthode Marcq Saint-Hilaire. Il n'entraîne aucune difficulté pour la recherche des logarithmes, attendu que la conversion de dixièmes de minute en secondes, et *vice versâ*, s'effectue très-aisément de tête.

Convention importante. — Pour les personnes familiarisées avec les signes des lignes trigonométriques d'un angle quelconque, positif ou négatif, $<$ ou $>180°$, la meilleure manière d'opérer est de traiter tous les éléments des formules exclusivement d'une manière algébrique, avec des signes conformes aux indications de la légende générale page 1. Mais pour les navigateurs, chez lesquels l'usage de *noms* avec la latitude, la longitude, l'azimut, etc., est enraciné, et d'ailleurs indispensable à maintenir à bien des égards, il nous paraît nécessaire de conserver cet usage dans le cours de tout calcul, en stipulant dès lors les règles spéciales propres à chaque type. C'est cette marche que nous avons adoptée pour la présente application de la méthode Marcq Saint-Hilaire, ce qui exige la convention que voici :

En général, toutes les quantités dont les dénominations sont :

Nord / Sud } telles que les latitudes, les déclinaisons, etc.,

ou bien encore celles dont les dénominations sont :

Ouest / Est } telles que les longitudes, les angles au pôle, etc.,

seront toujours considérées, *les unes par rapport aux autres*, comme { positives (+) / négatives (—).

Explications correspondant aux divers chiffres de renvoi marqués dans le cours du type.

(1) Ce calcul d'heure approchée a deux buts bien marqués : 1° trouver *la date* de Paris; 2° savoir si l'heure de Paris est supérieure ou inférieure à 12^h. — Ces deux renseignements sont essentiels pour déterminer, sans hésitation et sans erreur possible, l'heure de Paris correspondant à l'heure marquée au compteur lors des observations.

(2) La déclinaison et l'équation du temps devant se calculer pour l'heure temps moyen de Paris, se prennent, avec la disposition adoptée depuis quelques années dans la *Connaissance des temps*, à la page de droite de ce recueil; mais on tire de la page de gauche la variation en 1^h de l'équation du temps.

(3) Nous avons pris pour différence en 1^h, la *moyenne algébrique* des différences données dans la *Connaissance des temps* pour le 21 et le 22 décembre. On remarquera (ce qui n'est indiqué par aucun indice apparent) que ces deux différences consécutives sont, pour les dates *spéciales* considérées, de *signes contraires*. Non prévenu, on pourrait s'y tromper. — Pratiquement, il n'y a aucune importance à prendre en général la moyenne des deux différences consécutives. Mais comme les marins se contentent d'habitude de la simple proportionnalité, effectuée d'ailleurs avec la différence propre à la date considérée de Paris, pour calculer les éléments du Soleil, il pourrait leur arriver de trouver, dans ce cas, une déclinaison dont la valeur calculée, comparée à celles de la *Connaissance des temps*, tomberait entre celle du lendemain et celle du surlendemain. Cette circonstance, qui tout d'abord étonne, provient de ce que les différences sont données pour 0^h temps moyen de Paris, et figurent en fait la *variation instantanée*, autrement dit la vitesse en déclinaison de l'astre à midi même. Elles ne représentent donc pas, comme on pourrait le croire, la variation *horaire* moyenne d'un jour au suivant : ceci n'aurait lieu que si le mouvement de l'astre en déclinaison était *uniforme*.

(4) $T_{p,v}$ est égal à la différence algébrique $(T_{p,m} - E)$. On retranche 24 heures à la différence, si celle-ci dépasse 24 heures.

(5) $\begin{cases} G_a \text{ en temps} = T_{p,v}, \text{ si } T_{p,v} \text{ est } < 12^h; \text{ et dans ce cas } G_a \text{ est Ouest.} \\ G_a \text{ en temps} = 24^h - T_{p,v}, \text{ si } T_{p,v} > 12^h; \text{ et dans ce cas } G_a \text{ est Est.} \end{cases}$

(6) $\begin{cases} \text{P a le même nom et la même valeur que } (G_a - G_e), \text{ si cette différence est } < 180°. \\ \text{P a le nom contraire à } (G_a - G_e), \text{ et pour valeur } 360° - (G_a - G_e), \text{ si } (G_a - G_e) > 180°. \end{cases}$

(7) φ est toujours aigu. On convient de lui donner $\begin{cases} \text{le nom de D si P} < 90°; \\ \text{le nom contraire à D si P} > 90°. \end{cases}$
Une fois le nom de φ connu, on fait la *somme* ou la différence de cet élément avec la latitude, suivant que ces deux quantités sont de *même* nom ou de noms contraires. Le résultat prend le nom de la plus forte des deux quantités.

(8) Z_e se prend toujours aigu. Cet azimut se compte :
à partir du point cardinal (Nord ou Sud)..... $\begin{cases} \text{de même nom que} \\ \text{de nom contraire à} \end{cases} (L_e + \varphi)$ si $\begin{cases} (L_e + \varphi) < 90° \\ (L_e + \varphi) > 90° \end{cases}$,
en allant vers $\begin{cases} \text{l'Est si P est Est.} \\ \text{l'Ouest si P est Ouest.} \end{cases}$

(9) On prend toujours H_e aigu.

(10) h est une quantité essentiellement positive, dont la valeur absolue est égale à celle de $(H - H_e)$.

(11) L'angle V a toujours même valeur que Z_e; et, eu égard à l'usage exclusif sus-mentionné de la valeur *absolue* de $(H - H_e)$, on doit lui donner :
$\begin{cases} \text{le même nom que} \\ \text{le nom contraire à} \end{cases} Z_e$, si $\begin{cases} (H - H_e) \text{ est } \textit{positif} \text{ (le zénith estimé est alors en dehors du cercle de haut}^r\text{)}; \\ (H - H_e) \text{ est } \textit{négatif} \text{ (le zénith estimé est alors en dedans du cercle de haut}^r\text{)}. \end{cases}$

(12) Point estimé effectué avec (L_e, G_e) comme point de départ, V comme angle de route, et h comme nombre de milles parcourus.

Appendice au Type de calcul n° 2, ci-après.

Explications correspondant aux divers chiffres de renvoi marqués dans le cours du type.

Les 11 premiers renvois sont expliqués dans l'appendice propre au type n° 1; pourvu qu'on mette par la pensée des accents aux lettres considérées dans ces renvois.

(12) N'existe pas dans le type qui nous occupe.

(13) V_1 est le relèvement perpendiculaire au relèvement V. Il correspond à la direction E_1D_1, *fig.* 44, de la première droite de hauteur ED transportée parallèlement à elle-même de R en Z_e, par suite du changement de zénith.

(14) α est l'angle aigu compris entre les deux relèvements V' et V_1.

(15) c s'obtient en entrant dans la *table de point* avec α comme angle de route, et h' comme chemin N.S; on trouve c dans la colonne des milles.

(16) Les coordonnées du point observé N', *fig.* 44, du navire, au moment de la deuxième observation, correspondent évidemment à la rencontre de la première droite de hauteur ED transportée en E_1D_1, avec la deuxième droite de hauteur E'D'. Elles s'obtiennent en effectuant un calcul de point estimé, dans lequel on prend (L_e', G_e') comme point de départ, V_1 comme angle de route, et c comme nombre de milles parcourus.

TYPE DE CALCUL n° 1, PAR M. HILLERET. — MÉTHODE MARCQ

Nota important. Cette méthode ne souffre aucune exception, c'est-à-dire qu'elle est applicable quel

Détermination du point observé par

(Voir, pour les explications correspondant aux chiffre

1re PARTIE DU PROBLÈME : Recherche du point rapproché et de la droite de hauteur correspondant à un observation, avec l'azimut et la hauteur estimée calculés par une tangente. (Voir nos 4 et 10 du texte

1° DONNÉES RELATIVES À LA 1re OBSERVATION.
- Hauteur instrumentale $H_i\odot = 12°36',0$
- Heure du compteur $M = 3^h42^m41^s$
- Hre approchée du bord (donnée par la montre de timonerie) 8^h20^m du matin, le 22 déc. 1878.

2° CALCULS PRÉPARATOIRES.

Point estimé pour l'heure de l'observation, déduit du point observé précédent.

φ (corrigé de la variation et de la dérive)	M	N^d	S^d	E^t	O^t
N 59°,5 O^t	33,3	16,9	—	—	28,8
N 15°,3 E^t	60,2	58,1	—	15,9	—
S 6°,5 E^t	69,9	—	69,4	—	7,9
		75,0	69,4	15,9	36,7

$l = 5',6$ N^d ; $E = 20',8$ O^t
$L_1 = 54°48',5$ S^d ; $g = 26',0$ O^t
$L_e = 54°42',9$ S^d ; $G_1 = 128°55',3$ E^t
$\frac{1}{2}(L_1 + L_e) = 54°45',7$ S^d ; $G_e = 128°29',3$ E^t

Calcul de l'heure approchée de Paris (1).

Heure de la montre du bord $= 17^h20^m$ le 21 déc.
G_e en temps $= 8^h34^m$ E^t
Heure approchée de Paris $= 8^h46^m$ le 21 déc.

Calcul de l'heure exacte temps moyen de Paris.

Compteur $M = 3^h42^m41^s$
Retard du compt^r sur le chron. A $= A - M = 5^h38^m35^s,8$
Retard du chronom. A sur Paris $= T_{p,m} - A = 11^h25^m18^s,8$ le 21 déc.
Heure approchée de Paris $= 8^h44^m35^s,6$
Marche diurne $m_A = 6^s,4$ avance :
p. p. p. (presque toujours négligeable à la mer.) 8^h $-2^s,1$; 45^m $-0^s,2$
Heure de Paris $T_{p,m} = 8^h44^m33^s,3$ le 21 déc.

Correction de la hauteur.

$H_i\odot$ Hauteur instrumentale $= 12°36'$
e Erreur instrumentale $= +$
i Dépression $= -$
H_a Hauteur apparente $= 12°3$
$(R-p)$ Réfract. moins parallaxe $= -$
d 1/2 diamètre $= +$ 1
H Hauteur vraie du centre $= 12°46$

Calcul des éléments de la Connaissance des temps.

D⊙ à 0^h t. m. de Paris, 21 déc (2) $= 23°27'20'',8$ S^d
Différence moyenne (2) en une heure $= -0'',12$.
p. p. p. $T_{p,m}$ 8^h $-1'',0$; 45^m $-0'',1$
D⊙ $= 23°27',3$ S^d

—Eq. du temps à 0^h t. m. de Paris, 21 déc. (2) $= +1^m40^s,41$
Différ. en 1 h^re $= -1^s,253$
p.p.p. $T_{p,m}$ 8^h $-10^s,02$; 45^m $-0^s,93$
$-E = +1^m29^s,5$
$T_{p,m} = 8^h44^m33^s,3$
$T_{p,v} = 8^h46^m02^s,8$ (3)
$G_a = 131°30',7$ O^t
$G_e = 128°29',3$ E^t
$(G_a - G_e) = 260°00',0$ O^t
$P = 100°00',0$ E^t

3° MISE EN NOMBRE DES FORMULES (4), (7) ET (8) DU N° 4, AVEC $P = (G_a - G_e)$, OU $360° - (G_a - G_e)$.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos P}{\operatorname{tg} D}$$

col. tg D $= 0,36265$
l. cos P $= \bar{1},23967$
l. tg φ $= \bar{1},60232$
φ $= 21°48',8$ N^d (7)
$L_e = 54°42',9$ S^d
$(L_e + \varphi) = 32°54',1$ S^d (7)

$$\operatorname{tg} Z_e = \frac{\operatorname{tg} P \sin\varphi}{\cos(L_e + \varphi)}$$

l. tg P $= 0,75368$
l. sin φ $= \bar{1},57004$
col. cos $(L_e + \varphi) = 0,07592$
l. tg $Z_e = 0,39964$
$Z_e = S\,68°16',5$ E^t (8)

$$\operatorname{tg} H_e = \operatorname{tg}(L_e + \varphi)\cos Z_e.$$

l. tg$(L_e + \varphi) = \bar{1},81086$
l. cos $Z_e = \bar{1},56838$
l. tg $H_e = \bar{1},37924$
$H_e = 13°28',0$ (9)
$H = 12°46',0$
$(H - H_e) = -42',0$
$h = 42^{mil},0$ (10)

4° CALCUL DES COORDONNÉES DU POINT RAPPROCHÉ R (12), fig. 43.

$l = 15',5$ N^d ; $E = 39',0$ O^t
$L_e = 54°42',9$ S^d ; $g = 67',1$ O^t
$L_r = 54°27',4$ S^d ; $G_e = 128°29',3$ E^t
$G_r = 127°22',2$ E^t

$V = N\,68°,3$ O^t (11)

TRACÉ DE LA DROITE DE HAUTEUR CORRESPONDANT AU POINT RAPPROCHÉ.

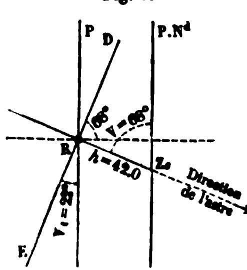
1er procédé (exclusivement graphique).

On porte sur la carte le point Z_e, *fig.* 43, à l'aide de ses deux coordonnées :

$L_e = 54°42',9$ S^d,
$G_e = 128°29',3$ E^t.

Par le point Z_e, on trace à l'aide d'un rapporteur, une droite Z_eR, formant avec le méridien un angle $PZ_eR = N\,68°$ O^t. Puis on prend sur l'échelle des *latitudes croissantes*, par le travers du point Z_e une ouverture de compas égale à $h = 42^{mil},0$, que l'on porte en Z_eR dans la direction même de l'astre ou à l'opposé de cette direction, suivant que la hauteur *réelle* est plus grande ou plus petite que la hauteur *estimée*, c'est-à-dire suivant que $(H - H_e)$ est positif ou négatif. Le point R ainsi trouvé est le *point rapproché*. Si par le point R, on mène ED perpendiculaire à Z_eR, on a la *droite de hauteur*.


Fig. 43.



2e procédé (en partie numérique.)

On porte sur la carte le point rapproché R, *fig.* 43, à l'aide de ses deux coordonnées :

$L_r = 54°27',4$ S^d,
$G_r = 127°22',2$ E^t;

et l'on mène par ce point droite DE formant avec le méridien un angle PRE $= 90°$ $68° = S\,22°\,O^t = V_1$; ou avec le parallèle un angle $68° = Z_e$. On a ainsi la *droite de hauteur*.

TYPE DE CALCUL n° 2,
PAR M. HILLERET.

...ue soit, au moment de l'observation, la position de l'astre par rapport au méridien ou au premier vertical.

...deux points *rapprochés* conjugués.

...e renvoi, les appendices pages 494 et 495.)

2me PARTIE DU PROBLÈME : Recherche du point *rapproché* correspondant à une deuxième observa...n, et déduit du premier point rapproché; puis détermination du point complet par ces deux points ...pprochés conjugués. (Voir n° 42 du texte.)

(... on prend comme pivot du calcul le point *rapproché* déduit de la première observation, et ramené d'ailleurs au lieu de la seconde.)

1° DONNÉES RELATIVES À LA 2e OBSERVATION.
$H'_i\odot = 51°01',5$
$M' = 8^h31^m25^s$
Heure de la montre du bord $= 10^h10^m$ du matin, le 22 déc. 1878.

2° CALCULS PRÉPARATOIRES.

...int estimé pour l'heure de la 2e observation, déduit des coordonnées du point rapproché correspondant à la 1re observation.

R	M	N^d	S^d	E^t	O^t
N 44° E^t	18,9	13,6	—	13,1	—
N 50° O^t	65,0	41,8	—	—	49,8
S 76° O^t	23,6	—	5,7	—	22,9
Route unique.		55,4	5,7	13,1	72,7
		$l =$ 49',7 N^d		$\varepsilon =$ 59',6 O^t	
N 50° O^t	77,6	$L_r = 54°27',4$ S^d		$g =$ 1°41',5 O^t	
				$G_r = 127°22',2$ E^t	
		$L'_e = 53°37',7$ S^d		$G'_e = 125°40',7$ E^t	

Calcul de l'heure approchée de Paris (1).

Heure de la montre $= 22^h10^m$ le 21 décembre.
G'_e en temps $= 8^h23^m$ E^t

...re approchée de Paris $= 13^h47^m$ le 21 décembre.

Calcul de l'heure exacte temps moyen de Paris.

$M' = 8^h31^m25^s$
$A' - M' = 5^h36^m40^s$
$T'p,m - A' = 11^h25^m18^s,8$ le 21 déc.

Heure approchée de Paris $= 13^h33^m23^s,8$

Marche diurne $m_A = 6^s,4$ av^ce p. p. p.	12^h	$-3^s,2$
	1^h	$-0^s,3$
	30^m	$-0^s,1$

$T'p,m = 13^h33^m20^s,2$ le 21 déc.

Correction de la 2e hauteur.

$H'_i\odot = 51°01',5$
$e = +\ 2',4$
$i = -\ 4',5$

$H'_a = 50°59',4$
$(R' - p') = -\ 0',7$
$d' = +16',3$

$H' = 51°15',0$

Calcul des éléments de la Connaissance des temps.

D⊙ à 0^h t. m. (2) de Paris, le 21 décembre $= 23°27'20'',8$ S^d
Différence moyenne (2) en une heure $= -0'',12$

p. p. p. T'p,m	13^h	$-1'',6$
	30^m	$-0'',1$

$D'\odot = 23°27',3$ S^d

—Éq. du temps à 0^h t. m. de Paris le 21 déc. (2) $= +1^m40^s,41$
Différence en 1 h^re $= -1^s,252$

p. p. p. T'p,m	12^h	$-15^s,04$
	1^h	$-1^s,25$
	33^m	$-0^s,69$

$-E' = +\ 1^m23^s,4$
$T'p,m = 13^h33^m20^s,2$

$T'p,v = 13^h34^m43^s,6$ (4) $= 203°40',9$

$G'_a = 156°19',1$ E^t (5)
$G'_e = 125°40',7$ E^t

$(G'_a - G'_e) = 30°38',4$ E^t
$P' = 30°38',4$ E^t (6)

3° MISE EN NOMBRE DES FORMULES.

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{\cos P'}{\operatorname{tg} D'}$$

$\operatorname{l.tg} D' = 0,36265$
$\operatorname{l.cos} P' = \bar{1},93469$

$\operatorname{l.tg}\varphi' = 0,29734$
$\varphi' = 63°14',5$ S^d (7)
$L'_e = 53°37',7$ S^d

$(L'_e+\varphi') = 116°52',2$ S^d (7)

$$\operatorname{tg} Z'_e = \frac{\operatorname{tg} P' \sin\varphi'}{\cos(L'_e+\varphi')}$$

$\operatorname{l.tg} P' = \bar{1},77260$

$\operatorname{l.sin}\varphi' = \bar{1},95081$

$\operatorname{col.cos}(L'_e+\varphi') = 0,34488$

$\operatorname{l.tg} Z'_e = 0,06829$
$Z'_e = $ N 49°29',2 E^t (8)

$$\operatorname{tg} H'_e = \operatorname{tg}(L'_e+\varphi')\cos Z'_e$$

$\operatorname{l.tg}(L'_e+\varphi') = 0,29526$

$\operatorname{l.cos} Z'_e = \bar{1},81265$

$\operatorname{l.tg} H'_e = 0,10791$
$H'_e = 52°02',8$ (9)
$H' = 51°15',0$

$(H' - H'_e) = -47',8$
$h' = 47^{mil},8$ (10)

...ECHERCHE *numérique* DES COORDONNÉES DU POINT OBSERVÉ N', *fig.* 44, AU MOMENT DE LA 2e OBSERVATION (16).

... $=$ 50',2 S^d
... $= 53°37',7$ S^d
... $= 54°27',9$ S^d

$\varepsilon =$ 20',0
$g =$ 34',0 O^t
$G'_e = 125°40',7$ E^t
$G' = 125°06',7$ E^t

$V' = $ S 49°,5 O^t (11)
$V_1 = $ S 21°,7 O^t (13)
$\alpha = $ 27°,8 (14)
$\dfrac{h'}{\cos\alpha} = c = +54^{mil},0$ (15)

...ota important. La recherche des coordonnées du point observé N', dont la détermination est le but final du calcul, ... s'effectuer *numériquement*, comme il est indiqué ci-dessus à gauche, ou *graphiquement*, ainsi qu'il est expliqué à la ... suivante. — Nous *recommandons* tout spécialement le procédé graphique. Il est préférable à la recherche numérique ...ne rapidité d'exécution, et surtout parce qu'il met à l'abri des erreurs possibles de signe inhérentes à ladite recherche, ...rs qui peuvent avoir les plus graves conséquences. — D'ailleurs il permet de laisser un peu de repos à l'esprit, fatigué par ...ntion qu'il vient d'apporter aux calculs logarithmiques.

Deuxième manière de terminer le Type de calcul n° 9.

Recherche *graphique* des coordonnées du point observé N′, *fig.* 44, au moment de la deuxième observation. — On marque sur la carte le point Z'_e, qui n'est autre que le point *rapproché* correspondant à la première observation, mais *ramené au moment de la deuxième observation*. On se sert pour cela des deux coordonnées de Z'_e :

$$L'_e = 53°37',7\ S^d,$$
$$G'_e = 125°40',7\ E^t.$$

Par le point ainsi placé, on trace, à l'aide d'un rapporteur, la droite de hauteur E_1D_1 du premier astre ramenée au moment de la deuxième observation, en faisant avec le parallèle un angle égal à 68°,3, qui est l'azimut calculé du premier astre. Le sens dans lequel doit être tracée cette droite E_1D_1, est indiqué à vue d'après la direction azimutale de l'astre lui-même, à laquelle elle est perpendiculaire. — Par le même point Z'_e, on trace une seconde ligne Z'_eR' faisant avec le méridien un angle égal à 49°,5, qui est l'azimut du second astre; on prend sur cette ligne une longueur Z'_eR' égale à $h'=47,8$ milles mesurés sur l'échelle des latitudes croissantes. On la porte ici dans le sens opposé à l'astre, parce que $(H'-H'_e)$ est *négatif*. Par le point R′ ainsi obtenu, on mène E′D′ perpendiculaire à Z'_eR'; et on a la seconde droite de hauteur. Le point d'intersection N′ des deux droites de hauteur E_1D_1 et E′D′, représente la position du navire au moment de la seconde observation. Il ne reste plus qu'à mesurer ses coordonnées sur la carte, pour avoir la latitude et la longitude du point observé.

Si la carte n'est pas à assez grand point et que l'on dispose de papier quadrillé (n° 40), on peut effectuer sur ce papier *toute* la construction précédente, en considérant les divisions du quadrillage comme représentant des milles de latitude croissante par le travers de la position du navire. On prendra au besoin le double de chaque division pour le mille croissant, suivant qu'on se trouvera par des latitudes élevées, et qu'on voudra avoir une échelle plus étendue pour les milles de longitude. Une fois le point N′ marqué, sa *latitude* se lit immédiatement en numérotant les parallèles à partir de celui de Z'_e dans le sens de la latitude, et en voyant quelles sont les deux lignes entre lesquelles tombe N′. Pour avoir la *longitude* de N′, on compte le nombre de milles et la fraction de mille, qui séparent son méridien du méridien de Z'_e. On convertit ensuite ce nombre de milles, qui est un chemin E.O, en minutes de longitude, en cherchant, dans la table de point, le chiffre de *la colonne des milles parcourus*, qui correspond à la latitude moyenne comme angle de route et audit nombre de milles comme chemin N.S. En ajoutant algébriquement ce changement en longitude à la longitude de Z'_e, on obtient la longitude de N′. — On pourrait encore, dans les opérations précédentes, prendre le *côté* du papier quadrillé pour représenter la minute de longitude. En pareil cas, le changement en longitude s'évaluerait tel quel; mais celui en latitude apprécié au moyen dudit côté devrait être converti en changement en latitude croissante, soit à l'aide de la table de point, soit à l'aide de la table des latitudes croissantes. Ce mode d'opérer offre l'avantage de conserver toujours la même longueur pour la minute de longitude.

Légende.

- Z_e point estimé du premier lieu d'observation.
- R point *rapproché* correspondant à la première observation.
- RZ'_e estime dans l'intervalle des deux observations.
- Z'_e point estimé du deuxième lieu d'observation, déduit du premier point *rapproché* R.
- R′ point *rapproché* correspondant à la deuxième observation, et déduit de Z'_e et par suite du premier point *rapproché* R, auquel il est ainsi contigu.

Fig. 44.

Légende (suite.)

- N′ point observé du navire au moment de la seconde observation: on l'obtient par la rencontre des deux droites de hauteur E_1D_1 et E′D′ menées par Z'_e et R′. La première E_1D_1 de ces droites, n'est autre que la droite de hauteur ED de la première observation transportée parallèlement à elle-même, et se trouve perpendiculaire à Z_eR. La seconde droite E′D′ se rapporte à la deuxième observation, et est perpendiculaire à Z'_eR'.

DE CALCUL
° 1 *bis*,
M. PERRIN.

MÉTHODE MARCQ SAINT-HILAIRE.

2° manière de résoudre le problème du Type de calcul n° 1.

Recherche du point rapproché correspondant à une observation, avec la hauteur estimée calculée par un sinus, et l'azimut estimé déduit des Tables de M. Perrin. (Voir n°s 4 et 12 du texte.)

1° MÊMES DONNÉES ET MÊMES CALCULS PRÉPARATOIRES QU'AU TYPE N° 1.

...SE EN NOMBRE DES FORMULES (4) ET (5) DU N° 4, AVEC $P=(G_a-G_e)$ OU $360°-(G_a-G_e)$, ET DE LA FORMULE EN *cotg Z* DU N° 12.

...calcul de l'angle auxiliaire φ ...même qu'au type n° 1.

$$\text{tg}\,\varphi=\frac{\cos P}{\text{tg}\,D}$$

col. tg D = 0,36265
l. cos P = $\bar{1}$,23967

l. tg φ = $\bar{1}$,60232
φ = 21°48',8 N^d
L_e = 54°42',9 S^d

$(L_e+\varphi)$ = 32°54',1 S^d

$$\sin H_e=\frac{\sin D}{\cos\varphi}\sin(L_e+\varphi)$$

l. sin D = $\bar{1}$,59990

col. cos φ = 0,03227

l. sin $(L_e+\varphi)$ = $\bar{1}$,73496

l. sin H_e = $\bar{1}$,36713
H_e = 13°28',0
H = 12°46',0

$(H-H_e)$ = − 42',0
h = 42^{mil},0

$$\text{cotg}\,Z_e=(p'+p'')\cos L_e$$

$$p'=\frac{\text{tg}\,D}{\sin P};\quad p''=-\frac{\text{tg}\,L_e}{\text{tg}\,P}$$

Tables de M. Perrin:
- tabl. I p' = −0',44 (1)
- tabl. II p'' = −0',24 (1)
- p = −0',68
- tabl. III Z_e = S 68°,4 E^t (2)

V = N 68°,4 O^t

(1) Les signes des quantités p' et p'' sont donnés au haut de chaque page des tables où on trouve ces quantités.

(2) On prend toujours $Z_e < 90°$; et on le compte du pôle indiqué par la règle inscrite au haut de chaque page de la table qui donne l'azimut.

...ECHERCHE DES COORDONNÉES DU POINT RAPPROCHÉ.

...tte recherche est la même que ... le type n° 1.

15',5 N^d	E =	39',0 O^t
54°42',9 S^d	g =	67',1 O^t
54°27',4 S^d	G_e =	128°29',3 E^t
	G_r =	127°22',2 E^t

Comparaison du TYPE N° 1 *bis* avec le TYPE N° 1.

Le TYPE N° 1 *bis*, substituant un *sinus* à une *tangente* pour le calcul de la hauteur estimée H_e, rend plus sensible sur celle-ci l'influence des erreurs afférentes aux éléments P et D, ainsi que l'influence des quantités négligées en arrondissant les angles et en prenant les logarithmes largement. En revanche, il est beaucoup plus expéditif que le TYPE N° 1, et offre moins de chances de faute dans les calculs, parce qu'il ne fait pas dépendre H_e de l'angle Z_e déduit déjà de l'auxiliaire φ. — D'ailleurs, son infériorité au point de vue du calcul de H_e, ne se fait sentir que pour des valeurs de H_e de 75° à 80° et au-dessus, alors que, à une unité du 5e ordre dans l. sin H_e, correspond une erreur de 20'' à 30'' sur H_e. Au surplus, dans cette dernière hypothèse, pour avoir la hauteur avec exactitude, il suffirait d'employer six décimales dans le calcul de sin H_e; enfin, on en prendrait sept, si la hauteur estimée H_e devait dépasser 88°.

DE CALCUL
1 *ter*,
. ROUYAUX.

MÉTHODE MARCQ SAINT-HILAIRE.

2° manière de résoudre le problème du Type de calcul n° 1.

Recherche du point rapproché correspondant à une observation, avec la hauteur estimée calculée par un sinus naturel ou un su-cosinus verse, et l'azimut estimé déduit des Tables de M. Perrin. (Voir n°s 4 et 12 du texte.)

1° MÊMES DONNÉES ET MÊMES CALCULS PRÉPARATOIRES QU'AU TYPE N° 1.

2° MISE EN NOMBRE DES FORMULES.

si $H_e=\sin L_e\sin D+\cos L_e\cos D\cos P$.

...4°42',9 S^d	l. sin L_e = $\bar{1}$,91184	l. cos L_e = $\bar{1}$,76166
...3°27',3 S^d	l. sin D = $\bar{1}$,59990	l. cos D = $\bar{1}$,96255
	l. sin L_e sin D = $\bar{1}$,51174	l. cos P = $\bar{1}$,23967

...Nombre correspondant S_1 = 0,32489 (1)
l. cos L_e cos D cos P = $\bar{2}$,96388
Nombre correspondant S_2 = 0,09202 (1)
S_1 = 0,32489

(2) sin $H_e=(S_1\pm S_2)$ = 0,23287 (4)
(3) ou su-cos verse $H_e=1+(S_1\pm S_2)$ = 1,23287
H_e = 13°28',0
H = 12°46',0

$(H-H_e)$ = − 42',0
h = 42^{mil},0

(1) S'obtient avec une table de logarithmes des nombres.
(2) Cette solution s'emploie quand on dispose de tables de lignes *naturelles*.
(3) Cette solution s'emploie quand on ne dispose que d'une table de lignes *verses*, Guépratte par exemple.
(4) On fait la *somme* (S_1+S_2) si P < 6^h, L et D de même nom; P > 6^h, L et D de noms contraires.
On fait la *différence* (S_1-S_2) si P < 6^h, L et D de noms contraires; P > 6^h, L et D de même nom.

Le calcul de l'angle Z_e est le même qu'au type n° 1 *bis*.

$$\text{cotg}\,Z_e=(p'+p'')\cos L_e$$

$$p'=\frac{\text{tg}\,D}{\sin P};\quad p''=-\frac{\text{tg}\,L_e}{\text{tg}\,P}$$

Tables de M. Perrin:
- tabl. I p' = −0',44 (5)
- tabl. II p'' = −0',24 (5)
- p = −0',68
- tabl. III Z_e = S 68°,4 E^t (6)

V = N 68°,4 O^t

(5) Les signes des quantités p' et p'' sont donnés au haut de chaque page des tables où on trouve ces quantités.
(6) On prend toujours Z_e < 90°; et on le compte du pôle indiqué par la règle inscrite au haut de chaque page de la table qui donne l'azimut.

...HERCHE DES COORDONNÉES ...U POINT RAPPROCHÉ.

... recherche est la même ...s le type n° 1.

15',5 N^d	E =	39',0 O^t
...42',9 S^d	g =	67',1 O^t
...27',4 S^d	G_e =	128°29',3 E^t
	G_r =	127°22',2 E^t

Comparaison du TYPE N° 1 *ter* avec le TYPE N° 1.

Le TYPE N° 1 *ter*, substituant un *sinus naturel* ou un *su-cosinus verse* à une *tangente* pour le calcul de la hauteur estimée H_e, rend plus sensible sur celle-ci l'influence des erreurs afférentes aux éléments P et D, ainsi que l'influence des quantités négligées en arrondissant les angles et en prenant les logarithmes largement. En revanche il est beaucoup plus expéditif que le TYPE N° 1, et offre moins de chances de faute dans les calculs, parce qu'il n'emploie aucun angle auxil^{re}. — D'ailleurs, son infériorité au point de vue de la détermination de H_e ne se fait sentir que pour des valeurs de la hauteur de 83° à 85° et au-dessus, lorsque, à une unité du 5e ordre dans sin H_e ou su-cos verse H_e, correspond une erreur de 20'' à 30'' sur He. Au surplus, les tables de Guépratte donnant les lignes *naturelles* avec 6 décimales, lorsque la hauteur sera très-grande, il suffira d'effectuer les calculs précédents avec 6 décimales dans les logarithmes; de la sorte on pourra obtenir H_e à une demi-minute jusqu'à près de 89°,5.

Nota important. Cette méthode ne souffre aucune exception, c'est-à-dire qu'elle est applicable quelle q[ue]… (Voir, pour les explications correspond[antes]…

Détermination du point observé par deux point[s]…

(Ici on prend comme pivot du second calcul le point *estimé* même du premier calcul, et non, com[me]…

1° DONNÉES RELATIVES A LA 1re OBSERVATION.
- Hauteur instrumentale $H_i\odot = 12°36',0$
- Heure du compteur $M = 3^h42^m41^s$
- Hre approchée du bord (donnée par la montre de timonerie) $= 5^h20^m$ du matin, le 22 décembre 187[illegible].

2° CALCULS PRÉPARATOIRES.

Point estimé pour l'heure de la 1re observation, déduit du point observé précédent.

$\mathcal{V}$ (corrigé de la variation et de la dérive.)	M	N^d	S^d	E^t	O^t
N 59°,5 O^t	33,3	16,9	—	—	28,8
N 15°,3 E^t	60,2	58,1	—	15,9	—
S 6°,5 E^t	69,9	—	69,4	—	7,9
		75,0	69,4	15,9	36,7

$l = 5',6$ N^d $L_1 = 54°48',5$ S^d $L_e = 54°42',9$ S^d $^1/_2(L_1+L_e) = 54°45',7$ S^d

$\varepsilon = 20',8$ O^t $g = 26',0$ O^t $G_1 = 128°55',3$ E^t $G_e = 128°29',3$ E^t

Calcul de l'heure approchée de Paris (1).

Heure de la montre du bord 17^h20^m le 21 déc.
G_e en temps $= 8^h34^m$ E^t
Heure approchée de Paris $= 8^h46^m$ le 21 déc.

Calcul de l'heure exacte temps moyen de Paris.

Compteur $M = 3^h42^m41^s$
Retard du comptr sur le chron. A $= A - M = 5^h36^m35^s,8$
Retard du chronom. A sur Paris $= T_{p,m} - A = 11^h25^m18^s,8$ le 21 déc.
Heure approchée de Paris $= 8^h44^m35^s,6$
Marche diurne $m_A = 6^s,4$ avance.
p. p. p. (presque toujours négligeable à la mer.) 8^h $-2^s,1$; 45^m $-0^s,2$
Heure de Paris $T_{p,m} = 8^h44^m33^s,3$ le 21 déc.

Correctio[n] de la hauteur.

$H_i\odot$ Hauteur instrumentale $=$ 12°3[illegible]
e Erreur instrumentale $=$ +[illegible]
i Dépression $=$ −[illegible]
H_a Hauteur apparente $=$ 12°3[illegible]
$(R-p)$ Réfract. moins parallaxe $=$ −[illegible]
d 1/2 diamètre $=$ +[illegible]
H Hauteur vraie du centre $=$ 12°4[illegible]

Calcul des éléments de la Connaissance des temps.

$D\odot$ à 0^h t. m. de Paris, 21 déc. (2) $= 23°27'20'',8$ S^d
Différence moyenne (3) en une heure $= -0'',12$.
p. p. p $T_{p,m}$ 8^h $-1'',0$; 45^m $-0'',1$
$D\odot = 23°27',3$ S^d

—Éq. du temps à 0^h t. m. de Paris le 21 déc. (2) $= +1^m40^s,1$[illegible]
Différ. en 1 hre $= -1^s,2$[illegible]
p. p. p. $T_{p,m}$ 8^h $-10^s,0$[illegible] ; 45^m $-0^s,9$[illegible]
$-E = +1^m29^s,5$
$T_{p,m} = 8^h44^m33^s,3$
$T_{p,v} =$ [illegible]
$G_a =$ 131°3[illegible]
$G_e =$ 128°29',3 E[illegible]
$(G_a - G_e) =$ [illegible]
$P =$ [illegible]

3° MISE EN NOMBRE DES FORMULES (6), (7) ET (8) DU N° 4, AVEC $P = (G_a - G_e)$, OU $360° - (G_a - G_e)$.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos P}{\operatorname{tg} D}$$

col. tg D $= 0,36265$
l. cos P $= \bar{1},23967$
l. tg φ $= \bar{1},60232$
φ $= 21°48',8$ N^d (7)
$L_e = 54°42',9$ S^d
$(L_e + \varphi) = 32°54',1$ S^d (7)

$$\operatorname{tg} Z_e = \frac{\operatorname{tg} P \sin\varphi}{\cos(L_e+\varphi)}$$

l. tg P $= 0,75368$
l. sin φ $= \bar{1},57004$
col. cos $(L_e+\varphi) = 0,07592$
l. tg $Z_e = 0,39964$
$Z_e = $ S 68°16',5 E^t (8)

$$\operatorname{tg} H_e = \operatorname{tg}(L_e+\varphi)\cos Z_e$$

l. tg $(L_e+\varphi) = \bar{1},81086$
l. cos $Z_e = \bar{1},56838$
l. tg $H_e = \bar{1},37924$
$H_e = 13°28',0$ (9)
$H = 12°46',0$
$(H - H_e) = -42',0$
$h = +42^{mil},0$ (10)

4° CALCUL DES COORDONNÉES DU POINT RAPPROCHÉ R (12), *fig.* 45.

$l = 15',5$ N^d
$L_e = 54°42',9$ S^d
$L_r = 54°27',4$ S^d

$\varepsilon = 39',0$ O^t
$g = 67',1$ O^t
$G_e = 128°29',3$ E^t
$G_r = 127°22',2$ E^t

V $=$ N 68°,3 O^t (11)

Fig. 45.

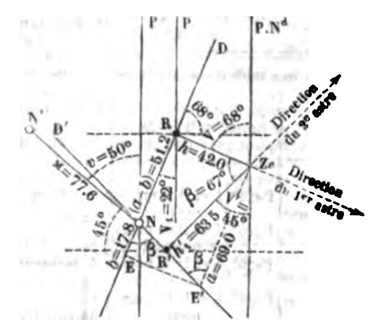
Légende.

Z_e point estimé du premier lieu d'observation.

R point *rapproché* correspondant à la première observation.

R' point *rapproché* correspondant à la deuxième observation ramenée au zénith de la première. Ce point est ici, d'après son mode de détermination, INDÉPENDANT du premier point *rapproché*.

N point observé du navire au mo-



Légende (suite).

ment de la première observation : on l'obtient par la rencontre des deux droites de hauteur ED, E'D' menées par R et R', et qui naturellement sont respectivement perpendiculaires à Z_eR, Z_eR'.

NN' estime dans l'intervalle des deux observations.

N' point observé du navire lors de la deuxième observatio[n]



ILAIRE (AUTRE SOLUTION GÉNÉRALE).

it, au moment de l'observation, la position de l'astre par rapport au méridien ou au premier vertical.
ux chiffres de renvoi, l'APPENDICE page 592.)

rapprochés INDÉPENDANTS. (Voir n° 42 du texte.)

ns l'autre solution donnée aux types n°s 1 et 2, le point *rapproché* obtenu par ce premier calcul.)

5° DONNÉES RELATIVES A LA 2° OBSERVATION.
- $H'_i\odot = 51°01',5$
- $M' = 8^h31^m25^s$
- Heure de la montre du bord $= 10^h10^m$ du matin, le 22 décembre 1878
- Relèvement vrai de l'astre $Z' = $ N 50° E^t.

6° CALCULS PRÉPARATOIRES.

Point estimé pour l'heure de la 2° observation, duit du point estimé précédent (13).

?	M	N^d	S^d	E^t	O^t
44° E^t	18,9	13,6	—	13,1	—
50° O^t	65,0	41,8	—	—	49,8
76° O^t	23,6	—	5,7	—	22,9
ute unique		55,4	5,7	13,1	72,7
		$l=$ 49',7 N^d		$E=$	59',6 O^t
50° O^t	77,6	$L_e=$54°42',9 S^d		$g=$	1°42',2 O^t
				$G_e=$128°29',3 E^t	
		$L'_e=$53°53',2 S^d		$G'_e=$126°47',1 E^t	

Calcul de l'heure approchée de Paris (1).

Heure de la montre $= 22^h10^m$ le 21 déc.
G'_e en temps $= 8^h27^m$ E^t
Heure approchée de Paris $= 13^h43^m$ le 21 déc.

Calcul de l'heure exacte temps moyen de Paris.

$M' = 8^h31^m25^s$
$A' - M' = 5^h36^m40^s$
$T'p,m - A' = 11^h25^m18^s,8$ le 21 déc.

Heure approchée de Paris $= 13^h33^m23^s,8$

Marche diurne $m_A = 6^s,4$ av^ce

p. p. p. $\{12^h$ — $3^s,2$; 1^h — $0^s,3$; 30^m — $0^s,1$

$T'p,m = 13^h33^m20^s,2$ le 21 déc.

Correction de la 2° hauteur et réduction (n° 39) au zénith de la 1re, en tenant compte du terme de second ordre (14).

$H'_i\odot = 51°01',5$
$e = +\ 2',4$
$i = -\ 4',5$
$H'_a = 50°59',4$
$(R'-p') = -\ 0',7$
$d' = +\ 16',3$
$H' = 51°15',0$
$m\cos\omega = +\ 13',5$
$\Delta H' = -\ 1',1$
$H'_1 = 51°27',4$

$Z' = $ N 50° E^t (15)
$v' = $ S 50° E^t (16)
$\omega = 80°$ (17)
$m = 78,0$
$m\sin\omega = 76,8$ (18)

$\Delta H' = \frac{1}{2} m^2 \sin^2\omega \operatorname{tg} H' \sin 1'$ (19)

l. 76,8 = {1,8854; 1,8854
l. tg H' = 0,0955
l sin 1' = $\bar{4}$,4637
l. 2ΔH' = 0,3300
2ΔH' = —2',14

Calcul des éléments de la Connaissance des temps.

D⊙ à 0^h t. m. de Paris le 21 décembre (2) $= 23°27'20'',8$ S^d
Différ. moyenne (3) en 1 h^re = —0'',12
p. p. p. $T'p,m$ {13^h —1'',6; 30^m —0'',1}
$D'\odot = 23°27',3$ S^d

— Éq. du temps à 0^h t. m. de Paris le 21 déc. (3) = $+1^m40^s,41$
Différence en 1 heure = $-1^s,253$
p. p. p. $T'p,m$ {12^h —15^s,04; 1^h —1^s,25; 33^m —0^s,69}
$-E' = +1^m23^s,4$
$T'p,m = 13^h33^m20^s,2$
$T'p,v = \{13^h34^m43^s,6$ (4); 203°40',9
$G'_a = 156°19',1$ E^t (5)
$G_e = 128°29',3$ E^t
$(G'_a - G_e) = 27°49',8$ E^t
$P' = 27°49',8$ E^t (6)

7° MISE EN NOMBRE DES FORMULES.

$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{\cos P'}{\operatorname{tg} D'}$

l. tg D' = 0,36265
l. cos P' = $\bar{1}$,94662
l. tg φ' = 0,30927
φ' = 63°52',0 S^d (7)
L_e = 54°42',9 S^d
$(L_e + \varphi')$ = 118°34',9 S^d (7)

$\operatorname{tg} Z'_e = \frac{\operatorname{tg} P' \sin\varphi'}{\cos(L_e+\varphi')}$

l. tg P' = $\bar{1}$,72254
l. sin φ' = $\bar{1}$,95317
col. cos$(L_e+\varphi')$ = 0,32018
l. tg Z'_e = $\bar{1}$,99589
Z'_e = N 44°43',7 E^t (8)

$V' = $ S 44°,7 O^t (11)

$\operatorname{tg} H'_e = \operatorname{tg}(L_e+\varphi')\cos Z'_e$

l. tg$(L_e+\varphi')$ = 0,26373
l. cos Z'_e = $\bar{1}$,85153
l. tg H'_e = 0,11526
H'_e = 52°30',9 (9)
H'_1 = 51°27',4
$(H'_1 - H'_e) = -63',5$
$h'_1 = +\ 63,5$ (10)

CALCUL DES COORDONNÉES DU POINT RAPPROCHÉ R', *fig.* 45.

=	45',1 S^d	$E=$	44',7 O^t
=	54°42',9 S^d	$g=$	78',0 O^t
		$G_e=$	128°29',3 E^t
=	55°28',0 S^d	$G'_r=$	127°11',3 E^t

calcul n'est utile que pour la recherche oint N', soit par le deuxième procédé *hique*, employé à la page 503, soit par ode B de recherche *numérique* donnée page 504.

Nota important. La recherche des coordonnées du point observé N', *fig.* 45, dont la détermination est le but final du calcul, peut s'effectuer NUMÉRIQUEMENT, comme il est indiqué ci-contre à gauche, ou GRAPHIQUEMENT, ainsi qu'il est expliqué page 503 ci-après. — Nous *recommandons* tout spécialement le procédé graphique. Il est préférable à la recherche numérique comme rapidité d'exécution, et surtout parce qu'il met à l'abri des erreurs possibles de signe inhérentes à ladite recherche, erreurs qui peuvent avoir les plus graves conséquences. D'ailleurs, il permet de laisser un peu de repos à l'esprit, fatigué par l'attention qu'il vient d'apporter aux calculs logarithmiques.

RECHERCHE *numérique* DES COORDONNÉES DU POINT OBSERVÉ N', *fig.* 45, DU NAVIRE AU MOMENT DE LA 2° OBSERVATION (25) : MODE A.

(Voir deux autres MODES B et C de cette recherche page 504 plus loin.)

Mise en nombre des formules données au n° 42 sous la rubrique 2° moyen.

$= \frac{h'_1}{\sin\beta} = +69^{mil},0$ (21)

$= \frac{h}{\operatorname{tg}\beta} = +17^{mil},8$ (22)

$(a-b) = +51^{mil},2$ (23)

$V' = $ S 44°,7 O^t
$V = $ N 68°,3 O^t. . . .
β = 67°,0 (20)
$V_1 = $ S 22°,0 O^t (24). . .
$v = $ N 50°,0 O^t. . . .

$h'_1 = 63^{mil},5$
. . . . $h = 42^{mil},0$.
. (a—b) = 51^mil,2.
. . . M = 77^mil,6.

Changement en latitude.	*Chemin* E. O.
. . . . de Z_e en R, 15',5 N^d	. . . . 39',0 O^t
. . . . de R en N, 47',5 S^d	. . . . 19',2 O^t
. . . . de N en N', 49',7 N^d	. . . . 59',6 O^t
de Z_e en N', $l=$ 17',7 N^d	. . . . E = 117',8 O^t
L_e = 54°42',9 S^d	$g=$ 3°23',4 O^t
	G_e = 128°29',3 E^t
L' = 54°25',2 S^d	G' = 125°05',9 E^t

ta. Les valeurs actuelles de L' et G' diffèrent un peu, comme il fallait s'y attendre, s les valeurs trouvées par la première solution, que fournit la réunion des TYPES n°s 1 D'ailleurs, le point correspondant rigoureusement aux données devrait être :

L' = 54°26' S^d,
G' = 125°03' E^t.

Appendice au Type de calcul n° 2, ci-avant.

Explications correspondant aux divers chiffres de renvoi marqués dans le cours du type.

Les 11 premiers renvois sont expliqués dans l'appendice propre au type de calcul n° 1, page 494.

(12) N'existe pas dans le présent type.

(13) Ce point estimé a pour but de trouver la route unique (N. 50° 0' dans l'exemple choisi), et le nombre de milles ($M = 78^{mil},0$) parcourus à cette route dans l'intervalle des observations.

(14) Il nous semble ici préférable de ramener la deuxième hauteur au lieu de la première; parce que, dans l'intervalle des observations, on pourra effectuer complétement le calcul du premier point rapproché, ce qui aura l'avantage de diviser la besogne en deux séances de calcul à peu près égales. (Voir à ce sujet le n° 39.)

(15) Cet azimut est obtenu par un relèvement de l'astre au moment de la 2ᵉ observation; on corrige le relèvement magnétique de la variation (supposée connue), ce qui donne l'azimut vrai Z'.

(16) v' représente le relèvement directement opposé à la route moyenne suivie dans l'intervalle des observations; en d'autres termes, c'est la route qu'il faudrait suivre pour aller du deuxième lieu d'observation au premier.

(17) ω représente l'angle aigu ou obtus compris entre les deux relèvements Z' et v'.

(18) la 1ʳᵉ correction $M \cos \omega$ est $\begin{cases} \text{additive} & \text{si } \omega < 90°, \\ \text{soustractive} & \text{si } \omega > 90°. \end{cases}$

(19) La 2ᵉ correction $\frac{1}{2} M^2 \sin^2 \omega \operatorname{tg} H' \sin 1'$ est toujours soustractive; elle est d'ordinaire négligeable. On peut en obtenir une valeur suffisamment approchée dans la pratique à l'aide de la table de point, et en remarquant que $\frac{1}{2} \sin 1' = 0{,}00015$ environ.

(20) β est l'angle aigu ou obtus compris entre l'angle V relatif à la première observation, et l'angle analogue V' relatif à la seconde observation.

(21) La longueur a s'obtient par la table de point : on y entre avec β comme angle de route, et h'_1 comme chemin E.O; a se trouve dans la colonne des milles. Le résultat est *toujours pris positivement.*

(22) La longueur b s'obtient par la *table de point :* on y entre avec β comme angle de route, h comme chemin E.O; b se trouve dans la colonne N.S. Le résultat est pris :

$$\begin{cases} \text{positivement, si } \beta \text{ est } < 90°, \\ \text{négativement, si } \beta \text{ est } > 90°. \end{cases}$$

(23) $(a - b)$ est la différence algébrique des deux longueurs a et b.

(24) V_1 est le relèvement perpendiculaire au relèvement V. On choisit d'ailleurs *la direction* formant un angle $\begin{cases} \text{aigu} \\ \text{obtus} \end{cases}$ avec V', si $\begin{cases} (a-b) \text{ est positif,} \\ (a-b) \text{ est négatif.} \end{cases}$

(25) Le point observé (L', G') lors de la 2ᵉ observation s'obtient finalement par un calcul de point estimé. On prend (L_e, G_e) comme point de départ; les routes parcourues sont successivement (V, h), $(V_1, (a - b))$, auxquelles il faut ajouter l'estime (v, M) dans l'intervalle des deux observations.



Deuxième manière de terminer le Type de calcul n° 3.

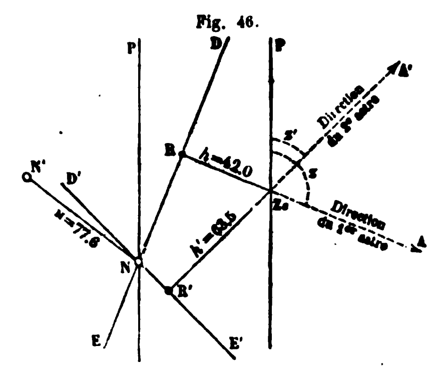
RECHERCHE *graphique* DES COORDONNÉES DU POINT OBSERVÉ N', *fig.* 46, DU NAVIRE AU MOMENT DE LA DEUXIÈME OBSERVATION. (Voir le *nota important* intercalé dans le TYPE DE CALCUL N° 3.)

1er *Procédé.* — On marque sur la carte le point estimé Z_e, à l'aide de ses deux coordonnées :

$$L_e = 54° 42',9 \ S^d,$$
$$G_e = 128° 29',3 \ E^t.$$

Par le point Z_e, on trace, à l'aide d'un rapporteur, les directions des deux astres en faisant, avec le méridien et dans le sens convenable, des angles, z et z', égaux à 68°,3 et 44°,7, qui sont leurs azimuts respectifs. Sur la direction du premier astre, on prend une longueur Z_eR égale à h=42,0 milles mesurés sur l'échelle des *latitudes croissantes*, par le travers du point Z_e; on la porte dans le sens opposé à l'astre, parce que (H—H_e) est *négatif*. Par le point R ainsi obtenu, on mène ED perpendiculaire à Z_eR; et on a ainsi la première droite de hauteur. — De même, sur la direction azimutale du second astre, on prend h'_1=63,5 milles mesurés sur l'échelle des *latitudes croissantes;* et on les porte encore en sens contraire de l'astre, parce que (H'_1—H'_e) est aussi *négatif*. Puis, par le point R', on mène E'D' perpendiculaire à Z_eR'; et on a ainsi la deuxième droite de hauteur *ramenée au moment de la première observation.* — Le point d'intersection N des deux droites de hauteur représente la position du navire au moment de la première observation. En menant par ce point une longueur NN' égale en grandeur et en direction au chemin (v=N 50°O^t, m=77^{mil},6) parcouru dans l'intervalle des deux stations, on a en N' la position du navire au moment de la deuxième observation. Il ne reste plus qu'à mesurer ses coordonnées sur la carte, pour avoir la latitude et la longitude du point observé.

Fig. 46.



Si l'on n'a pas une carte à assez grand point et que l'on dispose de PAPIER QUADRILLÉ (n° 40), on peut encore effectuer *toute* la construction précédente, en considérant les divisions simples (ou doubles) du quadrillage comme représentant des milles de latitude croissante par le travers de la position du navire. — Une fois le point N' tracé, sa *latitude* se lit immédiatement en comptant à partir de Z_e les interlignes horizontaux dans le sens même de la latitude, et en voyant quels sont les deux parallèles entre lesquels tombe N'. — Pour avoir sa *longitude*, il suffit de compter le nombre de milles et fraction de mille qui séparent son méridien du méridien de Z_e. On convertit ensuite ce nombre de milles en minutes de longitude, en cherchant dans la *table de point*, le chiffre de la *colonne des milles* qui correspond à la latitude moyenne comme angle de route, et audit nombre de milles comme chemin N.S. En ajoutant algébriquement ce changement en longitude à la longitude de Z_e, on obtient la longitude de N'.

2° *Procédé.* — On peut abréger la construction précédente en calculant les coordonnées de R et de R', qui ne sont pas nécessaires pour le premier procédé. Il suffit alors de marquer sur la carte les deux points R et R' à l'aide de leurs coordonnées; puis par chacun de ces points on mène une droite ED, E'D' formant avec le parallèle un angle égal à l'azimut respectif de chaque astre. Pour éviter toute indécision, il est bon de rappeler que chacune de ces droites doit être perpendiculaire à la direction azimutale de l'astre correspondant. — Le point d'intersection N donne la position du navire au moment de la première observation; on en déduit ensuite N' comme dans le premier procédé.

Si l'on opère sur du PAPIER QUADRILLÉ, il faut préalablement convertir en chemin E.O la différence en longitude des deux points R et R'. Ceci se fait en cherchant ledit chemin dans la *colonne* N.S de la *table de point*, où on entre avec la latitude moyenne comme angle de route et le changement en longitude comme nombre de milles. On marque alors les points R et R' sur la feuille de papier, en les séparant : 1° par un intervalle en latitude évalué avec le côté du quadrillage (ou le double de ce côté), et pris égal au nombre de milles de leur différence en latitude; 2° par un intervalle en longitude égal au nombre de milles du chemin E.O trouvé plus haut. — Il ne reste plus dès lors qu'à mener par R et R' les deux droites de hauteur ED et E'D'. Une fois leur intersection N obtenue, on achève le problème comme dans le *premier procédé*, effectué sur papier quadrillé.

On pourrait, dans l'opération précédente, évaluer le changement en longitude directement avec le côté du quadrillage. — Le changement en latitude devrait alors être converti en changement en latitude croissante, avant d'être mesuré à l'aide dudit côté.

Troisième manière de terminer le Type de calcul n° 8.

RECHERCHE *numérique* DES COORDONNÉES DU POINT OBSERVÉ N', *fig.* 45, DU NAVIRE AU MOMENT DE LA 2e OBSERVATION : MODE B. (Le mode A est donné au bas dudit type.)

Mise en nombre des formules données au n° 42 du texte sous la rubrique 1er moyen.

(L_r, $L_{c,r}$ et G_r se rapportent au point R ; et L'_r, $L'_{c,r}$ et G'_r au point R'. De leur côté, l_c et g sont les changements en latitude croissante et en longitude pour aller de R à N. D'ailleurs, les divers éléments dont il s'agit suivent, pour leurs signes, les conventions de la légende générale page 1 du texte.)

$$l_c = \frac{(G_r - G'_r) - (L_{c,r} - L'_{c,r})\,\mathrm{tg}\,R'}{\mathrm{tg}\,R' - \mathrm{tg}\,R}$$

$$g = l_c\,\mathrm{tg}\,R$$

(Le pôle élevé est ici le pôle Sd).

(1) $\begin{cases} R' = N\ 45°,3\ O^t = +134°,7 \\ R = S\ 21°,7\ O^t = +\ 21°,7 \end{cases}$

$G_r = 127°22',2$ Et
$G'_r = 127°11',3$ Et
$(G_r - G'_r) = -\ 10',9$ Et

$L_{c,r} = 3911',5$ Sd
$L'_{c,r} = 4017',1$ Sd (2)
$(L_{c,r} - L'_{c,r}) = +105',6$ Nd

$\mathrm{tg}\,R' = -1,010$
$-\mathrm{tg}\,R = -0,398$ (4)
$\mathrm{tg}\,R' - \mathrm{tg}\,R = -1,408$

$-106',7 \ldots\ -(L'_{c,r} - L_{c,r})\,\mathrm{tg}\,R' = -106',7$ (3)

Somme algébrique $= -117',6$

$$l_c = \frac{-117.6}{-1,408} = +83,5$$

$l = 47',9$ Sd (5)

de R à N, $l =$ 47',9 Sd
de N à N', $l =$ 49',7 Nd
de R à N', $l =$ 1',8 Nd
$L_r = 54°27',4$ Sd
$L' = 54°25',6$ Sd

$g = 33,2$ Ot (6)

de R à N, $g =$ 33',2 Ot
de N à N', $g =$ 1°42',2 Ot
de R à N', $g =$ 2°15',4 Ot
$G_r = 127°22',2$ Et
$G' = 125°06',8$ Et

(1) Les angles de route R et R' sont les *compléments* des azimuts Z_e et Z'_e. Leurs dénominations s'obtiennent au moyen d'une figure faite à main levée. On les compte ensuite à partir du pôle *élevé* : + à l'Ouest, — à l'Est.
(2) Se prend dans une *table de latitudes croissantes*, en y entrant avec L'_r ou L_r.
(3) Se prend dans la *table de point*, colonne E.O, en y entrant avec R' comme angle de route, et $(L'_{c,r} - L_{c,r})$ comme chemin N.S.
(4) Se prend dans la *table de point*, colonne E.O, en y entrant avec R' ou R comme angle de route, et 100 comme chemin N.S ; puis en divisant le résultat par 100.
(5) S'obtient dans la *table de point*, colonne N.S, en y entrant avec la latitude moyenne comme angle de route, et l_c comme nombre de milles.
(6) Se trouve dans la *table de point*, colonne E.O, en y entrant avec R comme angle de route, et l_c comme chemin N.S.

Quatrième manière de terminer le type de calcul n° 8.

RECHERCHE *numérique* DES COORDONNÉES DU POINT OBSERVÉ N', *fig.* 45, DU NAVIRE AU MOMENT DE LA 2e OBSERVATION : MODE C.

Mise en nombre des formules données au n° 42 du texte sous la rubrique 2me moyen.

(ΔL_e et ΔG_e sont les changements en latitude et en longitude entre Z_e et N. Ils suivent, pour leurs signes, les conventions de la légende générale page 1 du texte.)

$$\Delta L_e = \frac{(H - H_e)\sin z' - (H'_1 - H'_e)\sin z}{\sin(z' - z)}$$

$$\Delta G_e \cos L = E = -\frac{(H - H_e)\cos z' - (H'_1 - H'_e)\cos z}{\sin(z' - z)}$$

$(H - H_e) = -42',0$
$z' = S\ 135°,3$ Et
$z' = -135°,3$ (1)
$z = -\ 68°,3$
$(z' - z) = -\ 67°,0$

(le pôle élevé est ici le pôle Sd).

$(H'_1 - H'_e) = -63',5$
$z = S\ 68°,3$ Et
$z = -68°,3$ (1)

$(H - H_e)\sin z' = +29,5$ (2)
$(H - H_e)\cos z' = +29,8$ (3)

$(H'_1 - H'_e)\sin z = +59,0$ (2)
$(H'_1 - H'_e)\cos z = -23,5$ (3)

$$\Delta L_e = \frac{+29,5 - 59,0}{\sin(-67°)} = \frac{-29,5}{\sin(-67°)} = +32,0\ (4)$$

$$E = -\frac{+29,8 + 23,5}{\sin(-67°)} = -\frac{53,3}{\sin(-67°)} = +57,9\ (4)$$

de Z_e à N, $\Delta L_e = l =$ 32',0 Sd
de N à N', $l =$ 49',7 Nd
de Z_e à N', $l =$ 17',7 Nd
$L_e = 54°42',9$ Sd
$L' = 54°25',2$ Sd

de Z_e à N, $\Delta G_e = g =$ 1°41',0 Ot
de N à N', $g =$ 1°42',2 Ot (5)
de Z_e à N', $g =$ 3°23',2 Ot
$G_e = 128°29',3$ Et
$G' = 125°06',1$ Et

(1) Les azimuts z et z' se comptent de 0° à 180° à partir du pôle élevé. Ils sont + à l'Ouest, et — à l'Est.
(2) Se prend dans la *table de point*, *colonne* E.O, en y entrant avec z' ou z comme angle de route, et avec $(H - H_e)$ ou $(H'_1 - H'_e)$ comme nombre de milles.
(3) Se prend dans la *table de point*, *colonne* N.S, en y entrant avec z' ou z comme angle de route, et $(H - H_e)$ ou $(H'_1 - H'_e)$ comme nombre de milles.
(4) Se prend dans la *table de point*, *colonne des milles*, en y entrant avec $(z' - z)$ comme angle de route, et le numérateur de la fraction comme chemin E.O.
(5) Se prend dans la *table de point*, *colonne des milles*, en y entrant avec la latitude moyenne comme angle de route, et E comme chemin N.S.

TYPE DE CALCUL
n° 4,
PAR M. PERRIN.

MÉTHODE LALANDE-PAGEL.

Détermination du point observé par la latitude estimée et deux calculs d'angle horaire (voir n° 43 du Texte), avec les coefficients g_1 et g'_1 déterminés au moyen des différences logarithmiques.

Nota important. Cette méthode cesse d'être recommandable dès que l'une des observations se rapproche du méridien, en dedans des limites qui résultent des indications du n° 44.

Les deux observations ont été faites ici dans l'*Est* du méridien. Pour les conventions relatives aux signes des divers éléments, le ecteur devra se reporter à la légende générale de la page 1 du texte.

1° MÊMES DONNÉES ET MÊMES CALCULS PRÉPARATOIRES QU'AUX TYPES N° 1 ET N° 2.

Première station.	*Estime dans l'intervalle.*	*Deuxième station.*
$H = 12°46',0$		$H' = 51°15',0$
$L_e = 54°42',9$ Sᵈ	$l = 49',7$ Nᵈ	$(L+l) = L'_e = 53°53',2$ Sᵈ
$D = 23°27',3$ Sᵈ	$g = 1°41',5$ Oᵗ	$D' = 23°27',3$ Sᵈ

2° CALCULS D'ANGLE HORAIRE, ET DÉTERMINATION DES COEFFICIENTS g_1 ET g'_1. (VOIR Nᵒˢ 2 ET 12 DU TEXTE.)

$H = 12°46',0$			$H' = 51°15',0$		
$L_e = 54°42',9$	col. cos $= 0,23834$	$+595 = +2d'$	$L'_e = 53°53',2$	col. cos $= 0,22960$	$+577 = +2d'$
$\Delta = 66°32',7$	col. sin $= 0,03746$		$\Delta' = 66°32',7$	col. sin $= 0,03746$	
$2S = 134°01',6$			$2S' = 171°40',9$		
$S = 67°00',8$	l. cos $= \bar{1},59163$	$-496 = -d''$	$S' = 85°50',4$	l. cos $= \bar{2},86056$	$-2895 = -d''$
$S - H = 54°14',8$	l. sin $= \bar{1},90931$	$+152 = +d'''$	$S' - H' = 34°35',4$	l. sin $= \bar{1},75412$	$+306 = +d'''$
	$\bar{1},77674$	$+251 = (2d' - d'' + d''')$		$\bar{2},88174$	$-2012 = (2d' - d'' + d''')$
	l. sin $\frac{1}{2}P = \bar{1},88837$	$+345 = +2d$		l. sin $\frac{1}{2}P' = \bar{1},44087$	$+1467 = +2d$

$1/2\, P = 50°30',3$

P en temps $= 6^h45^m14^s,4$ $+251 \,|\, +345$; $950 \,|\, +0',73 = g_1$ (1)

$T_v = 17^h14^m45^s,6$

$T_{p,v} = 8^h46^m02^s,8$

$G_1 = 8^h28^m42^s,8$ $Z = S\ 67°,2$ Eᵗ (2)

$G_1 = 127°10',7$ Eᵗ

$1/2\, P' = 16°01',2$

P' en temps $= 2^h08^m09^s,6$ $-2012 \,|\, +1467$; $5450 \,|\, -1',37 = g'_1$ (1) ; 10490 ; 221

$T'_v = 21^h51^m50^s,4$

$T'_{p,v} = 13^h34^m43^s,6$

$G'_1 = 8^h17^m06^s,8$ $Z' = N\ 51°,1$ Eᵗ (2)

$G'_1 = 124°16',7$ Eᵗ

(1) g_1 et g'_1 sont ici de même signe que les quantités de l'espèce $\frac{(2d' - d'' + d''')}{2d}$; car chaque observation a eu lieu dans l'Est.

(2) *Ces* deux azimuts se calculent, d'après la première formule du n° 13, à l'aide de g_1 et g'_1 convertis en temps et changés de ne ; puis pris pour entrer, avec la latitude, dans la *table* 11 des TABLES NAUTIQUES de M. Labrosse. On peut, avec plus de ilité, les déduire de la *table* III des TABLES de M. Perrin, où il suffit d'entrer avec L et g_1 ou g'_1 changés de signe *seulement*, qui évite deux conversions de degrés en temps. En tous cas, il est bon de prévenir que la connaissance des signes des valeurs g_1 et de g'_1 n'est pas indispensable pour fixer les noms des azimuts; car on sait toujours si on a observé dans l'Est ou dans l'Ouest. La détermination desdits azimuts est utile quand on se propose d'achever le problème *graphiquement*, en traçant les deux droites hauteur par la méthode des *tangentes*. Lorsqu'on veut éviter, suivant les indications de la *remarque importante* du bas de 3°, de romper dans la partie finale du calcul, pour les signes de g_1 et g'_1 et les noms de $\Delta L'_e$ et $\Delta G'_1$, les azimuts qu'on a alors à emyer peuvent être simplement obtenus par des relèvements au moment des observations, au moins quand l'astre n'est pas trop s du méridien ou du premier vertical, auquel cas lesdits azimuts ont besoin d'être déterminés plus rigoureusement.

RECHERCHE *numérique* DES COORDONNÉES DU POINT OBSERVÉ N', *fig.* 47, AU MOMENT DE LA DEUXIÈME OBSERVATION, AU MOYEN DES FORMULES (26 *bis*) ET (28 *bis*) DU N° 43.

$$L = (L_e + l) + 1' \times \overbrace{\frac{[G'_1 - (G_1 + g)]}{(g_1 - g'_1)}}^{(\Delta L_e + l) = \Delta L'_e =}; \qquad G = G'_1 + g'_1 \times \overbrace{\frac{[G'_1 - (G_1 + g)]}{(g_1 - g'_1)}}^{\Delta G'_1 =}.$$

$G_1 = 127°10',7$ Eᵗ

$g = 1°41',5$ Oᵗ

$(G_1 + g) = 125°29',2$ Eᵗ

$G'_1 = 124°16',7$ Eᵗ

$- (G_1 + g)] = + 1°12',5 = 72',5$

$+ l) = L'_e = 53°53',2$ Sᵈ

$\Delta L'_e = 34',5$ Sᵈ

$L = 54°27',7$ Sᵈ

$g_1 = + 0',73$

$g'_1 = - 1',37$

$(g_1 - g'_1) = + 2',10$

$G'_1 = 124°16',7$ Eᵗ

$\Delta G'_1 = 47',3$ E.

$G = 123°04',0$ Eᵗ

$[G'_1 - (G + g)] = + 72',5 \,|\, +2',10 = (g_1 - g'_1)$

9',50 $\,|\, +34',5 = \Delta L'_e$

1',100

50

$+ 34',5$

$- 1',37$

2415

1035

345

$-47',265 = \Delta G'_1$

emarque importante. La *recherche* précédente ne laisse pas que d'être assez délicate à cause des *signes* à donner à g_1 et t **des noms** à attribuer à $\Delta L'_e$ et $\Delta G'_1$. Aussi beaucoup de praticiens préfèrent-ils, pour ne pas avoir à se préoccuper des **ignes et** noms, recourir à la règle suivante, qui est manifeste par elle-même :

trace à main levée un triangle, tel que $B_1B'N'$, *fig.* 48, où la ligne B_1B' représente le parallèle contenant les deux points $(G_1 + g)]$ et (L'_e, G'_1), qu'on marque d'ailleurs à une distance l'un de l'autre arbitraire, mais suffisamment grande; et où, **re part,** les côtés B_1N' et $B'N'$ sont les deux droites de hauteur déduites rapidement de Z et de Z'. — Cela terminé, on fait ab- **ion des** signes des coefficients g_1 et g'_1; et on *ajoute* ou on retranche entre elles leurs valeurs absolues suivant que les angles **et B' sont** *aigus*, ou que l'un d'eux est obtus; ou, si on préfère, suivant que la perpendiculaire N'K à B_1B' se trouve en ***r ou en*** dehors du triangle. On calcule alors $\Delta L'_e$ et $\Delta G'_1$, ainsi qu'il est indiqué plus haut. Enfin on attribue à $\Delta L'_e$ et $\Delta G'_1$ **ms qui** résultent, d'une manière évidente, de la position du sommet N' du triangle sus-mentionné par rapport au point B'.

près la règle précédente, il faut, dans notre exemple, additionner entre elles les valeurs absolues de g_1 et g'_1; car les deux **en B_1** et B' sont aigus. D'autre part, $\Delta L'_e$ est Sᵈ; car N' tombe en dessous du parallèle B_1B'. Enfin $\Delta G'_1$ est Eᵗ; car N' se **à droite** de B'.

TYPE DE CALCUL
N° 4 *bis*.
PAR M. PERRIN.

MÉTHODE LALANDE-PAGEL.

Détermination du point observé par la latitude estimée et deux calculs d'angle horaire (voir n° 42 du Texte), avec les coefficients g_1 et g'_1 déterminés au moyen des Tables de M. Perrin.

Nota important. Cette méthode cesse d'être recommandable dès que l'une des observations se rapproche du méridien, en dedans des limites qui résultent des indications du n° 44, modifiées toutefois en raison de ce que lesdites *tables* ne donnent (n° 13) qu'une valeur approchée du *coefficient* Pagel. — Par ailleurs, il importe de dire que l'usage de ces mêmes *tables*, qui est très-commode et très-rapide aux environs du 1er vertical, devient laborieux à mesure qu'on se rapproche du méridien, à cause de la nécessité où on se trouve alors d'interpoler, quand les éléments d'entrée sont intermédiaires à ceux des *tables*.

En tout état de cause, pour les conventions relatives aux signes des divers éléments, le lecteur devra se reporter à la légende générale de la page 1 du texte.

1° MÊMES DONNÉES ET MÊMES CALCULS PRÉPARATOIRES QU'AUX TYPES N° 1 ET N° 2.

Première station.	*Estime dans l'intervalle.*	*Deuxième station.*
$H=12°46',0$	$l=$ 49',7 N^d	$H'=51°15',0$
$L_e=54°42',9$ S^d	$g=1°41',5$ O^t	$L'_e=53°53',2$ S^d
$D=23°27',3$ S^d		$D'=23°27',3$ S^d

Les deux observations ont été faites ici à l'Est du méridien.

2° CALCULS D'ANGLE HORAIRE, ET DÉTERMINATION DES COEFFICIENTS g_1 ET g'_1. (VOIR N°s 2 ET 13 DU TEXTE.)

		Tables de M. Perrin.
$H=12°46',0$		
$L_e=54°42',9$	col. cos $=0,23834$	
$\Delta=66°32',7$	col. sin $=0,03746$	
$2S=134°01',6$		
$S=67°00',8$	l. cos $=\bar{1},59163$	table I $p'=-0',44$
$S-H=54°14',8$	l. sin $=\bar{1},90931$	table II $p''=-0',29$
	$\bar{1},77674$	$-g_1=p=-0',73$ (1)
	l. sin $\frac{1}{2}P=\bar{1},88837$	table III $Z=$ S 67°,2 E^t (2)
	$1/2\ P=50°39',3$	
	P en temps $=6^h45^m14^s,4$	
	$Tv=17^h14^m45^s,6$	
	$Tp,v=8^h46^m02^s,8$	
	$G_1=8^h28^m42^s,8$	
	$G_1=127°10',7$ E^t	
	$g=1°41',5$ O^t	
	$(G_1+g)=125°29',2$ E^t	

		Tables de M. Perrin.
$H'=51°15',0$		
$L'_e=53°53',2$	col. cos $=0,22960$	
$\Delta'=66°32',7$	col. sin $=0,03746$	
$2S'=171°40',9$		
$S'=85°50',4$	l. cos $=\bar{2},86056$	table I $p'=-0',82$
$S'-H'=34°35',4$	l. sin $=\bar{1},75412$	table II $p''=+2',19$
	$\bar{2},88174$	$-g'_1=p=+1',37$ (1)
	l. sin $\frac{1}{2}P'=\bar{1},44087$	table III $Z'=$ N 51°,1 E^t (2)
	$1/2\ P'=16°01',2$	
	P' en temps $=2^h08^m09^s,6$	
	$T'v=21^h51^m50^s,4$	
	$T'p,v=13^h34^m43^s,6$	
	$G'_1=8^h17^m06^s,8$	
	$G'_1=124°16',7$ E^t	

(1) g_1 ou g'_1, est toujours de signe contraire à p, tel qu'il résulte des *tables* de M. Perrin (n° 13).

(2) La connaissance des azimuts *calculés* est surtout nécessaire pour le tracé des droites de hauteur par le procédé de la tangente. Mais ces azimuts peuvent aussi être utilisés comme il est expliqué dans la *remarque importante* donnée au bas du type précédent.

3° RECHERCHE *numérique* DES COORDONNÉES DU POINT OBSERVÉ N', *fig.* 47, AU MOMENT DE LA DEUXIÈME OBSERVATION, AU MOYEN DES FORMULES (26 *bis*) ET (28 *bis*) DU N° 43.

Cette recherche s'effectue au moyen des coefficients g_1 et g'_1, ainsi qu'il est indiqué au TYPE DE CALCUL N° 4. Comme la marche à suivre est exactement la même, nous n'avons ici aucun renseignement nouveau à ajouter.

AMÉLIORATIONS DE LA MÉTHODE LALANDE-PAGEL.

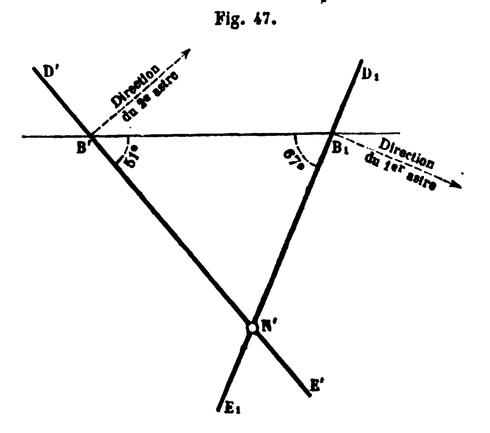
Deuxième manière de terminer le Type de calcul n° 4 ou 4 *bis*.

RECHERCHE *graphique* DES COORDONNÉES DU POINT OBSERVÉ N', *fig.* 47, AU MOMENT DE LA DEUXIÈME OBSERVATION, PAR LES DROITES DE HAUTEUR CONSIDÉRÉES COMME TANGENTES (N°s 10 ET 40).

Le navire s'étant déplacé dans l'intervalle des observations, la première droite de hauteur doit être transportée parallèlement à elle-même d'une quantité égale au chemin estimé. Au lieu de passer par le point dont les coordonnées sont $L_e=54°\ 42',9$ S^d et $G_1=127°\ 10',7$ E^t, elle passe par le point B_1, *fig.* 47, ayant pour latitude $(L_e+l)=53°\ 53',2$ S^d et pour longitude $(G_1+g)=125°\ 29',2$ E^t. Par ce point B_1 on trace, à l'aide d'un rapporteur, la droite E_1D_1, en faisant avec le parallèle un angle égal à 67°,2, qui est l'azimut de la première observation; et on a ainsi la première droite de hauteur *ramenée au moment de la deuxième observation*, selon l'habitude courante en navigation. Pour éviter toute indécision sur le sens dans lequel doit être menée cette droite, il suffit de se rappeler qu'elle est perpendiculaire à la direction azimutale de l'astre. — Quant à la seconde droite de hauteur, elle passe par le point B' ayant pour latitude $(L_e+l)=L'_e=53°53',2$ S^d, c'est-à-dire la même latitude que B_1, et pour longitude $G'_1=124°\ 16',7$ E^t. Par ce point B' on fait avec le parallèle un angle de 51°,1, qui est l'azimut de la deuxième observation; et on a ainsi la seconde droite de hauteur. — Le point d'intersection N' des deux droites de hauteur représente

la position du navire au moment de la deuxième observation. Il ne reste plus qu'à en mesurer les coordonnées sur la carte pour avoir la latitude et la longitude du point observé.

Fig. 47.



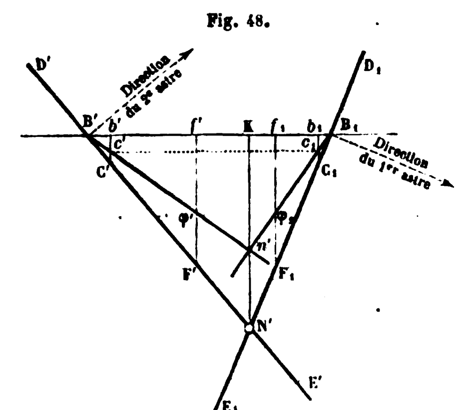
Si l'on n'a pas une carte à assez grand point, et que l'on veuille effectuer la construction précédente sur du *papier quadrillé*, il faut préalablement convertir en chemin E.O la différence en longitude des deux points B_1 et B'_1, comme il est indiqué dans la recherche *graphique* du point observé à la DEUXIÈME MANIÈRE DE TERMINER LE TYPE DE CALCUL N° 3, page 503. On achève ensuite les opérations d'une façon analogue. — En pratique, la construction sur papier quadrillé sera à la fois plus simple et plus rapide, si l'on emploie le procédé que nous donnons immédiatement ci-après.

Troisième manière de terminer le Type de calcul n° 4 ou 4 *bis*.

RECHERCHE DES COORDONNÉES DU POINT OBSERVÉ N', *fig.* 48, AU MOMENT DE LA DEUXIÈME OBSERVATION, PAR LA *résolution graphique* DES ÉQUATIONS (25 *bis*) ET (27 *bis*) DU N° 43.

On trace sur le papier quadrillé, *fig.* 48, une ligne horizontale $B'B_1$ qui représente le *parallèle* de latitude $(L_e+l)=L'_e$ employée dans le deuxième calcul d'angle horaire. On marque sur cette ligne le point B_1 correspondant à la longitude (G_1+g), qui représente la première longitude *ramenée au moment de la deuxième observation;* on marque pareillement le point B' correspondant à la longitude G'_1 du deuxième calcul. Ces deux points B_1 et B' sont d'ailleurs séparés entre eux par un nombre de divisions du quadrillage égal au nombre de minutes de leur différence en longitude. — Cela fait, on prend sur la ligne B_1B' une longueur B_1b_1 comprenant un nombre de divisions et fractions de division égal à g_1,

Fig. 48.



cette longueur étant portée dans l'*Ouest* si g_1 est *positif*, et dans l'Est si g_1 est négatif. Puis on prend, dans le sens de l'accroissement des latitudes, c'est-à-dire *au-dessus* de $B'B_1$ si la latitude est *Nord*, au-dessous dans le cas contraire, comme dans notre exemple, une longueur b_1c_1 égale à 1 division du quadrillage; en joignant B_1 et c_1 on a une première droite B_1c_1. De même, en prenant, dans le sens convenable, $B'b'=g'_1$ et $b'c'=1$ division, on a une seconde droite $B'c'$. — Avant d'aller plus loin, il importe de dire qu'en pratique, pour déterminer avec plus de précision la direction de ces droites, il faut multiplier toutes les longueurs B_1b_1, b_1c_1, $B'b'$, $b'c'$, par un même facteur constant tel que 5, 10, 20,..., suivant l'échelle de construction. Ainsi, sur notre figure, on portera successivement $B_1f_1=5g_1$, et $f_1\varphi_1=5$ divisions; $B'f'=5g'_1$, et $f'\varphi'=5$ divisions. — Il faut aussi remarquer que si on craint de se tromper pour les signes de g_1 et g'_1, et qu'on connaisse les azimuts, on peut tracer les deux droites de hauteur D_1E_1 et D'E'. Dès lors, sans se préoccuper desdits signes, on porte les longueurs B_1f_1 et $B'f'$ en *dedans* ou en dehors de la base du triangle $B_1B'N'$, suivant que l'angle correspondant B_1 ou B' du triangle est *aigu* ou obtus.

En tout état de cause, si du point d'intersection n' des droites B_1c_1 et $B'c'$, on abaisse la perpendiculaire $n'K$ sur B_1B', les triangles semblables B_1Kn' et $B_1b_1c_1$, d'une part; $B'Kn'$ et $B'b'c'$, d'autre part, donnent les proportions:

$$\frac{n'K}{b_1c_1}=\frac{B_1K}{B_1b_1};\quad \frac{n'K}{b'c'}=\frac{B'K}{B'b'}.$$

Mais par construction $b_1c_1 = b'c' = 1$ division, on peut donc écrire :

$$\frac{n'K}{1} = \frac{B_1K}{B_1b_1} = \frac{B'K}{B'b'} = \frac{B_1B'}{(B_1b_1 + B'b')}$$

Nous tirerons de là les deux relations :

$$n'K = 1 \times \frac{B_1B'}{(B_1b_1 + B'b')}; \quad B'K = B'b' \times \frac{n'K}{1}.$$

Or B_1B' est évidemment égal à $[G'_1 - (G_1 + g)]$ d'après la construction même. D'autre part, g_1 et g'_1 étant de signes contraires dans notre exemple, la somme $(B_1b_1 + B'b')$ représente la différence algébrique $(g_1 - g'_1)$. On tire donc de la première des deux relations ci-dessus :

$$n'K = \frac{[G'_1 - (G_1 + g)]}{(g_1 - g'_1)} = \Delta(L_e + l) = \Delta L'_e \qquad (25\ bis);$$

Par conséquent, en comptant le nombre de divisions contenues dans $n'K$, on aura la différence en latitude du point observé avec la latitude L'_e. — De son côté, la longueur $B'K$ est donnée par la seconde des deux relations sus-mentionnées, d'où l'on tire :

$$B'K = g'_1 \times \frac{n'K}{1} = g'_1 \times \frac{[G'_1 - (G_1 + g)]}{(g_1 - g'_1)} = \Delta G'_1 \qquad (27\ bis).$$

Il n'y a donc qu'à compter le nombre de divisions et la fraction de division contenues dans $B'K$, pour avoir la différence en longitude $\Delta G'_1$ du point observé N' au point B', déduit du deuxième calcul d'angle horaire.

En pratique, on lit immédiatement sur la construction même les coordonnées du point observé. Il suffit pour cela de numéroter les divisions du quadrillage à partir du point B', tant dans le sens de la latitude que dans celui de la longitude, en prenant pour points de départ la latitude et la longitude mêmes de B'.

On ne saurait trop insister sur ce que les deux droites B_1n' et $B'n'$, dont nous venons de nous servir, ne sont ni des *tangentes* ni des *sécantes de hauteur* (nos 10 et 11). Elles n'offrent aucune signification de cette sorte. Elles résultent de la *résolution graphique* de deux équations (25 *bis*) et (27 *bis*) à deux inconnues $\Delta(L_e + l)$ et $\Delta G'_1$, en regardant chacune de ces équations comme celle d'une desdites droites. Au surplus, ainsi que cela résulte de la *recherche* qui suit immédiatement, le point d'intersection n' se trouve toujours sur le même méridien que la position même du navire N', mais plus près que cette dernière de B_1B', d'une quantité égale à la différence entre les longueurs en minutes de l'équateur et en milles croissants de la distance entre N' et B_1B'.

Quatrième manière de terminer le Type de calcul n° 4 ou 4 *bis*.

RECHERCHE *graphique* DES COORDONNÉES DU POINT OBSERVÉ N', *fig.* 48, AU MOMENT DE LA 2e OBSERVATION, PAR LES DROITES DE HAUTEUR CONSIDÉRÉES COMME SÉCANTES (nos 11 et 40).

On trace sur la carte le parallèle de 53°53',2 Sd, qui représente la latitude employée dans le deuxième calcul d'angle horaire. Puis, on marque sur ce parallèle le point B_1 correspondant à la longitude $(G_1 + g)$, qui représente la première longitude ramenée au lieu de la seconde; on marque de même le point B' correspondant à la deuxième longitude G'_1. — Pour avoir la sécante de hauteur passant par le point B_1, il suffirait à la rigueur de prendre, dans le sens convenable, B_1b_1 égal à g_1, et b_1C_1 égal à 1' de *latitude croissante*. Mais ces quantités étant trop petites pour permettre de tracer la droite avec exactitude, on les multiplie par un même facteur 5, 10, 20...., et l'on prend par exemple $B_1f_1 = 5g_1$ en minutes de l'équateur, et $f_1F_1 = 5$ *milles croissants*. En joignant les points B_1 et F_1, on a la première sécante de hauteur E_1D_1 *ramenée au moment de la deuxième observation*. On trace d'une façon analogue, avec le coefficient g'_1, la seconde sécante de hauteur E'D', qui passe par le point B', c'est-à-dire qu'on porte $B'f' = 5g'_1$ en minutes de l'équateur, et $f'F' = 5$ *milles croissants*. — Le point d'intersection N' de ces deux droites représente la position du navire au moment de la seconde observation. Il ne reste plus qu'à en mesurer les coordonnées sur la carte, pour avoir la latitude et la longitude du point observé.

Comme on le voit aisément, ce procédé diffère de la construction graphique précédente en ce que les longueurs f_1F_1, $f'F'$ sont évaluées en *milles croissants*, au lieu d'être mesurées avec l'échelle employée pour les longitudes. Il en résulte, comme nous l'avons annoncé il y a un instant, que les sécantes de hauteur E_1D_1, E'D', et les droites B_1c_1, $B'c'$, doivent se couper respectivement sur la même verticale N'K, qui n'est autre que le méridien du point observé.

Remarque applicable à toutes les différentes manières de terminer les Types de calcul n° 1 à 4 *bis*.

Appréciation, au moyen du tableau I de la fin de l'ouvrage, de l'erreur commise, en substituant des droites aux courbes de hauteur dans toutes les différentes espèces de recherches précédentes, soit *numériques*, soit *graphiques*, du point observé.

La distance entre le point observé obtenu par l'un ou l'autre des TYPES DE CALCUL N°ˢ 1 à 4 *bis*, et chacun des points déterminatifs des droites de hauteur, peut être assez considérable. Par exemple, dans le type n° 4 ou 4 *bis*, elle atteint 64 *minutes de l'équateur* pour le point B_1, et 75 environ de ces mêmes *minutes* pour le point B'. Il est intéressant, en pareil cas, de rechercher si ces droites se confondent *pratiquement* avec les courbes de hauteur.

Dans notre exemple, il en est ainsi pour la première droite. En effet, P étant ici égal à 101°, et Z à 67°, on voit qu'en valeur absolue le rapport $\left(\frac{tg\, P}{sin\, Z}\right) = \rho = \left(\frac{tg\,(79° = 180° - 101°)}{sin\, 67°}\right)$ est beaucoup plus grand que $2,98 = \left(\frac{tg\, 70°}{sin\, 67°}\right)$, limite extrême fournie par la *table* I des TABLES de M. Perrin. Or, pour un rayon $\rho = 2,98$ et pour une corde de 64 minutes de l'équateur, le TABLEAU I de la fin de l'ouvrage montre que la flèche n'atteint que 0',20, quantité tout à fait négligeable. Donc, *à fortiori*, il n'existe pas, pour la première droite de hauteur, d'écart sensible avec la courbe correspondante. — Mais pour la seconde droite, il n'en est pas de même. Et effectivement, avec $P' = 32°,0$ et $Z' = 51°,1$, prenons dans la *table* I précitée, la valeur numérique du rapport $\left(\frac{tg\, P'}{sin\, Z'}\right) = \rho'$, nous trouverons ainsi 0,81. Avec ce dernier nombre, on voit, dans notre TABLEAU I sus-mentionné, que pour une corde de 70 minutes de l'équateur, la flèche de la courbe est de 0',88; et que, pour une corde de 80 minutes, cette flèche atteint 1',15, ce qui donne pour 75' une flèche de 1',01. Or ce dernier chiffre n'est pas négligeable; et il y a lieu de tenir compte de l'écart de la seconde droite de hauteur avec la courbe de hauteur.

A cet effet, si on a opéré soit *numériquement*, soit suivant la *troisième manière* ci-dessus, on recommence les calculs avec la latitude qu'on vient d'obtenir. Et le mieux pour cela est d'avoir recours au procédé expéditif indiqué au n° 205, en y faisant $\Delta H = 0$. — Si on a opéré *graphiquement* avec des droites de hauteur, on marque sur la deuxième droite E'D', *fig.* 48, qui est seule erronée dans notre exemple, les points situés à 70 et à 80 *minutes de l'équateur* du point déterminatif B'. Par ces points, on mène à ladite droite des perpendiculaires, sur lesquelles on prend, *dans le sens de l'astre, parce qu'ici* $P' < 6^h$, des longueurs respectivement égales aux flèches 0',88 et 1',15, mesurées en *minutes de l'équateur*. On joint les extrémités des perpendiculaires; et on a ainsi la portion (considérée comme rectiligne) de la courbe de hauteur qui avoisine le point N'. En prenant le point d'intersection de la deuxième droite de hauteur ainsi modifiée, avec la première droite de hauteur conservée telle quelle on trouve pour coordonnées du point observé *rectifié :*

$$L' = 54°\,26',5\ S^d,$$
$$G' = 125°\,04',5\ E^t.$$

Le dernier mode de rectification que nous venons d'indiquer correspond, en définitive, à la prise en considération des termes du second ordre dans l'expression en série de chaque courbe de hauteur du navire.

TYPE DE CALCUL
N° 5.
PAR M. LEDIEU.

MÉTHODE ALLEMANDE RÉCENTE

pour la détermination directe du point observé par calcul semi-logarithmique et semi-arithmétique.

(Voir n° 53 du Texte.)

Solution par deux hauteurs d'astres quelconques.

Nota important. Il faudra faire la plus grande attention, dans les calculs suivants, à appliquer rigoureusement les conventions de signes de la légende page 1 du texte. On devra, en outre, à l'aide de l'estime, commencer par fixer le *nom de la latitude*, afin d'en déduire le *signe de la déclinaison*. Dans notre exemple, elle est *Nord*. — Par ailleurs, tout le long du calcul, on a écrit, à droite de chaque logarithme, quand besoin était, *le signe* qui revient au nombre qui lui correspond.

1° DONNÉES DU PROBLÈME ET CALCULS PRÉPARATOIRES.

1re hauteur $H = 50°03',6$
2e hauteur $H' = 83°33',0$
1re Décl^{on} $D = +20°10',9$ N^d
2e Décl^{on} $D' = +\ 8°22',3$ N^d

Les déclinaisons sont *positives*; car elles sont de *même* nom que la latitude estimée.

$T_{p,m} = 10^h05^m08^s,0$
$Æ_m = 6^h03^m17^s,0$
$Æ_a = 14^h06^m59^s,7$

$T_{p,a} = T_{p,m} + (Æ_m - Æ_a) = 2^h01^m25^s,3$

$T'_{p,m} = 1$[illegible]
$Æ'_m = $ [illegible]
$Æ'_a = 19^h41^m$[illegible]

$T'_{p,a} = T'_{p,m} + (Æ'_m - Æ'_a) = $ [illegible]

formule (29) $d = [T_{p,m} + Æ_m - Æ_a] - [T'_{p,m} + Æ'_m - Æ'_a] + 24$[illegible]

$d = +\ 5^h05^m05^s,5$

d'où $\frac{d}{2} = +\ 2^h32^m32^s,8$

2° CALCUL DE LA LATITUDE.

MISE EN NOMBRE DES FORMULES INDIQUÉES CI-APRÈS.

formule (30)
$l.\sin H = \bar{1},88464+$
$col.\cos D = 0,02752+$
$l.u = \bar{1},91216+$
$u = +0,81688$
$(u+v) = +1,37550$
$\frac{(u+v)}{2} = +0,68775$

formule (31)
$l.\sin H' = \bar{1},74246+$
$col.\cos D' = 0,00466+$
$l.v = \bar{1},74712+$
$v = +0,55862$
$(u-v) = +0,25826$
$\frac{(u-v)}{2} = +0,12913$

formule (36)
$l.\frac{(u+v)}{2} = \bar{1},83743+$
$col.\cos\frac{d}{2} = 0,10428+$
$l.a = \bar{1},94171+$
$l.a^2 = \bar{1},88342$
$a^2 = 0,76458$

formule (37)
$l.\frac{(u-v)}{2} = \bar{1},11103+$
$col.\sin\frac{d}{2} = 0,20934+$
$l.a' = \bar{1},32037+$
$l.a'^2 = \bar{2},64074$
$a'^2 = 0,04373$
$(1 - a^2 - a'^2) = +0,19169$

formule (38)
$(D+D') = 28°33',2$
$l.\sin(D+D') = \bar{1},67948+$
$col.\cos D = 0,02752+$
$col.\cos D' = 0,00466+$
$col.\cos\frac{d}{2} = 0,10428+$
$col.2 = \bar{1},69897$
$l.b = \bar{1},51491+$
$l.b^2 = \bar{1},02982$
$b^2 = 0,10711$

formule (39)
$(D-D') = 11°48',6$
$l.\sin(D-D') = \bar{1},31089+$
$col.\sin D = 0,02752+$
$col.\sin D' = 0,00466+$
$col.\sin\frac{d}{2} = 0,20934+$
$col.2 = \bar{1},69897$
$l.b' = \bar{1},25138+$
$l.b'^2 = \bar{2},50276$
$b'^2 = 0,03182$
$(1 + b^2 + b'^2) = +1,13893$

formule (42)
$l.(ab + a'b') = \bar{1},50983+$
$col.(1 + b^2 + b'^2) = \bar{1},94350+$
$l.Q = \bar{1},45333+$
$l.Q^2 = \bar{2},90666$

$l.ab = \bar{1},45662+$
$l.a'b' = \bar{2},57175+$
$ab = +0,28617$
$a'b' = +0,03730$
$(ab + a'b') = +0,32347$

formule (44)
$Q = +0,28400$
$+\sqrt{Q^2+q}$ (1) $= +0,49898$
$\sin L_1 = +0,78298$
$l.\sin L_1 = \bar{1},89375+$
$L_1 = 51°32',0$ N^d

formule (43)
$l.(1 - a^2 - a'^2) = \bar{1},28260+$
$col.(1 + b^2 + b'^2) = \bar{1},94350+$
$l.q = \bar{1},22610+$
$q = +0,16831$
$Q^2 = +0,08066$
$Q^2 + q = +0,24897$
$l.(Q^2 + q) = \bar{1},39614$
$l.\sqrt{Q^2+q} = \bar{1},69807$

(1) Il faut prendre ici le *radical* avec le signe +, afin d'avoir une racine *positive*; puisque, conformément aux conventions du n° 53 du texte, les formules supposent que la latitude est *positive*. Il aurait pu se faire du reste que le *radical* pris avec le signe — donnât une deuxième solution positive. On aurait alors pris celle des deux solutions cadrant le mieux avec l'estime, eu tenu compte des présomptions sur l'influence des courants.

3° CALCUL DE LA LONGITUDE.

MISE EN NOMBRE DE LA FORMULE (45).

$l.b' = \bar{1},25138+$
$l.\sin L_1 = \bar{1},89375+$
$l.b'\sin L_1 = \bar{1},14513+$
$-b'\sin L_1 = -0,1397$
$a' = +0,2091$
$(a' - b'\sin L_1) = +0,0694$

$l.b = \bar{1},51491+$
$l.\sin L_1 = \bar{1},89375+$
$l.b\sin L_1 = \bar{1},40866+$
$-b\sin L_1 = -0,2562$
$a = +0,8744$
$(a - b\sin L_1) = +0,6182$

$col.(a - b\sin L_1) = 0,20887+$
$l.(a' - b'\sin L_1) = \bar{2},84136+$
$l.tg\left(\frac{d}{2} - P\right) = \bar{1},05023+$

$\left(\frac{d}{2} - P\right) = +\ 0^h25^m37^s,3$
$\frac{d}{2} = +\ 2^h32^m32^s,8$
$P = +\ 2^h06^m55^s,5$

$T_a = 2^h06^m55^s,5$
$T_{p,a} = (T_a + G) = 2^h01^m25^s,3$

$(T_a + G - T_a) = G = \left\{ \begin{array}{l} -\ 0^h05^m30^s,2 \\ \text{ou}\quad 1°22',5\ \text{E} \end{array} \right.$

TYPE DE CALCUL N° 6, [de] M. HILLERET.

MÉTHODE ALLEMANDE RÉCENTE
pour la détermination directe du point observé par calcul semi-logarithmique et semi-arithmétique.
(Voir n° 52 du Texte.)

Solution par deux hauteurs du Soleil.

Nota important. Il faudra faire la plus grande attention, dans les calculs suivants, à appliquer rigoureusement les conventions de signe de la légende page 1 du texte. On devra, en outre, à l'aide de l'estime, commencer par fixer le *nom de la latitude*, [e]n d'en déduire le *signe de la déclinaison*. Dans notre exemple elle est S^d. — Par ailleurs, tout le long du calcul, on a écrit à droite [de] chaque logarithme, quand besoin était, le signe qui revient au nombre qui lui correspond.
L'exemple ci-dessous se rapporte au cas traité dans les TYPES DE CALCUL n°s 1, 2 et 3.

1° DONNÉES DU PROBLÈME ET CALCULS PRÉPARATOIRES.

1re hauteur H = 12°46′,0
2e hauteur H′ = 51°27′,4
Elle est positive; car elle [est] de même nom que la lat^{de}. } Déclinaison D = + 23°27′,3 S^d

$T_{p,m} = 8^h44^m33^s,3$
— Équation du temps, $-E = + 1^m29^s,5$
$T_{p,v} = 8^h46^m02^s,8$

$T'_{p,m} = 13^h33^m20^s,2$
$-E' = + 1^m23^s,4$
$T'_{p,v} = 13^h34^m43^s,6$

Équation (29 *bis*). $d = T_{p,v} - T'_{p,v}$
$d = -4^h48^m40^s,8$
$\frac{d}{2} = -2^h24^m20^s,4$

2° CALCUL DE LA LATITUDE.

MISE EN NOMBRE DES FORMULES.

(30 *bis*).
l. sin H = $\bar{1}$,34436 +
col. cos D = 0,03745 +
l. u = $\bar{1}$,38181 +
u = + 0,2409
$(u+v)$ = + 1,0935
$\frac{(u+v)}{2}$ = + 0,54675

Formule (31 *bis*).
l. sin H′ = $\bar{1}$,89328 +
col. cos D′ = 0,03745 +
l. v = $\bar{1}$,93073 +
v = + 0,8526
$(u-v)$ = − 0,6117
$\frac{(u-v)}{2}$ = − 0,30585

(36 *bis*).
l. $\frac{(u+v)}{2}$ = $\bar{1}$,73777 +
col. cos $\frac{d}{2}$ = 0,09251 +
l. a = $\bar{1}$,83028 +
l. a^2 = $\bar{1}$,66060
a^2 = 0,4577

Formule (37 *bis*).
l. $\frac{(u-v)}{2}$ = $\bar{1}$,48551 −
col. sin $\frac{d}{2}$ = 0,22990 −
l. a' = $\bar{1}$,71541 +
l. a'^2 = $\bar{1}$,43082
a'^2 = 0,2697
$(1 - a^2 - a'^2)$ = 0,2726 +

(38 *bis*).
l. tg D = $\bar{1}$,63737 +
col. cos $\frac{d}{2}$ = 0,09251 +
l. b = $\bar{1}$,72988 +
l. b^2 = $\bar{1}$,45976

Formule (39 *bis*).
b' = 0
$(1 + b^2)$ = 1,28824

(42 *bis*).
l. ab = $\bar{1}$,56016 +
col. $(1 + b^2)$ = $\bar{1}$,89001 +
l. Q = $\bar{1}$,45017 +
l. Q^2 = $\bar{2}$,90034

Formule (43 *bis*).
l. $(1 - a^2 - a'^2)$ = $\bar{1}$,43553 +
col. $(1 + b^2)$ = $\bar{1}$,89001 +
l. q = $\bar{1}$,32554 +
q = + 0,2116
Q^2 = + 0,0795
$Q^2 + q$ = + 0,2911
l. $(Q^2 + q)$ = $\bar{1}$,46411
l. $\sqrt{Q^2+q}$ = $\bar{1}$,73205

(44 *bis*).
Q = + 0,2820
$+\sqrt{Q^2+q}$ (1) = + 0,5396
sin L_1 = + 0,8216
l. sin L_1 = $\bar{1}$,91466 +

L_1 — 55°14′,8 S^d
[Ch]ang^t en latitude de la 1re à la 2e station. } l = 50′,1 N^d
L_1 = 54°24′,7 S^d

(1) Il faut prendre ici le *radical* avec le [sig]ne +, afin d'avoir une racine *positive*; [car], conformément aux conventions du [n°] 53, nous nous sommes arrangé de façon [qu]e la latitude soit *positive*. Il aurait pu se [fai]re, du reste, que le radical pris avec le [sig]ne — donnât une deuxième solution po[sit]ive. On aurait alors pris celle des deux [sol]utions cadrant le mieux avec l'estime, y [co]mpris les présomptions sur l'influence des [cou]rants

3° CALCUL DE LA LONGITUDE.

MISE EN NOMBRE DE LA FORMULE (45 *bis*).

l. b = $\bar{1}$,72988 +
l. sin L_1 = $\bar{1}$,91466 +
l. b sin L_1 = $\bar{1}$,64454 +
$-b$ sin L_1 = − 0,4411
a = + 0,6765
$(a - b \sin L_1)$ = + 0,2354

col. $(a - b \sin L_1)$ = 0,62819 +
l. a' = $\bar{1}$,71541 +
l. tg $\left(\frac{d}{2} - P\right)$ = 0,34360 +
$\left(\frac{d}{2} - P\right)$ = + $4^h22^m27^s,5$
$\frac{d}{2}$ = − $2^h24^m20^s,4$
P = − $6^h46^m47^s,9$

T_v = $17^h13^m12^s,1$
$T_{p,v}$ = $8^h46^m02^s,8$
G_2 = { $8^h27^m09^s,3$ ou 126°47′,3 } E^t
Chang^t en longitude de la 1re à la 2e station. } g = 1°42′,9 O^t
G'_2 = 125°04′,4 E^t

Nota important. La position trouvée pour le navire se trouve ici obtenue avec moins d'approximation que dans les TYPES DE CALCUL n°s 1, 2 et 3 susmentionnés. Ainsi qu'il a été expliqué au n° 38, cela est dû à ce qu'en n'employant que cinq décimales pour les logarithmes, les erreurs provenant de ce chef se trouvent beaucoup plus répétées présentement que dans lesdits TYPES.

TYPE DE CALCUL n° 7.
PAR M. [illegible]

DÉTERMINATION DU POINT LE PLUS PROBABLE RELATIF A PLUS DE DEUX OBSERVATIONS,

dans le cas où toutes les observations sont traitées par la méthode Marcq Saint-Hilaire. (V. n° 68 du texte.)

Nota important. Nous rappellerons que cette détermination doit tout au plus (n° 64) être recommandée aux observateurs instruits et habiles; et qu'en principe elle correspond à un problème plus ou moins *spéculatif*, que nous n'avons traité qu'afin de n'omettre aucune des nouvelles questions ayant trait à la navigation.

1° DONNÉES DU PROBLÈME.

Toutes les observations étant ramenées au zénith de l'une d'entre elles, la première par exemple, supposons que l'on ait trouvé, par divers calculs de *points rapprochés* INDÉPENDANTS, les résultats suivants :

V = N 68°,3 O^t	h = 42^{mil},0	On sait que L_e = 54°42',9 S^d,
V' = S 44°,7 O^t	h' = 64 ,6	G_e = 128°29',3 E^t.
V'' = S 60°,0 E^t	h'' = 6 ,0	
V''' = N 15°,0 E^t	h''' = 15 ,0	

Nombre des observations $n = 4$.

On demande les coordonnées du point le plus probable à cet instant.

2° MISE EN NOMBRE DES FORMULES.

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\Delta L_e}{\cos L_e}\left(\frac{1-u^2-v^2}{2}\right) &= Y(1-u)-vX, \\ \Delta G_e\left(\frac{1-u^2-v^2}{2}\right) &= X(1+u)-vY. \end{aligned}\right.$$

h	V (1)	$Y\,(^2)=\frac{1}{n}\Sigma h\cos V$ Nord +	Sud −	$X\,(^2)=\frac{1}{n}\Sigma h\sin V$ Est −	Ouest +	2V	$u\,(^3)=\frac{1}{n}\Sigma\cos 2V$ +	−	$v\,(^3)=\frac{1}{n}\Sigma\sin 2V$ +	−
42^{mil},0	N 68°,0 O^t	15,5	—	—	39,0	+136°6	—	0,727	0,687	—
64 ,6	S 44°,7 O^t	—	45,8	—	45,6	— 89°4	0,010	—	—	1,00
6 ,0	S 60°,0 E^t	—	3,0	5,2	—	+120°0	—	0,500	0,866	—
15 ,0	N 15°,0 E^t	14,5	—	3,9	—	— 30°0	0,866	—	—	0,500
		30,0	48,8	9,1	84.6		0,876	1,227	1,553	1,500
			30,0		9,1			0,876	1,500	

$Y = -18,8 : 4$ $X = +75,5 : 4$ $u = -0,351 : 4$ $v = +0,053 : 4$

$Y = -4,7$	$X = +18,9$	$u = -0,088$
$v = +0,013$	$v = +0,013$	$(1+u) = +0,912$
$vY = -0,061$	$vX = +0,246$	$(1-u) = +1,088$
$X = +18,9$	$Y = -4,7$	$v = +0,013$
$(1+u) = +0,912$	$(1-u) = +1,088$	$v^2 = +0,000169$ (4)
$X(1+u) = +17,236$	$Y(1-u) = -5,114$	$u^2 = +0,007744$ (4)
$-vY = +0,061$	$-vX = -0,246$	$1-u^2-v^2 = +0,992087$
$X(1+u)-vY = +17,297$	$Y(1-u)-vX = -5,360$	$\left(\frac{1-u^2-v^2}{2}\right) = +0,496$

$$\Delta G_e = \left(\frac{+17',297}{0,496}\right) \qquad \frac{\Delta L_e}{\cos L_e} = \left(\frac{-5',360}{0,496}\right) = -10',8$$

$\Delta G_e = 34',7$ O^t $\Delta L_e = 6',2$ S^d (5)

3° POINT LE PLUS PROBABLE.

L_e = 54°42',9 S^d	G_e = 128°29',3 E
ΔL_e = 6',2 S^d	ΔG_e = 34',7 O^t
$(L_e+\Delta L_e) = L$ = 54°49',1 S^d	$(G_e+\Delta G_e) = G$ = 127°54',6 E

Remarques diverses et conventions.

Revoir le *Nota important* inséré dans l'appendice du TYPE N° 1, page 494. — Remarquer aussi que, pour les signes des changements en latitude ΔL_e et des diverses directions azimutales de l'espèce V, au lieu de prendre en considération le *pôle élevé*, selon les conventions de la légende générale page 1 du texte, nous avons affecté le signe + au point cardinal N^d, et le signe — au point cardinal S^d. Cette exception est justifiée par la grande simplification qui en résulte pour le présent calcul, qui est très-complexe dans ses détails.

En général, nous donnons le signe (+) aux quantités dont les dénominations sont { Nord ou Ouest ;

le signe (−) à celles dont les dénominations sont { Sud ou Est.

(1) Les angles de l'espèce V spécifiés dans les types de calcul précédents, ont été substitués aux angles Z_e des formules générales du n° 68 pour la facilité des opérations; car ils permettent de prendre en *grandeur absolue* toutes les quantités de l'espèce h. — Ils sont toujours aigus. De plus on les prend { positifs, quand ils sont comptés dans le sens N O ou S E; négatifs, quand ils sont comptés dans le sens N E ou S O.

(2) Les quantités X et Y s'obtiennent par la *table de point*.

(3) Les quantités u et v s'obtiennent par les tables de lignes trigonométriques *naturelles*. On peut les trouver grosso modo avec la *table de point*, en prenant le centième des chemins N.S et E.O correspondant à 2V, et à un nombre de milles égal à 100.

(4) Les quantités u^2 et v^2 s'obtiennent par la table des carrés (XLIX de Caillet).

(5) Pour obtenir ΔL_e, on entre dans la *table de point* avec L_e comme angle de route et $\frac{\Delta L_e}{\cos L_e}$ comme nombre de milles; on trouve ΔL_e dans la colonne N.S.

CALCUL EXPÉDITIF ET RIGOUREUX DE LA LONGITUDE PAR 12 SÉRIES DE DISTANCES,

avec appréciation du degré d'exactitude des résultats d'après la théorie des erreurs d'observation. (Voir n°s 72, 77 et 124 du texte.)

(Ce calcul, eu égard à sa rigueur, permet à un très-bon observateur de rectifier, au besoin, à la mer, l'état absolu d'un ronomètre.)

1° DONNÉES ET PREMIÈRES CONCLUSIONS DU PROBLÈME.

Le 26 juin 1878 au matin, dans un lieu situé par 43°07'20" de latit. N^d et 0^h14^m15^s de longitude E^t estimées, on a observé les distances ci-dessous, entre le bord occidental du Soleil et le bord oriental de la Lune, aux heures temps moyen du lieu diquées en regard (thermomètre + 27°; baromètre 0^m,768). On demande la longitude.

	TEMPS MOYEN DU LIEU.	INTERVALLES I et I' pour le calcul de la dernière colonne à droite.	NUMÉROS des séries.	DISTANCES observées.	DIFFÉRENCES premières.	DIFFÉRENCES SECONDES	TABLEAU GÉNÉRAL DES DISTANCES VRAIES. (Ce tableau ne s'établit qu'après le calcul de réduction donné au 5° ci-après.) *Nota important.* Les distances VRAIES sont *calculées* seulement pour les séries 1, 7, 12, et *interpolées* pour les neuf autres séries (1).
Différence = 15^m30^s,4.		— I —					
	21^h16^m45^s,0		1	50°13'34",1	17'38",1	9'34",4	50°31'12",2
		2^m30^s,0					
	» 19^m15^s,0		2	12'18",9			29'32",1
		5^m07^s,2					
	» 21^m52^s,2		3	12'22",4			29'09",5
		7^m43^s,6					
	» 24^m28^s,6		4	10'45",0			27'06",2
		10^m24^s,3					
	» 27^m09^s,3		5	10'08",1			26'02",6
		12^m59^s,3					
	» 29^m44^s,3		6	10'42",4			26'11",2
		15^m30^s,4					
Différence = 15^m23^s,6.	» 32^m15^s,4	— I' —	7	50°08'44",4	15'03",7	2'28",9	50°23'48",1
		3^m00^s,7					
	» 35^m16^s,1		8	8'01",9			22'36",5
		6^m07^s,8					
	» 38^m23^s,2		9	7'02",1			21'06",5
		9^m12^s,8					
	» 41^m28^s,2		10	5'21",5			18'56",1
		12^m15^s,7					
	» 44^m31^s,1		11	5'39",1			18'44",2
		15^m23^s,6					
	» 47^m39^s,0		12	50°03'54",6	12'34",8		50°16'29",4

(1) Voici la manière dont les neuf distances vraies *interpolées* doivent être déduites des trois distances vraies *calculées*, séries 1, 7, 12. On a :

Intervalle *temps moyen* entre la 1re et la 7e série. . . . . = 15^m30^s,4
Différence entre les distances *observées* et *vraies* pour la 1re série. . . . . = 17'38",1
Différence entre les distances *observées* et *vraies* pour la 7e série. . . . . = 15'03",7
Variation des deux différences précédentes dans l'intervalle ci-dessus. . . . . = 2'34",4

Dès lors, pour une des cinq séries intermédiaires entre la 1re et la 7e, telle que I soit l'intervalle de temps qui la sépare de la première, on aura la différence entre la distance *vraie* et sa correspondante *observée*, en retranchant de 17'38",1 la quantité donnée par l'expression :

$$2'34'',4 \times \frac{I}{15^m30^s,4}.$$

Semblablement, pour les séries comprises entre la 7e et la 12e, la valeur de chacune des quantités à retrancher de 15'03",7 pour avoir la différence entre les distances observées et les distances vraies, est donnée par l'expression :

$$2'28'',9 \times \frac{I'}{15^m23^s,6},$$

I' désignant l'intervalle de temps à partir de la 7e série.

2° CALCULS PRÉPARATOIRES POUR LA 1re, 7e ET 12e SÉRIE.

Heure temps moyen du lieu, T_m, le 25 juin 1878 (2)	$21^h16^m45^s,0$	$21^h32^m15^s,4$	$21^h47^m39^s,0$
Longitude	$0^h14^m15^s,0$ E^t^	$0^h14^m15^s,0$ E^t^	$0^h14^m15^s,0$ E^t^
Heure temps moyen de Paris, $T_{p,m}$	$21^h02^m30^s,0$	$21^h18^m00^s,0$	$21^h33^m24^s,0$
Lune, pour l'heure $T_{p,m}$ — Ascension droite Æ	$2^h40^m32^s,0$	$2^h41^m04^s,0$	$2^h41^m37^s,0$
Lune — Déclinaison D	+21°03′00″ N^d^	+21°05′27″ N^d^	+21°07′53″ N^d^
Lune — Parallaxe horizontale équatoriale Π_0	55′23″,0		
Lune — Parallaxe horizontale du lieu Π	55′18″,0 (3)	pour les trois séries.	
Lune — $\frac{1}{2}$ diamètre horizontal d	15′07″,0	pour les trois séries.	
Soleil, pour l'heure $T_{p,m}$ — Équat. du temps E, en nombre rond	-2^m30^s	pour les trois séries.	
Soleil — Déclinaison D	+23°22′51″ N^d^	+23°22′50″ N^d^	+23°22′40″ N^d^
Soleil — $\frac{1}{2}$ diamètre horizontal d	15′46″,0	pour les trois séries.	

3° CALCUL DES ANGLES HORAIRES POUR LA 1re, 7e ET 12e SÉRIE.

Heure temps moyen du lieu en nombre rond de secondes (4)	$21^h16^m45^s$	$21^h32^m15^s$	$21^h47^m39^s$
Équation du temps E	-2^m30^s	-2^m30^s	-2^m30^s
Heure temps vrai du lieu	$21^h14^m15^s$	$21^h29^m45^s$	$21^h45^m09^s$
Angle horaire du Soleil, P	$2^h45^m45^s$	$2^h30^m15^s$	$2^h14^m51^s$
Temps sidéral, ou $Æ_m$ à 0^h de Paris, le 25	$6^h13^m56^s,5$ (5)	pour les trois séries.	
Correction pour la longitude	$-2^s,3$	pour les trois séries.	
Somme: Temps sidéral, ou $Æ_m$ à 0^h du lieu, le 25	$6^h13^m54^s,2$ (6)	$6^h13^m54^s,2$ (6)	$6^h13^m54^s,2$ (6)
Somme: Heure temps moyen du lieu, T_m	$21^h16^m45^s,0$	$21^h32^m15^s,4$	$21^h47^m39^s,0$
Somme: Correction pour l'heure T_m	$3^m27^s,0$	$3^m27^s,0$	$3^m27^s,0$
	$2^s,6$	$5^s,3$	$7^s,7$
	$0^s,1$	$0^s,0$	$0^s,1$
Heure temps sidéral du lieu $=T_m+Æ_m+$correction	$3^h34^m09^s$	$3^h49^m42^s$	$4^h05^m08^s$
Æ de la lune	$2^h40^m32^s$	$2^h41^m04^s$	$2^h41^m37^s$
Angle horaire de la Lune, P	$0^h53^m37^s$	$1^h08^m38^s$	$1^h23^m31^s$

4° CALCUL DES HAUTEURS ET DE PARALLAXE MOINS RÉFRACTION POUR LA 1re, 7e ET 12e SÉRIE.

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\cos P}{\operatorname{tg} D};\quad \sin H=\frac{\sin D \sin(L+\varphi)}{\cos\varphi}.$$ (Voir n° 4 du Texte.)

	1re SÉRIE. Lune.	1re SÉRIE. Soleil.	7e SÉRIE. Lune.	7e SÉRIE. Soleil.	12e SÉRIE. Lune.	12e SÉRIE. Soleil.
l. cos P =	$\bar{1},98801$	$\bar{1},87488$	$\bar{1},98023$	$\bar{1},89910$	$\bar{1},97030$	$\bar{1},92004$
col. tg D =	0,41469	0,36418	0,41375	0,36418	0,41287	0,36411
l. tg φ =	0,40270	0,23906	0,39398	0,26328	0,38337	0,28422
φ =	+68°24′50″	60°01′40″	68°01′10″	61°23′30″	67°31′40″	62°32′20″
L =	+43°07′20″ N^d^	43°07′20″	43°07′20″	43°07′20″	43°07′20″	43°07′20″
(L + φ) =	111°32′10″	103°09′00″	111°08′30″	104°30′50″	110°39′00″	105°39′40″
l. sin (L + φ) =	$\bar{1},96857$	$\bar{1},98846$	$\bar{1},96974$	$\bar{1},98591$	$\bar{1},97116$	$\bar{1},98357$
l. sin D =	$\bar{1},55532$	$\bar{1},59861$	$\bar{1},55614$	$\bar{1},59861$	$\bar{1},55690$	$\bar{1},59861$
col. cos φ =	0,43427	0,30139	0,42679	0,31982	0,41767	0,33616
l. sin H =	$\bar{1},95816$	$\bar{1},88846$	$\bar{1},95267$	$\bar{1},90434$	$\bar{1},94573$	$\bar{1},91834$
Hauteurs vraies H =	a′ = 65°15′10″	b′ = 50°40′10″	a′ = 63°44′00″	b′ = 53°21′00″	a′ = 61°57′00″	b′ = 55°57′20″
+ (p − R) approchée =	− 23′02″	+ 42″	− 24′22″	+ 38″	− 25′51″	+ 35″
Hauteurs apparentes approchées	a = 64°52′08″	b = 50°40′52″	a = 63°19′38″	b = 53°21′38″	a = 61°31′09″	b = 55°57′55″
Correction de (p − R) pour Baromètre et Thermomètre	− 1″,0	− 2″,0	− 1″,5	− 2″,0	− 1″,5	− 2″,[illegible]
Valeur exacte de (p−R) = da p^r^ la Lune, et de (R−p) = db pour le Soleil (7),	da = +23′03″,0	db = + 40″,0	da = + 24′23″,5	db = + 36″,0	da = + 25′52″,5	db = + 33″,[illegible]

(2) Les trois heures doivent être écrites sur papier mobile pour être reportées plus bas.
(3) Pour les trois séries, la diminution de la parallaxe équatoriale afférente à la latitude du lieu = 5″,0.
(4) Ces trois heures sont prises sur le papier mobile indiqué en (2) ci-dessus.
(5) Pour le calcul de l'angle horaire de la Lune, comme on n'a pas besoin d'avoir cet élément avec une grande précision, on arrondit les dixièmes de secondes dans la détermination dudit angle.
(6) Sur papier mobile.
(7) Ces quantités doivent être calculées avec toute la rigueur possible.

5° Réduction de la distance observée par la méthode de MM. Beuf et Perrin pour la 1re, 7e et 12e série. (Voir n° 72 du texte.)

5°, I. Correction de la distance observée des bords; et obtention de la distance vraie, en se reportant d'ailleurs aux calculs subséquents en 5°, III.

	1re série.	7e série.	12e série.
Distance observée	50°13′34″,1	50°08′44″,4	50°03′34″,6
Somme des 1/2 diamètres en hauteur	31′06″,2	31′06″,2	31′06″,2
Distance apparente approchée des centres	50°44′40″,3	50°39′50″,6	50°35′00″,8
Accourcissement des 1/2 diamètres dans la direction de la distance	−0″,3	−0″,3	−0″,3
Distance apparente exacte des centres $\Delta_o =$	50°44′40″,0	50°39′50″,3	50°35′00″,5
Differ. entre la dist^ce^ vraie et la dist^ce^ apparente calculée en 5°, III plus bas $=(\Delta_v-\Delta_o)=$	−13′27″,8	−16′02″,2	−18′31″,1
Distance vraie $\Delta_v =$	50°31′12″,2	50°23′48″,1	50°16′29″,4

1/2 diamètre horizontal de la Lune, d	15′07″,0
Augmentation pour chaque hauteur	13″,2
1/2 diamètre en hauteur de la Lune, d'	15′20″,2
1/2 diamètre en hauteur du Soleil (égal au 1/2 diamètre horizontal à une quantité insignifiante près), d''	15′46″,0
Somme des 1/2 diamètres en hauteur	31′06″,2

5°, II. Détermination, en nombre rond, des angles à l'astre : A pour la Lune, B pour le Soleil.

1re série.

$\Delta_o = 50°44'40''$
$a = 64°52'10''$
$b = 50°40'50''$

Somme 166°17′40″

1/2 somme $S =$	83°08′50″	l. cos $\bar{1}$,07671	$\bar{1}$,07671
$(S-\Delta_o) =$	32°24′10″	col. cos 0,07350	0,07350
$(S-a) =$	18°16′40″	col. sin 0,50359	l. sin $\bar{1}$,49641
$(S-b) =$	32°28′00″	l. sin $\bar{1}$,72982	col. sin 0,27018
		$\bar{1}$,38362	$\bar{2}$,91680

$\text{l. tg}\frac{A}{2} = \bar{1},69181$ $\quad \text{l. tg}\frac{B}{2} = \bar{1},45840$

$\frac{A}{2} = 26°11'20''$ $\quad \frac{B}{2} = 16°01'55''$

$A = 52°22'40''$ $\quad B = 32°03'50''$

7e série.

$\Delta_o = 50°39'50''$
$a = 63°19'40''$
$b = 53°21'30''$

Somme 167°21′00″

1/2 somme $S =$	83°40′30″	l. cos $\bar{1}$,04206	$\bar{1}$,04206
$(S-\Delta_o) =$	33°00′40″	col. cos 0,07646	0,07646
$(S-a) =$	20°20′50″	col. sin 0,45878	l. sin $\bar{1}$,54122
$(S-b) =$	30°19′00″	l. sin $\bar{1}$,70310	col. sin 0,29690
		$\bar{1}$,28040	$\bar{2}$,95664

$\text{l. tg}\frac{A}{2} = \bar{1},64020$ $\quad \text{l. tg}\frac{B}{2} = \bar{1},47832$

$\frac{A}{2} = 23°35'30''$ $\quad \frac{B}{2} = 16°44'35''$

$A = 47°11'00''$ $\quad B = 33°29'10''$

12e série.

$\Delta_o = 50°35'00''$
$a = 61°31'10''$
$b = 55°57'50''$

Somme 168°04′00″

1/2 somme $S =$	84°02′00″	l. cos $\bar{1}$,01682	$\bar{1}$,01682
$(S-\Delta_o) =$	33°27′00″	col. cos 0,07864	0,07864
$(S-a) =$	22°30′50″	col. sin 0,41691	l. sin $\bar{1}$,58309
$(S-b) =$	28°04′10″	l. sin $\bar{1}$,67260	col. sin 0,32740
		$\bar{1}$,18497	$\bar{1}$,00595

$\text{l. tg}\frac{A}{2} = \bar{1},59248$ $\quad \text{l. tg}\frac{B}{2} = \bar{1},50298$

$\frac{A}{2} = 21°22'10''$ $\quad \frac{B}{2} = 17°39'40''$

$A = 42°44'20''$ $\quad B = 35°19'20''$

5°, III. Détermination de la différence entre la distance vraie et la distance apparente

(à l'aide des Tables *ad hoc* de MM. Beuf et Perrin).

Arguments pour la détermination dont il s'agit, déduits des parties du type marquées 4° et 5°, II ci-dessus.

$da = +23',050$ $db = +0',667$	$da = +24',392$ $db = +0',600$	$da = +23',876$ $db = +0',550$
$A = 52°22'40''$ $B = 32°03'50''$	$A = 47°11'00''$ $B = 33°29'10''$	$A = 42°44',20''$ $B = 35°19'20''$

La TABLE citée page 134, de MM. Beuf et Perrin donne, dans sa première partie, d'après les arguments précédents :

$-da\cos A = -14',070$	$-da\cos A = -16',578$	$-da\cos A = -19',006$
$+db\cos B = +0',565$	$+db\cos B = +0',500$	$+db\cos B = +0',448$
Somme algéb^{que} = 1er terme de la DIFFÉRENCE *cherchée* $= -13',505$	Somme algéb^{que} = 1er terme de la DIFFÉRENCE *cherchée* $= -16',078$	Somme algéb^{que} = 1er terme de la DIFFÉRENCE *cherchée* $= -18',558$

La même partie de la *Table* donne :

$da\sin A = +18',26$	$da\sin A = +17',89$	$da\sin A = +17',56$
$db\sin B = +0',35$	$db\sin B = +0',33$	$db\sin B = +0',32$
Somme. . . . . $= +18',61$	Somme. . . . . $= +18',22$	Somme. . . . . $= +17',88$
Différence. . . . . $= +17',91$	Différence. . . . . $= +17',56$	Différence. . . . . $= +17',24$

Avec la somme, puis la différence précédentes, et la distance apparente Δ_o, la deuxième partie de la *Table* de MM. Beuf et Perrin donne successivement :

$+\ 3'',2$	$+\ 3'',1$	$+\ 2'',9$
$-\ 0'',7$	$-\ 0'',6$	$-\ 0'',4$
Somme algéb^{que} = 2^{e} terme de la DIFFÉRENCE *cherchée* $= +\ 2'',5$	Somme algéb^{que} = 2^{e} terme de la DIFFÉRENCE *cherchée* $= +\ 2'',5$	Somme algéb^{que} = 2^{e} terme de la DIFFÉRENCE *cherchée* $= +\ 2'',3$
1er terme ci-dessus exprimé en minutes et secondes $= -13'30'',3$	1er terme ci-dessus exprimé en minutes et secondes $= -16'04'',7$	1er terme ci-dessus exprimé en minutes et secondes $= -18'23'',4$
DIFFÉRENCE *cherchée* entre la distance vraie et la distance apparente $= (\Delta_v - \Delta_o)$. . . . . . $= -13'27'',8$	DIFFÉRENCE *cherchée* entre la distance vraie et la distance apparente $= (\Delta_v - \Delta_o)$. . . . . . $= -16'02'',2$	DIFFÉRENCE *cherchée* entre la distance vraie et la distance apparente $= (\Delta_v - \Delta_o)$. . . . . . $= -18'21'',1$

Numéros des séries	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Distance vraie à 21^h de Paris le 25 juin 1873	(8) 50°32'18",0	(8) 50°32'18",0	(8) 50°32'18",0	(8) 50°32'18",0	(8) 50°32'18",0	(8) 50°32'18",0	(8) 50°32'18",0	(8) 50°32'18",0	(8) 50°32'18",0	(8) 50°32'18",0	(8) 50°32'18",0	(8) 50°32'18",0
Distances vraies (prises dans le tableau d'interpolation du commencement du type, page 513)	50°31'12",2	50°29'32",1	50°29'09",5	50°27'06",2	50°26'02",6	50°26'11",2	50°23'48",1	50°22'36",5	50°21'06",5	50°18'56",1	50°18'44",2	50°16'29",4
Différences	01'05",8	02'45",9	03'08",5	05'11",8	06'15",4	06'06",8	08'29",9	09'41",5	11'11",5	13'21",9	13'33",8	15'48",6
Log différences	1,8182	2,2198	2,2753	2,4939	2,5745	2,5644	2,7075	2,7646	2,8270	2,9041	2,9105	2,9774
Log $\frac{3^h}{\text{différence}}$ (*Conce des temps*)	0,3222	0,3222	0,3222	0,3222	0,3222	0,3222	0,3222	0,3222	0,3222	0,3222	0,3222	0,3222
Somme des log.	2,1404	2,5420	2,5975	2,8161	2,8967	2,8866	3,0297	3,0868	3,1492	3,2263	3,2327	3,2993
Nombres correspondants : heures approchées temps moyen de Paris	$21^h02^m18^s,2$	$21^h05^m48^s,3$	$21^h06^m35^s,8$	$21^h10^m54^s,8$	$21^h13^m08^s,3$	$21^h12^m50^s,2$	$21^h17^m50^s,8$	$21^h20^m21^s,3$	$21^h23^m30^s,0$	$21^h28^m03^s,8$	$21^h28^m28^s,8$	$21^h33^m12^s,1$
Corr. diff. secondes. (Tab. XI, *Conce des temps*.)	$+0^s,0$	$+0^s,0$	$+1^s,0$	$+1^s,0$	$+1^s,0$	$+1^s,0$	$+1^s,0$	$+1^s,0$	$+2^s,0$	$+2^s,0$	$+2^s,0$	$+2^s,0$
Heures exactes temps moyen de Paris	$21^h02^m18^s,2$	$21^h05^m48^s,3$	$21^h06^m36^s,8$	$21^h10^m55^s,8$	$21^h13^m09^s,3$	$21^h12^m51^s,2$	$21^h17^m51^s,8$	$21^h20^m22^s,3$	$21^h23^m32^s,0$	$21^h28^m05^s,8$	$21^h28^m30^s,8$	$21^h33^m14^s,1$
Heures temps moyen correspondantes du lieu	$21^h16^m45^s,0$	$21^h19^m15^s,0$	$21^h21^m52^s,2$	$21^h24^m28^s,6$	$21^h27^m09^s,3$	$21^h29^m44^s,3$	$21^h32^m15^s,4$	$21^h35^m16^s,1$	$21^h38^m23^s,2$	$21^h41^m28^s,2$	$21^h44^m31^s,1$	$21^h47^m39^s,0$
Longitudes G (Est)	$0^h14^m26^s,8$	$0^h13^m26^s,7$	$0^h15^m15^s,4$	$0^h13^m32^s,8$	$0^h14^m00^s,0$	$0^h16^m53^s,1$	$0^h14^m23^s,6$	$0^h14^m53^s,8$	$0^h14^m51^s,2$	$0^h13^m22^s,4$	$0^h16^m00^s,3$	$0^h14^m24^s,9$

(8) Sur papier mobile.

7° RÉSULTATS DES CALCULS ; ET APPRÉCIATION DE LEUR DEGRÉ D'EXACTITUDE D'APRÈS LA THÉORIE DES ERREURS D'OBSERVATION.

Somme des longitudes G, $175^m31^s,0$.

Moyenne des G $= 0^h14^m37^s,6$ **E^t^.**

Erreurs résid^les^ $= x =$ (G—moy. des G) : $x_1 = -10^s,8 \mid x_2 = -70^s,9 \mid x_3 = +37^s,8 \mid x_4 = -64^s,8 \mid x_5 = -37^s,6 \mid x_6 = +135^s,5 \mid x_7 = -14^s,0 \mid x_8 = +16^s,2 \mid x_9 = +14^s,6 \mid x_{10} = -75^s,2 \mid x_{11} = +82^s,7 \mid x_{12} = -12^s,7$

Somme des x en valeur absolue $= 572^s,8$.

Moyenne des x en valeur absolue $= 47^s,7$.

(N° 126 du texte.) Erreur probable commune à chacune des observations $= \pm 47^s,7 \times 0,845 = \pm 40^s,31$.

Erreur probable de la moyenne des observations $= \pm \frac{40^s,31}{\sqrt{12}} = \pm 11^s,63$.

Application du criterium de Chauvenet (9).

Nombre total des observations	=	12
$\left(\frac{2 \times 12 - 1}{2 \times 12}\right)$ TABLE III, page 534	=	0,958
Argument $\frac{x}{r}$ correspondant à 0,958 dans la TABLE II, page 533	=	3,02
Erreur probable commune à chacune des observations	=	$40^s,31$
Produit	=	$121^s,74$

(9) Voir pour l'esprit et l'usage de ce criterium le n° 121 du texte.

Longitude moyenne définitive, et erreur probable de cette quantité.

Comme la 6e observation a pour erreur résiduelle $135^s,5$, nombre qui surpasse le produit $121^s,74$ du tableau ci-contre, elle doit être rejetée ; mais toutes les autres observations sont à conserver. Il faudrait alors à la rigueur recommencer, avec les observations conservées, les calculs d'appréciation d'erreur précédents ; puis appliquer derechef le criterium de Chauvenet. Mais, d'après l'inspection des onze erreurs résiduelles restant en dehors de la 6e, on voit qu'il n'est pas nécessaire de se livrer à cette nouvelle investigation.

En somme ayant éliminé la sixième observation, on trouve avec les onze autres :

Longitude moyenne définitive $= 0^h14^m25^s,3$ E^t^

Nouvelle somme des longitudes G $= 158^m37^s,9$

Nouvelle moyenne des G $= 0^h14^m25^s,3$ E^t^

Nouvelles erreurs résiduelles $= x =$ (G— moyenne des G) : $x_1 = +1^s,5 \mid x_2 = -58^s,6 \mid x_3 = +50^s,1 \mid x_4 = -52^s,5 \mid x_5 = -25^s,3 \mid x_7 = -1^s,7 \mid x_8 = +28^s,5 \mid x_9 = +25^s,9 \mid x_{10} = -62^s,9 \mid x_{11} = +95^s,0 \mid x_{12} = -0^s,4$

Somme des nouveaux x en valeur absolue $= 402^s,4$.

Moyenne d° d° $= 36^s,7$.

Erreur probable commune à chacune des observations $= \pm 36^s,7 \times 0,845 = \pm 31^s,01$.

Erreur probable de la moyenne des observations $= \pm \frac{31^s,01}{\sqrt{11}} = \pm 9^s,85 = \pm 140'',25$ ou $\pm 2'40'',25$, en angle.

Nota important. Il convient de rappeler que toutes les erreurs dont nous venons de nous occuper sont le résultat des erreurs *accidentelles* d'observation (n° 119 du texte), et qu'il faudrait, pour apprécier l'exactitude absolue des éléments obtenus, joindre audit résultat l'influence des erreurs *systématiques* (n° 118). Malheureusement, la théorie des probabilités est impuissante à cet effet. Dès lors une des principales préoccupations d'un bon observateur doit être de s'affranchir sans cesse des dernières erreurs en question, ce qui heureusement est souvent réalisable. (Voir TROISIÈME PARTIE, §§ II et III.)

TYPE DE CALCUL
N° 8 *bis*,
PAR M. ROUYAUX.

DISTANCES LUNAIRES.

Autre manière de résoudre le problème du Type n° 8.

1° DONNÉES DU PROBLÈME.

. . . .
. . . .
. . . .

2° CALCULS PRÉPARATOIRES POUR LA 1re, 7e et 12e SÉRIE.

. . . .
. . . .
. . . .

3° CALCULS DES ANGLES HORAIRES POUR LA 1re, 7e ET 12e SÉRIE.

. . . .
. . . .
. . . .

4° CALCUL DES HAUTEURS ET DE PARALLAXE MOINS RÉFRACTION POUR LA 1re, 7e ET 12e SÉRIE.

. . . .
. . . .
. . . .

} Identiquement comme au TYPE N° 8.

5° CALCULS PRÉPARATOIRES SPÉCIAUX À LA MÉTHODE DE M. ROUYAUX POUR LA RÉDUCTION DE LA DISTANCE OBSERVÉE. (VOIR N° 206 DU TEXTE.)

5°, I. Détermination des hauteurs apparentes correspondant à la demi-somme de la distance vraie approchée et de la distance apparente.

(Valeur approchée, prise en 4° ci-dessus) . . .	$a = 64°52'08''$ $+\frac{1}{2}\,da = +\ 11'31''$	$b = 50°40'52''$ $-\frac{1}{2}\,db = -\ 20''$	$a = 63°19'38''$ $+\frac{1}{2}\,da = +\ 12'12''$	$b = 53°21'38''$ $-\frac{1}{2}\,db = -\ 18''$	$a = 61°31'09''$ $+\frac{1}{2}\,da = +\ 12'56''$	$b = 55°57'55''$ $-\frac{1}{2}\,db = -\ 16''$
(Valeur arrondie)	$a_1 = 65°03'40''$	$b_1 = 50°40'30''$	$a_1 = 63°31'50''$	$b_1 = 53°21'20''$	$a_1 = 61°44'10''$	$b_1 = 55°57'40''$

5°, II. Détermination de la distance vraie approchée et de la demi-somme de cette distance et de la distance apparente.

Heure approchée de Paris d'après le chronomètre, le 25 juin 1878.	$21^h02^m20^s$ l. 02^m20^s = 2,1761	$21^h17^m50^s$ l. 17^m50^s = 3,0294	$21^h33^m14^s$ l. 33^m14^s = 3,2997
	$-$l. $\frac{3^h}{\text{diff.}}$ = 0,3222	$-$l. $\frac{3^h}{\text{diff.}}$ = 0,3222	$-$l. $\frac{3^h}{\text{diff.}}$ = 0,3222
	l. P^{le} p^{elle} = 1,8539	l. P^{le} p^{elle} = 2,7072	l. P^{le} p^{elle} = 2,9775
	P^{le} p^{elle} = $-$ 1'11''	P^{le} p^{elle} = $-$ 8'29''	P^{le} p^{elle} = $-$ 15'49''
Distance vraie à 21 heures.	$= 50°32'18''$	Distance vraie à 21 heures. . . . . $= 50°32'18''$	Distance vraie à 21 heures. . . . . $= 50°32'18''$
Distance vraie approchée.	$\Delta_{v,1} = 50°31'12''$	Distance vaie approchée. . . . . $\Delta_{v,1} = 50°23'48''$	Distance vraie approchée. . . . . $\Delta_{v,1} = 50°16'29''$
(Valeur prise en 6°, I, où on la calcule d'abord). Distance apparente.	$\Delta_o = 50°44'40''$	Distance apparente. . . . . $\Delta_o = 50°39'50''$	Distance apparente. . . . . $\Delta_o = 50°35'00''$
(Valeur arrondie). .	$1/2(\Delta_{v,1}+\Delta_o) = \Delta_o + 1/2(\Delta_{v,1}-\Delta_o) = \Delta_{o,1} = 50°38'00''$	$1/2(\Delta_{v,1}+\Delta_o) = \Delta_o + 1/2(\Delta_{v,1}-\Delta_o) = \Delta_{o,1} = 50°31'50''$	$1/2(\Delta_{v,1}+\Delta_o) = \Delta_o + 1/2(\Delta_{v,1}-\Delta_o) = \Delta_{o,1} = 50°25'40''$

6° RÉDUCTION DE LA DISTANCE OBSERVÉE PAR LA MÉTHODE DE M. ROUYAUX. (VOIR N° 206 DU TEXTE.)

6°, I. Correction de la distance observée des bords; et obtention de la distance vraie d'après les calculs subséquents en 6°, III.

	1re SÉRIE.	7e SÉRIE.	12e SÉRIE.
Distances observées	50°13'34",1	50°08'44",4	50°03'54",6
Somme des 1/2 diamètres	31'06",2	31'06",2	31'06",2
Distance apparente des centres	50°44'40",3	50°39'50",6	50°35'00",8
Accourcissement des 1/2 diamètres dans la direction de la distance	— 0",3	— 0",3	— 0",3
Distance apparente exacte des centres Δ_0 =	50°44'40",0	50°39'50",3	50°35'00",5
Différce entre la distance vraie et la distance appar. calculée en 6°, III, ci-après $=(\Delta_v - \Delta_0)=$	13'27",8	16'02",3	18'31",0
Distance vraie Δ_v =	50°31'12",2	50°23'48",0	50°16'29",5

1/2 diamètre horizontal de la Lune, *d*	15'07",0
Augmentation pour les hauteurs	13",2
1/2 diamètre en hauteur de la Lune, *d'*	15'20",2
1/2 diamètre en hauteur du Soleil (égal au 1/2 diamètre horizontal à une quantité insignifiante près), *d'*	15'46",0
Somme	31'06",2

6°, II. Détermination en nombre rond des angles à l'astre : A_1 pour la Lune, B_1 pour le Soleil, correspondant à la demi-somme de la distance vraie approchée et de la distance apparente.

1re SÉRIE.

$\Delta_{0,1} = 50°38'00''$
$a_1 = 65°03'40''$
$b_1 = 50°40'30''$

Somme $166°22'10''$

1/2 somme $S_1 = 83°11'00''$ — l. cos $= \bar{1},07442$ — $\bar{1},07442$
$(S_1 - \Delta_{0,1}) = 32°33'00''$ — col. cos $= 0,07421$ — $0,07421$
$(S - a_1) = 18°07'20''$ — col. sin $= 0,50718$ — l. sin $= \bar{1},49282$
$(S - b_1) = 32°30'30''$ — l. sin $= \bar{1},73032$ — col. sin $= 0,26968$

$\bar{1},38613$ — $\bar{2},91113$

l. tg $\frac{A_1}{2} = \bar{1},69306$ — l. tg $\frac{B_1}{2} = \bar{1},45556$

$\frac{A_1}{2} = 26°15'15''$ — $\frac{B_1}{2} = 15°56'00''$

$A_1 = 52°30'30''$ — $B_1 = 31°52'00''$

7e SÉRIE.

$\Delta_{0,1} = 50°31'50''$
$a_1 = 63°31'50''$
$b_1 = 53°21'20''$

Somme $167°25'00''$

$S_1 = 83°42'30''$ — l. cos $= \bar{1},03977$ — $\bar{1},03977$
$(S_1 - \Delta_{0,1}) = 33°10'40''$ — col. cos $= 0,07729$ — $0,07729$
$(S_1 - a_1) = 20°10'40''$ — col. sin $= 0,46226$ — l. sin $= \bar{1},53774$
$(S_1 - b_1) = 30°21'10''$ — l. sin $= \bar{1},70357$ — col. sin $= 0,29643$

$\bar{1},28289$ — $\bar{2},95123$

l. tg $\frac{A_1}{2} = \bar{1},64144$ — l. tg $\frac{B_1}{2} = \bar{1},47561$

$\frac{A_1}{2} = 23°39'10''$ — $\frac{B_1}{2} = 16°38'40''$

$A_1 = 47°18'20''$ — $B_1 = 33°17'20''$

12e SÉRIE.

$\Delta_{0,1} = 50°25'40''$
$a_1 = 61°44'10''$
$b_1 = 55°57'40''$

Somme $168°07'30''$

$S_1 = 84°03'40''$ — l. cos $= \bar{1},01480$ — $\bar{1},01480$
$(S_1 - \Delta_{0,1}) = 33°38'00''$ — col. cos $= 0,07956$ — $0,07956$
$(S_1 - a_1) = 22°19'30''$ — col. sin $= 0,42038$ — l. sin $= \bar{1},57962$
$(S_1 - b_1) = 28°06'00''$ — l. sin $= \bar{1},67303$ — col. sin $= 0,32697$

$\bar{1},18777$ — $\bar{1},00095$

l. tg $\frac{A_1}{2} = \bar{1},59388$ — l. tg $\frac{B_1}{2} = \bar{1},50047$

$\frac{A_1}{2} = 21°25'55''$ — $\frac{B_1}{2} = 17°34'00''$

$A_1 = 42°51'50''$ — $B_1 = 35°08'00''$

6°, III. Détermination de la différence entre la distance vraie et la distance apparente.

Valeur exacte, prise en 4° ci-dessus :

$da = +23'03'',0$ $\text{l.}\,da = 3{,}14082$	$db = +40'',0$ $\text{l.} = 1{,}6021$	$da = +21'23'',5$ $\text{l.}\,da = 3{,}16539$	$db = +36'',0$ $\text{l.}\,db = 1{,}5563$	$da = +25'52'',5$ $\text{l.}\,da = 3{,}19103$	$db = +33'',0$ $\text{l.}\,db = 1{,}5185$
$\text{l.}\cos A_1 = \bar{1}{,}78436$	$\text{l.}\cos B_1 = \bar{1}{,}9291$	$\text{l.}\cos A_1 = \bar{1}{,}83129$	$\text{l.}\cos B_1 = \bar{1}{,}9222$	$\text{l.}\cos A_1 = \bar{1}{,}86509$	$\text{l.}\cos B_1 = \bar{1}{,}9127$
$\text{l.}\,da \cos A_1 = 2{,}92518$	$\text{l.}\,db \cos B_1 = 1{,}5312$	$\text{l.}\,da \cos A_1 = 2{,}99668$	$\text{l.}\,db \cos B_1 = 1{,}4785$	$\text{l.}\,da \cos A_1 = 3{,}05612$	$\text{l.}\,db \cos B_1 = 1{,}4312$
$-da \cos A_1 = -11'01'',74$	$db \cos B_1 = +33'',98$	$-da \cos A_1 = -16'32'',40$	$db \cos B_1 = +30'',10$	$-da \cos A_1 = -18'57'',94$	$db \cos B_1 = +26'',99$
$+db \cos B_1 = +\ \ 33'',98$		$+db \cos B_1 = +\ \ 30'',10$		$+db \cos B_1 = +\ \ 26'',99$	
$(\Delta_v - \Delta_o) = -13'27'',76$		$(\Delta_v - \Delta_o) = -16'02'',30$		$(\Delta_v - \Delta_o) = -18'30'',95$	

7° CALCUL DES HEURES TEMPS MOYENS DE PARIS ET DES LONGITUDES CORRESPONDANTES.

. . . .

. . . .

. . . .

8° RÉSULTATS DES CALCULS, ET APPRÉCIATION DE LEUR DEGRÉ D'EXACTITUDE D'APRÈS LA THÉORIE DES ERREURS D'OBSERVATION.

. . . .

. . . .

. . . .

} Identiquement comme en 6° et 7° du TYPE N° 8.

TYPE DE CALCUL
N° 9,
PAR M. ROUYAUX.

DÉTERMINATION D'UNE VAL[EUR]

CALCUL EX[…]
par 7 hauteurs prises au[…]

avec appréciation du degré d'exactitude des résul[tats]

Relevé du carnet d'observation.

$2H_i$	Compteur $\mathfrak{M}$
35°40′	$1^h16^m01^s,5$
35°20′	$17^m04^s,3$
35°00′	$18^m08^s,1$
34°40′	$19^m12^s,1$ (haut^r milieu)
34°20′	$20^m16^s,3$
34°00′	$21^m20^s,3$
33°40′	$22^m25^s,5$

$e=+20''$; Bar^re $772^{mm},5$; $\theta + 15°$

Le 1er mars 1878, par $L=43°27'30''$ N^d et $G=1^h16^m10^s,3$ E^t, on a observé, *à l'horizon artificiel*, [...] dont le relevé est donné ci à gauche pour mémoire.

(Se reporter à la légende générale de la page 1, pour la sig[…]

(1) État absolu du compteur M déduit de la dernière régulation, suffisamment exact pour le calcul des éléments.

(2) Obtenu par les TABLES de M. Perrin, en considérant la D^on comme latitude, et la latitude comme Déclinaison.

(3) Déduit du carnet d'observation, qui fournit, avec une exactitude plus que suffisante, le rapport $\frac{\Delta M}{\Delta H}$, eu égard à ce qu'on a observé aux environs des circonstances favorables.

(4) Le ΔT total représente la correction à faire subir à l'heure et par suite à l'état absolu, en passant de la **hauteur milieu** à la *dernière hauteur*. Ici $\Delta' T$ est négatif, puisque l'éq. du temps va en diminuant; $\Delta'' T$ est positif, à cause du signe de ΔD combiné avec celui de $(p'+p'')$; enfin $\Delta''' T$ est toujours positif.

Heure temps moyen approchée de Paris pour la **hauteur milieu**.	Déclinaison calculée pour la **hauteur milieu**.	Équation [du temps] pour la **hauteur** [milieu]
$M=1^h19^m12^s,1$ $R'_M\,(1)=1^h28^m47^s,0$	D à $0^h=7°31'17'',2$ S^d p. p^elle $= -2'39'',7$	Éq. à 0^h t. v.= […] p. p^elle = […]
$T_{p,m}=2^h47^m59^s,1$	$D=7°28'37'',5$ S^d	Éq.= […]
Var. de M pour dernière haut^r par rapport à la haut^r milieu $+3^m13^s,4$	Variation ΔD pour *dernière haut^r* $-3'',1$	Variation pour *dernière h*[…]

3° CALCUL [...]

(5) Ce logarithme ne s'écrit qu'une fois sur un papier mobile, qu'on fait courir de colonne en colonne, pour effectuer les additions.

(6) Il est inutile d'écrire les valeurs de S pour chaque haut^r, puisque, pour des haut^res vraies équidistantes de 10′, les valeurs de S vont en augmentant de 5′ en 5′. De la valeur de S connue pour la **haut^r milieu**, on rayonne à droite et à gauche.

(7) Même observation pour les valeurs de (S − H), qui vont en diminuant de 5′ en 5′.

(8) On passera de $2 \log \sin^2 \frac{P}{2}$ à T_v, à l'aide des tables spéciales (Gnépratte, table XXXIX, ou Labrosse). A défaut, on aura recours aux tables logarithmiques ordinaires, en décomposant alors l'opération. Dans tous les cas, on se bornera au chiffre des dixièmes de seconde de temps. D'ailleurs, après la première colonne, on n'écrira plus que les minutes et les secondes, afin de simplifier les écritures.

Somme α.	0,142846 (5)
l. cos S (6).	$\bar{1}$,271699
l. sin (S − H) (7). . .	$\bar{1}$,944758
$2\,\text{l.}\sin^2\frac{P}{2}$.	$\bar{1}$,359303
T_v (8).	$3^h48^m34^s,0$
M.	$1^h16^m01^s,5$
$R=(T_v - M)$.	$2^h32^m32^s,5$

4° RÉSULTATS DES CALCULS; ET APPRÉCIATION DE LEUR DEGR[É …]

(Cette dernière partie du calcul est, dans son ensemble, indépendante des deux parties préc[édentes …]

Erreur probable de la moyenne des retards sur le temps vrai.

(q rang de chaque observation à partir de la **hauteur milieu**, compté négativement en avant de cette hauteur, et *positivement* en *arrière*.)

(3 dans $\frac{q}{3}$ est la moitié du nombre 7 des observations diminué de 1.)

Retards sur temps vrai.	*Erreurs résiduelles.* $x=(R-\text{moyenne des R})$	$\frac{q}{3}\Delta T$	*Erreurs résiduelles corrigées* $x'=\left(x+\frac{q}{3}\Delta T\right)$
$R_1=2^h32^m32^s,5$	$x_1=+2^s,5$	$-1^s,1$	$x'_1=+1^s,4$
$R_2=$ 32s,8	$x_2=+2^s,8$	$-0^s,7$	$x'_2=+2^s,1$
$R_3=$ 32s,0	$x_3=+2^s,0$	$-0^s,4$	$x'_3=+1^s,6$
$R_4=$ 30s,8	$x_4=+0^s,8$	$0^s,0$	$x'_4=+0^s,8$
$R_5=$ 29s,2	$x_5=-0^s,8$	$+0^s,4$	$x'_5=-0^s,4$
$R_6=$ 27s,7	$x_6=-2^s,3$	$+0^s,7$	$x'_6=-1^s,6$
$R_7=$ 25s,0	$x_7=-5^s,0$	$+1^s,1$	$x'_7=-3^s,9$

Moyenne des $R=2^h32^m30^s,0$

Moyenne des x' en valeur absolue $=\frac{11^s,8}{7}=1^s,69$

(n° 126 du Texte). Erreur probable commune à chacune des observations $=\pm 1^s,69 \times 0,845 = \pm 1^s,43$

Erreur probable de la moyenne des observations $=\pm\frac{1^s,43}{\sqrt{7}}=\pm 0^s,54$

Application du criterium de Chauvenet (9).

Nombre total des observations = 7.

$\frac{2\times 7-1}{2\times 7}$ (TABLE III, p. 534) = 0,929

Argument $\frac{x}{r}$ correspond^t à 0,929 dans TABLE II, p. 533 = 2,68

Erreur probable commune à chaque observation = $1^s,43$

Produit = $3^s,83$

Comme la 7e observation a son erreur résiduelle qui surpasse ce produit, elle doit être rejetée; toutes les autres doivent être conservées. Il faudrait alors à la rigueur recommencer, avec les observations conservées, les calculs de gauche; puis appliquer derechef le criterium de Chauvenet. Mais d'après l'inspection des six erreurs résiduelles de la forme x', restant en dehors de la 7e, on voit qu'il n'est pas nécessaire de se livrer à cette nouvelle investigation.

(9) Voir au n° 124 du Texte, l'esprit et le but de ce criterium.

Moyenne [...] conse[rvées ...] probable

Ayant él[iminé ...] on trouve […]

Nouvelle m[oyenne …]
Err^r prob^le […]

DE L'ÉTAT ABSOLU ET DE LA MARCHE D'UN CHRONOMÈTRE.

...ortif et rigoureux d'un état absolu,

...virons des circonstances favorables et employées isolément,

...uis calcul de la marche,

...d'après la théorie des erreurs d'observation. (Voir n° 128 du Texte.)

1° DONNÉES DU PROBLÈME.

...rie de 7 hauteurs du bord supérieur du Soleil, équidistantes entre elles et dans les circonstances mentionnées sur le carnet d'observation,

2° CALCULS PRÉPARATOIRES.

...on des différentes lettres. En particulier, T représente ici le temps moyen du lieu pour la *hauteur milieu*.)

...mps ...eu.	Correction de la **hauteur milieu**	Δ''T (2) corresp. à ΔD pour la *dernière hauteur*.	Δ'''T (3) corresp. à la différence de réfraction pour la *dernière hauteur*.	ΔT total (4) =Δ'T+Δ''T+Δ'''T	Pour la **hauteur milieu**.
	2H*i*=34°40'00''	(*tables* de M. Perrin.)			H= 17°00'58''
...32s,42	*e*= +20''	*p'*=—1',11 table I	ΔM=64s,5 pr ΔH=10'	Δ'T=—0s,03	L= 43°27'30'' col. cos=0,139138
—1s,38					
...31s,01	H*i*=17°20'10'' correct.= — 19'12''	*p''*=—0',08 table II	Δ'''T=+0s,85 pr ΔH =—8'' (4)	Δ''T=+0s,25	Δ= 97°28'37'' col. sin=0,003708
	H=17°00'58''	(*p'*+*p''*)=—1',19=—4s,76 pr 1'		Δ'''T=+0s,85	2S=157°57'05'' somme α=0,142846
					S= 78°58'33''
— 0s,03 (4)	Variation ΔH pr *dernière hauteur* } —8''	Δ''T=+0s,25 pr —3'',1 (4)		ΔT=+1s,07	(S—H)= 61°57'35''

...RITHMIQUE GÉNÉRAL.

		hauteur milieu.			
...46 (5)	0,142846 (5)	0,142846 (5)	0,142846 (5)	0,142846 (5)	0,142846 (5)
...05	$\bar{1}$,278285	$\bar{1}$,281540	$\bar{1}$,284770	$\bar{1}$,287975	$\bar{1}$,291156
...98	$\bar{1}$,945436	$\bar{1}$,945773	$\bar{1}$,946110	$\bar{1}$,946444	$\bar{1}$,946777
...49	$\bar{1}$,366567	$\bar{1}$,370159	$\bar{1}$,373726	$\bar{1}$,377265	$\bar{1}$,380779
...s,1	50m40s,1	51m42s,9	52m45s,5	53m48s,0	54m50s,5
...s,3	18m08s,1	19m12s,1	20m16s,3	21m20s,3	22m25s,5
...s,8	32s,0	30s,8	29s,2	27s,7	32m25s,0

...EXACTITUDE D'APRÈS LA THÉORIE DES ERREURS D'OBSERVATION.

... Elle pourra donc servir de guide, quel que soit le mode de procéder adopté pour ces parties.)

...tards qui sont ... et erreur ...tte moyenne.

...a 7e observation, ...s six autres :

...des R=2h32m30s,8
...tte moy. =±0s,36

Détermination de la marche et de son erreur probable.

Moy. des retds de M sr tps vr. du lieu, $(T_v - M)$ = 2h32m30s,80
Equation du temps = +12m31s,04

Retd de M sr le tps m. du lieu, $(T_m - M) = R_M$ = 2h45m01s,84 — Errr probble de $R_M = \pm 0^s,36$ (10)
Comparaison $(A - M)$ = 1h13m29s,30 — *Id.* de $(A - M) = \pm 0^s,45$ (11)

Le 1er mars, vers 4h du soir, $(T_m - A) = R_A$ = 1h31m32s,54 — *Id.* de $R_A = \pm\sqrt{(0^s,36)^2 + (0^s,45)^2} = \pm 0^s,58$

Le 22 févr., vers 3h (observat. *antérieurement* prise et calculée) $(T'_m - A') = R'_A$ = 1h31m02s,75 — *Id.* de $R'_A = \pm\sqrt{(0^s,44)^2 + (0^s,45)^2} = \pm 0^s,63$ (12)

$(R'_A - R_A) =$ — 29s,79 — *Id.* de $(R'_A - R_A) = \pm\sqrt{(0^s,58)^2 + (0^s,63)^2} = \pm 0^s,86$

$m = \frac{(R'_A - R_A)}{7,04} =$ — 4s,23 — *Id.* de $m = \pm \frac{0^s,86}{7,04} = \pm 0^s,122$

Cette marche correspond d'ailleurs à la température moyenne de l'intervalle des deux époques.

Nota important. — Il convient de rappeler que toutes les erreurs ci-contre sont le résultat des erreurs *accidentelles* d'observation (no 119 du texte), et qu'il faudrait, pour apprécier l'exactitude *absolue* des éléments obtenus, joindre audit résultat l'influence des erreurs *systématiques* (no 118). Malheureusement la théorie des probabilités est impuissante à cet effet. Dès lors une des principales préoccupations d'un bon observateur doit être de s'affranchir sans cesse des dernières erreurs en question, ce qui heureusement est souvent réalisable. (Voir TROISIÈME PARTIE, §§ II et III.)

---

(10) Erreur, calculée dans 2e la colonne à gauche ci-contre, provenant seulement de la non-concordance des états, et supposant par suite la latitude et la déclinaison exactement connues. — Lorsqu'on ne possède pas des valeurs à la seconde près pour ces deux derniers éléments, on doit en tenir compte dans l'erreur probable de R_M comme il est indiqué dans l'*exemple* III du no 128 du texte. On a alors :

Erreur probable de $R_m = \pm\sqrt{(0,36)^2 + (\text{erreur probable due à Lat}^{de})^2 + (\text{erreur probable due à Décl}^{on})^2}$,

les deux erreurs de L et D étant préalablement converties en *secondes de temps*.

(11) On suppose ici 0s,30 (no 198) pour erreur probable de chacune des comparaisons prises *avant* et *après* la séance d'observation, et 0s,10 pour erreur probable de différence de marche entre le compteur et le chronomètre, ce qui donne (no 128) pour erreur résultante $= \pm\sqrt{(0^s,30)^2 + (0^s,30)^2 + (0^s,10)^2} = \pm 0^s,45$.

(12) Erreur probable supposée du dernier état absolu.

TYPE DE CALCUL N° 10 ET DERNIER, PAR M. PERRIN.

ÉTABLISSEMENT DE LA FORMULE COMPLÈTE DE MARCHE D'UN CHRONOMÈTRE.

CALCUL DES CONSTANTES DE LA FORMULE, par la méthode d'interpolation de Cauchy pour la résolution d'une suite d'équations sous forme de séries. (Voir nos 124 à 126 du texte.)

NOTA. Le lecteur ne devra pas s'effrayer de la longueur du présent calcul. Cette longueur diminue relativement à mesure que le nombre des chronomètres à considérer augmente, attendu que les variations de la température et du temps sont des éléments communs à tous ceux-ci. Or comme ce calcul n'est recommandable que pour les campagnes scientifiques, et qu'en pareil cas on dispose d'un grand nombre de montres, l'ensemble total des opérations ne dépasse pas un laps de temps fort acceptable, eu égard à l'importance du but à atteindre.

1° DONNÉES DU PROBLÈME.

Les données ci-dessous, déduites d'observations empruntées à la première brochure (1874) de M. de Magnac sur les chronomètres, correspondent au nombre 22°,7 pour la température moyenne θ_1, relative à l'époque t_1 prise comme point de départ des variations du temps. De son côté, l'unité de temps adoptée est égale à 5 jours.

	Nombre de jours ayant déterminé les marches; et par suite intervalle des états absolus.	Marches observées z.	Constante de la marche.	Constante de la 1re puissance des variat. de la température.	1re puissance x des variations de la température.	Constante du carré des variat. de la température.	Carré x^2 des variations de la température.	Constante de la 1re puissance des variations du temps.	1re puissance y des variations du temps.	Constante du produit des variat. de température par les variat. du temps.	Produit xy des variations de la température par les variations du temps.	Constante du carré des variations du temps.	Carré y^2 des variations du temps.
(1)	10	+ 2,94	= a	+ b	× −0,9	+ c	× + 0,8	+ d	× −50,6	+ e	× + 45,5	+ f	× +2560
(2)	10	+ 3,71	= a	+ b	× −7,8	+ c	× +60,8	+ d	× −42,0	+ e	× +327,6	+ f	× +1764
(3)	12	+ 5,11	= a	+ b	× +5,5	+ c	× +30,2	+ d	× −34,6	+ e	× −190,3	+ f	× +1197
(4)	10	+ 5,05	= a	+ b	× +5,9	+ c	× +34,8	+ d	× −30,4	+ e	× −179,3	+ f	× + 924
(5)	12	+ 5,91	= a	+ b	× +7,1	+ c	× +50,4	+ d	× −25,6	+ e	× −181,7	+ f	× + 655
(6)	14	+ 5,93	= a	+ b	× +7,0	+ c	× +49,0	+ d	× −20,8	+ e	× −145,6	+ f	× + 433
(7)	10	+ 5,68	= a	+ b	× +5,2	+ c	× +27,0	+ d	× −14,2	+ e	× − 73,8	+ f	× + 202
(8)	10	+ 3,84	= a	+ b	× +1,2	+ c	× + 1,4	+ d	× − 2,0	+ e	× − 2,4	+ f	× + 4
(9)	12	+ 3,35	= a	+ b	× −4,5	+ c	× +20,2	+ d	× +10,8	+ e	× − 48,6	+ f	× + 117
(10)	10	+ 4,11	= a	+ b	× +1,5	+ c	× + 2,2	+ d	× +16,6	+ e	× + 24,9	+ f	× + 276

2° APPROPRIATION DES DONNÉES AUX FORMULES GÉNÉRALES; ET CALCUL DE LA PREMIÈRE VALEUR α DE a.

(I) $\nu z = a \times \nu + b \times \nu x + c \times \nu x^2 + d \times \nu y + e \times \nu xy + f \times \nu y^2 + \ldots$

(I) $Z = a \times A + b \times B + c \times C + d \times D + e \times E + f \times F + \ldots$

Pour approprier les données précédentes aux formules générales de la forme (I), il faut multiplier (n° 135) chaque équation par la racine carrée ν du *poids* correspondant, ce poids étant expressément entendu suivant la définition du n° 129. — A défaut des erreurs *probables* afférentes aux diverses équations, erreurs qui n'ont pas été déterminées ici, et qui sont nécessaires pour avoir les *poids rigoureux*, nous supposerons approximativement les quantités ν proportionnelles aux intervalles des observations. Notre manière de faire suppose que tous les états absolus, ainsi que les températures correspondantes, sont respectivement affectés des mêmes erreurs probables. En effet, dans cette hypothèse, les erreurs probables afférentes aux diverses équations sont inversement proportionnelles aux nombres de jours qui ont servi à déterminer les marches; or les racines carrées des poids, de leur côté, sont inversement proportionnelles à ces mêmes erreurs probables (n° 129). Par suite, elles sont directement proportionnelles auxdits nombres de jours, comme nous l'avons du reste déjà établi au n° 140. Afin de simplifier les calculs, nous prendrons les racines carrées des poids égales aux *dixièmes* de ces mêmes nombres, ce qui revient à prendre pour *unité de poids* celui qui se rapporte à une marche déduite d'un intervalle de 10 jours. — En tout état de cause, la première dominante A valant partout + 1, il n'y a aucun changement de signe à apporter aux équations de départ, qui, par l'introduction des racines carrées des poids, deviennent :

Ces colonnes *ne se calculent* que successivement, après l'appréciation

	Racine carrée du poids de chaque équation ν =	Z = νz	A	B (de la 1re valeur α de a.)	C (de la 1re valeur β de b.)	D (de la 1re valeur γ de c.)
(1)	1,0	+ 2,94 = a ×	1,0 − b ×	0,9 + c ×	0,8 − d ×	50,6
(2)	1,0	+ 3,71 = a ×	1,0 − b ×	7,8 + c ×	60,8 − d ×	42,0
(3)	1,2	+ 6,13 = a ×	1,2 + b ×	6,6 + c ×	36,2 − d ×	41,5
(4)	1,0	+ 5,05 = a ×	1,0 + b ×	5,9 + c ×	34,8 − d ×	30,4
(5)	1,2	+ 7,09 = a ×	1,2 + b ×	8,5 + c ×	60,5 − d ×	30,7
(6)	1,4	+ 8,30 = a ×	1,4 + b ×	9,8 + c ×	68,6 − d ×	29,1
(7)	1,0	+ 5,68 = a ×	1,0 + b ×	5,2 + c ×	27,0 − d ×	14,2
(8)	1,0	+ 3,84 = a ×	1,0 + b ×	1,2 + c ×	1,4 − d ×	2,0
(9)	1,2	+ 4,02 = a ×	1,2 − b ×	5,4 + c ×	24,2 + d ×	13,0
(10)	1,0	+ 4,11 = a ×	1,0 + b ×	1,5 + c ×	2,2 + d ×	16,6
		+ 50,87 = a ×	11,0 + b ×	24,6 + c ×	316,5 + d ×	210,9

L'éq. précédente représente : (I *bis*) $S_A Z = a \times S_A A + b \times S_A B + c \times S_A C + d \times S_A D + \ldots$

(II) $$\alpha = \frac{S_A Z}{S_A A} = \frac{+50,87}{11,0} = +4,624.$$

3° Appréciation, par les différences Z_1, de la première valeur α de a; et calcul de la première valeur β de b.

$$\text{(III)} \qquad Z_1 = Z - \alpha \times A$$

$$\text{(I')} \left\{ \begin{array}{l} Z_1 = b \times \left(B - S_A B \times \dfrac{A}{S_A A}\right) + c\left(C - S_A C \times \dfrac{A}{S_A A}\right) + d\left(D - S_A D \times \dfrac{A}{S_A A}\right) + \ldots \\ \text{ou} \quad Z_1 = b \times B_1 + c \times C_1 + d \times D_1 + \ldots \end{array} \right.$$

Ces colonnes *ne se calculent* que successivement, après l'appréciation

			de la 1re valeur β de b	de la 1re valeur γ de c.
	Z_1	B_1	C_1	D_1
(1)	− 1,68 =	− b × 3,1	− c × 28,0	− d × 31,4
(2)	− 0,91 =	− b × 10,0	+ c × 32,0	− d × 22,8
(3)	+ 0,58 =	+ b × 3,9	+ c × 1,6	− d × 18,5
(4)	+ 0,43 =	+ b × 3,7	+ c × 6,0	− d × 11,2
(5)	+ 1,54 =	+ b × 5,8	+ c × 25,8	− d × 7,7
(6)	+ 1,83 =	+ b × 6,7	+ c × 28,4	− d × 2,3
(7)	+ 1,04 =	+ b × 3,0	− c × 1,8	+ d × 5,0
(8)	− 0,78 =	− b × 1,0	− c × 27,4	+ d × 17,2
(9)	− 1,53 =	− b × 8,1	− c × 10,4	+ d × 36,0
(10)	− 0,51 =	− b × 0,7	− c × 26,6	+ d × 35,8
Preuves. Somme des +	+ 5,42	+ 23,1	+ 93,8	+ 94,0
Somme des −	− 5,41	− 22,9	− 94,2	− 93,9
Différence	+ 0,01	+ 00,2	− 00,4	+ 00,1
Soit	$S_A Z_1 = 0$	$S_A B_1 = 0$	$S_A C_1 = 0$	$S_A D_1 = 0.$

On commencera par calculer les diverses différences Z_1 avec la formule (III). — Ces diverses différences Z_1 se trouvent ici supérieures chacune à la limite voulue 0s,3 (n° 140), qu'elles ne devraient pas dépasser, pour qu'on soit en droit de regarder les formules générales de la forme (I) comme pouvant se réduire à leur *premier* terme.

Changeons les signes des équations (1), (2), (8), (9) et (10), qui correspondent à des valeurs négatives de la dominante B_1, ce qui revient à rendre positifs tous les coefficients de b. On aura :

Ces colonnes *ne s'écrivent* que successivement, après l'appréciation

			de la 1re valeur β de b	de la 1re valeur γ de c
(1)	+ 1,68 =	+ b × 3,1	+ c × 28,0	+ d × 31,4
(2)	+ 0,91 =	+ b × 10,0	− c × 32,0	+ d × 22,8
(3)	+ 0,58 =	+ b × 3,9	+ c × 1,6	− d × 18,5
(4)	+ 0,43 =	+ b × 3,7	+ c × 6,0	− d × 11,2
(5)	+ 1,54 =	+ b × 5,8	+ c × 25,8	− d × 7,7
(6)	+ 1,83 =	+ b × 6,7	+ c × 28,4	− d × 2,3
(7)	+ 1,04 =	+ b × 3,0	− c × 1,8	+ d × 5,0
(8)	+ 0,78 =	+ b × 1,0	+ c × 27,4	− d × 17,2
(9)	+ 1,53 =	+ b × 8,1	+ c × 10,4	− d × 36,0
(10)	+ 0,51 =	+ b × 0,7	+ c × 26,6	− d × 35,8
	+ 10,83 =	+ b × 46,0	+ c × 120,4	− d × 69,5

L'équation précédente représente : (I' *bis*) $S_{B_1} Z_1 = b \times S_{B_1} B_1 + c \times S_{B_1} C_1 + d \times S_{B_1} D_1 + \ldots$

$$\text{(II')} \qquad \beta = \frac{S_{B_1} Z_1}{S_{B_1} B_1} = \frac{+10{,}83}{46{,}0} = +0{,}235$$

4° Appréciation, par les différences Z_2, de la première valeur β de b; et calcul de la première valeur γ de c.

$$(\text{III}')\qquad Z_2 = Z_1 - \beta \times B_1$$

$$(\text{I}'')\left\{\begin{array}{l} Z_2 = c \times \left(C_1 - S_{B_1}C_1 \times \dfrac{B_1}{S_{B_1}B_1}\right) + d \times \left(D_1 - S_{B_1}D_1 \times \dfrac{B_1}{S_{B_1}B_1}\right) + \dots \\ \text{ou}\quad Z_2 = c \times C_2 + d \times D_2 + \dots \end{array}\right.$$

	Z_2		C_2		D_2 (Cette colonne *ne se calcule* qu'après l'appréciation de la 1re valeur γ de c.)
(1)	+ 0,95	= + c ×	19,8	+ d ×	36,1
(2)	− 1,44	= − c ×	58,2	+ d ×	37,9
(3)	− 0,34	= − c ×	8,6	− d ×	12,6
(4)	− 0,44	= − c ×	3,6	− d ×	5,6
(5)	+ 0,17	= + c ×	10,6	+ d ×	1,1
(6)	+ 0,25	= + c ×	10,8	+ d ×	7,8
(7)	+ 0,33	= − c ×	9,6	+ d ×	9,5
(8)	+ 0,54	= + c ×	24,8	− d ×	15,7
(9)	− 0,38	= − c ×	10,8	− d ×	23,8
(10)	+ 0,34	= + c ×	24,8	− d ×	34,7
Preuves. Somme des +	+ 2,58		+ 90,8		+ 92,4
Somme des −	− 2,60		− 90,8		− 92,4
Différence	− 0,02		+ 00,0		+ 00,0
Soit	$S_{B_1}Z_2 = 0$		$S_{B_1}C_2 = 0$		$S_{B_1}D_2 = 0$

La plupart des différences Z_2 se trouvent supérieures à la limite voulue 0e,3 (n° 140), qu'elles ne devraient pas dépasser, pour qu'on soit en droit de regarder les formules générales de la forme (I) comme pouvant se réduire à leurs *deux premiers* termes.

Changeons les signes des équations (2), (3), (4), (7) et (9), qui correspondent à des valeurs négatives de la dominante C_2; ce qui revient à rendre positifs tous les coefficients de c. On aura :

					(Cette colonne *ne s'écrit* qu'après l'appréciation de la 1re valeur γ de c.)
(1)	+ 0,95	= + c ×	19,8	+ d ×	36,1
(2)	+ 1,44	= + c ×	58,2	− d ×	37,9
(3)	+ 0,34	= + c ×	8,6	+ d ×	12,6
(4)	+ 0,44	= + c ×	3,6	+ d ×	5,6
(5)	+ 0,17	= + c ×	10,6	+ d ×	1,1
(6)	+ 0,25	= + c ×	10,8	+ d ×	7,8
(7)	− 0,33	= + c ×	9,6	− d ×	9,5
(8)	+ 0,54	= + c ×	24,8	− d ×	15,7
(9)	+ 0,38	= + c ×	10,8	+ d ×	23,8
(10)	+ 0,34	= + c ×	24,8	− d ×	34,7
	+ 4,52	= + c ×	181,6	− d ×	10,8

L'équat. précédente représente : $(\text{I}''\ bis)\quad S_{C_2}Z_2 = c \times S_{C_2}C_2 + d \times S_{C_2}D_2 + \dots$

$$(\text{II}'')\qquad \gamma = \frac{S_{C_2}Z_2}{S_{C_2}C_2} = \frac{+4{,}52}{181{,}6} = +\,0{,}0249$$

5° APPRÉCIATION, PAR LES DIFFÉRENCES Z_3, DE LA PREMIÈRE VALEUR γ DE c; ET CALCUL DE LA PREMIÈRE VALEUR δ DE d.

(III'') $$Z_3 = Z_2 - \gamma \times C_2$$

(I''') $$\begin{cases} Z_3 = d \times \left(D_2 - Sc_2D_2 \times \dfrac{C_2}{Sc_2C_2}\right) + e \times \left(E_2 - Sc_2E_2 \times \dfrac{C_2}{Sc_2C_2}\right) + \ldots \\ \text{ou} \quad Z_3 = d \times D_3 + e \times E_3 + \ldots \end{cases}$$

La colonne en $e \times E_3$ *ne se calculerait* qu'après l'appréciation de la 1[re] valeur δ de d.

	Z_3		D_3
(1)	+ 0,46	= + d ×	37,3
(2)	− 0,01	= − d ×	34,4
(3)	+ 0,13	= + d ×	13,1
(4)	+ 0,35	= + d ×	5,8
(5)	− 0,09	= + d ×	1,7
(6)	− 0,02	= + d ×	8,4
(7)	− 0,57	= − d ×	8,9
(8)	− 0,08	= − d ×	14,2
(9)	+ 0,11	= + d ×	24,4
(10)	− 0,28	= − d ×	33,2
Preuves. Somme des +	+ 1,05		+ 90,7
Somme des −	− 1,05		− 90,7
Différence	0,00		00,0
Soit	$Sc_2Z_3 = 0$		$Sc_2D_3 = 0$

Ici il n'y a que deux différences Z_3 qui se trouvent supérieures à la limite voulue 0[s],3 (n° 140). Néanmoins, on n'est pas encore en droit de regarder les formules générales de la forme (I) comme pouvant se réduire à leurs *trois premiers* termes; et il y a lieu de pousser plus loin.

Changeons les signes des équations (2), (7), (8) et (10), qui correspondent à des valeurs négatives de la dominante D_3; ce qui revient à rendre positifs tous les coefficients de d. On aura :

La colonne en $e \times E_3$ *ne s'écrirait* qu'après l'appréciation de la 1[re] valeur δ de d.

(1)	+ 0,46	= + d ×	37,3
(2)	+ 0,01	= + d ×	34,4
(3)	+ 0,13	= + d ×	13,1
(4)	+ 0,35	= + d ×	5,8
(5)	− 0,09	= + d ×	1,7
(6)	− 0,02	= + d ×	8,4
(7)	+ 0,57	= + d ×	8,9
(8)	+ 0,08	= + d ×	14,2
(9)	+ 0,11	= + d ×	24,4
(10)	+ 0,28	= + d ×	33,2
	+ 1,88	= + d ×	181,4

L'équat. précédente représente : (I''' *bis*). $$S_{D_3}Z_3 = d \times S_{D_3}D_3 + e \times S_{D_3}E_3 + \ldots$$

(II''') $$\delta = \frac{S_{D_3}Z_3}{S_{D_3}D_3} = \frac{+1,88}{181,4} = +0,0104$$

6° APPRÉCIATION, PAR LES DIFFÉRENCES Z_4, DE LA VALEUR δ DE d; ET CALCUL DES SECONDES VALEURS DE c, b ET a.

(III''') $$Z_4 = Z_3 - \delta \times D_3$$

		Z_4
(1)		+ 0,07
(2)		— 0,35
(3)		— 0,01
(4)		+ 0,29
(5)		— 0,11
(6)		— 0,11
(7)		+ 0,48
(8)		— 0,07
(9)		— 0,14
(10)		— 0,06
Preuves.	Somme des +	+ 0.84
	Somme des —	— 0,85
	Différence	— 0,01
	Soit	$S_{D_3}Z_4 = 0$

A part les différences —0,35 et +0,48, toutes les différences Z_4 sont dans la limite voulue 0s,3 (n° 140). Pour être rigoureux, il y aurait donc lieu de rejeter les équations (2) et (7), comme entachées d'erreurs *accidentelles* trop fortes, ou encore d'erreurs autres que les erreurs d'observation. On recommencerait ensuite tous les calculs précédents avec les 8 équations restantes. Mais ce serait aller au delà de la rigueur réclamée par la pratique; et nous nous arrêterons au point où nous sommes arrivés.

Dès lors, avec la valeur δ déduite de l'équation (II'''), et que nous regardons comme la bonne valeur de d, soit avec $d = + 0,0104$, calculons les valeurs exactes de c, b et a.

Pour cela, introduisons d'abord la valeur de d dans l'équation (I'' *bis*); et nous aurons :

$$+ 4,52 = + c \times 181,6 - 0,0104 \times 10,8;$$

d'où :

$$c = + 0,0255.$$

Transportons ensuite les valeurs de c et d dans l'équation (I' *bis*), ce qui nous donnera :

$$+ 10,83 = b \times 46,0 + 0,0255 \times 120,4 - 0,0104 \times 69,5;$$

d'où :

$$b = + 0,184.$$

Remplaçons enfin dans l'équation (I *bis*) les coefficients b, c, d par les valeurs que nous venons d'obtenir; et nous aurons :

$$+ 50,87 = a \times 11,0 + 0,184 \times 24,6 + 0,0255 \times 316,5 - 0,0104 \times 210,9;$$

d'où nous tirons :

$$a = + 3^s,68.$$

L'équation de la marche normale du chronomètre considéré est donc :

$$z = + 3^s,68 + 0^s,184 \times x + 0^s,0255\, x^2 + 0^s,0104\, y;$$

ou bien :

$$z = + 3^s,68 + 0^s,184\,(\theta^o - 22^o,7) + 0^s,0255\,(\theta^o - 22^o,7)^2 + 0^s,0104\,(t - t_1),$$

en se rappelant que t_1 est l'époque adoptée comme point de départ des variations du temps.

FIN DES TYPES DE CALCUL.

TABLES DIVERSES

POUR L'USAGE

DES NOUVELLES MÉTHODES DE NAVIGATION

TABLE I.

Tableau donnant, pour des valeurs déterminées du rayon de courbure en un point d'une courbe de hauteur, la projection d'une corde sur le rayon, c'est-à-dire la flèche du double de l'arc correspondant à cette corde.

DRESSÉ PAR M. PERRIN.

RAYON de courbure en fonction du rayon de la terre. $\rho = \left(\frac{\operatorname{tg} P}{\sin Z}\right)$	LONGUEUR DE LA CORDE EN MINUTES DE L'ÉQUATEUR SUR LA CARTE.									
	$c=10$	$c=20$	$c=30$	$c=40$	$c=50$	$c=60$	$c=70$	$c=80$	$c=90$	$c=100$
	FLÈCHE en minutes de l'équateur.	FLÈCHE en minutes de l'équateur.	FLÈCHE en minutes de l'équateur.	FLÈCHE en minutes de l'équateur.	FLÈCHE en minutes de l'équateur.	FLÈCHE en minutes de l'équateur.	FLÈCHE en minutes de l'équateur.	FLÈCHE en minutes de l'équateur.	FLÈCHE en minutes de l'équateur.	FLÈCHE en minutes de l'équateur.
0,01	1,45	5,82	13,09	23,27	36,36	52,36	71,27	93,08	117,81	145,45
0,02	0,73	2,91	6,54	11,63	18,18	26,18	35,63	46,54	58,90	72,73
0,03	0,48	1,94	4,36	7,76	12,12	17,45	23,76	31,03	39,27	48,48
0,04	0,36	1,45	3,27	5,82	9,09	13,09	17,82	23,27	29,45	36,36
0,05	0,29	1,16	2,62	4,65	7,27	10,47	14,25	18,62	23,56	29,09
0,06	0,24	0,97	2,18	3,88	6,06	8,73	11,88	15,51	19,64	24,24
0,07	0,21	0,83	1,87	3,32	5,19	7,48	10,18	13,30	16,83	20,78
0,08	0,18	0,73	1,64	2,91	4,54	6,54	8,91	11,64	14,73	18,18
0,09	0,16	0,65	1,45	2,58	4.04	5,82	7,92	10,34	13,09	16,16
0,10	0,14	0,58	1,31	2,33	3,64	5,24	7,13	9,31	11,78	14,55
0,11	0,13	0,53	1,19	2,11	3,30	4,76	6,48	8,46	10,71	13,22
0,12	0,12	0,49	1,09	1,94	3,03	4.36	5,94	7,76	9,82	12,12
0,13	0,11	0,45	1.01	1,79	2,80	4,03	5,48	7,16	9,06	11,19
0,14	0,10	0,42	0,93	1,66	2,60	3,74	5,09	6,65	8,42	10,39
0,15	0,10	0,39	0,87	1,55	2,42	3,49	4,75	6,21	7,85	9,70
0,16	0.09	0,36	0,82	1,45	2,27	3,27	4,45	5,82	7,37	9,09
0,17	0,09	0,34	0.77	1,37	2,14	3.08	4,19	5,48	6,93	8,54
0,18	0,08	0,32	0,73	1,29	2,02	2.90	3,96	3,17	6,55	8,08
0,19	0,08	0,31	0,69	1,22	1,91	2,75	3,75	4,90	6.20	7,66
0,20	0,07	0,29	0,65	1,16	1,82	2,61	3,56	4,65	5,89	7,27
0,22	0,07	0.26	0,59	1,06	1,65	2,38	3,24	4,23	5,36	6,61
0,24	0,06	0,24	0,54	0,97	1,51	2,18	2,97	3,88	4,91	6,06
0,26	0,06	0,22	0,50	0,89	1,40	2,01	2,74	3,58	4,53	5.60
0,28	0,05	0,21	0,47	0,83	1,30	1,87	2,55	3,33	4,21	5,20
0,30	0,05	0,19	0,44	0,78	1,21	1.74	2,38	3,10	3,93	4,85
0,35	0.04	0,17	0.37	0,66	1,04	1,50	2,04	2,66	3,36	4,16
0,40	0,04	0,15	0,33	0,58	0,91	1,31	1,78	2,33	2,95	3,64
0,45	0,03	0,13	0,29	0,52	0,81	1,16	1,58	2,07	2.62	3,23
0,50	0,03	0,12	0,26	0,46	0,73	1,05	1,43	1,86	2,36	2,91
0,55	0,03	0,11	0,24	0.42	0,66	0,95	1,30	1,69	2,14	2,64
0,60	0,02	0,10	0,22	0,39	0,61	0,87	1,19	1,55	1,96	2,42
0,70	0,02	0,08	0,19	0,33	0,52	0,75	1,02	1,33	1,68	2,08
0,80	0,02	0,07	0,16	0,29	0,45	0,65	0,89	1,16	1,47	1,82
0,90	0,02	0,06	0,14	0,26	0,40	0,58	0,79	1,03	1,31	1,62
1,00	0,02	0,06	0,13	0,23	0,36	0,52	0,71	0,93	1,18	1,46
1,20	0,01	0,05	0,11	0,19	0,30	0,44	0,59	0,78	0,98	1,21
1,40	0,01	0,04	0,09	0.17	0,26	0,37	0,51	0,67	0,84	1,04
1,60	0.01	0,04	0,08	0,15	0,23	0.33	0,45	0,58	0,74	0,91
1,80	0,01	0,03	0,07	0,13	0,20	0,29	0,40	0.52	0,66	0,81
2,00	0,01	0,03	0,06	0.12	0,18	0,26	0,35	0,47	0,59	0,73
2,20	0,01	0,03	0,06	0,11	0,16	0,24	0,32	0,42	0,54	0,66
2,40.	0,01	0,02	0,05	0,10	0,15	0,22	0,30	0,39	0,49	0,61
2,60	6,01	0,02	0,05	0,09	0,14	0,20	0,27	0,36	0,45	0,56
2,80	0,01	0,02	0,05	0,08	0,13	0,19	0,25	0.33	0,42	0,52
3,00	0,00	0,02	0,04	0,08	0,12	0,17	0,24	0,31	0,39	0,43

NOTA. Pour évaluer le rayon de courbure en *minutes de l'équateur*, il suffit, d'après le n° 31 du Texte, de multiplier par 3438 sa valeur en fonction du rayon de la terre.

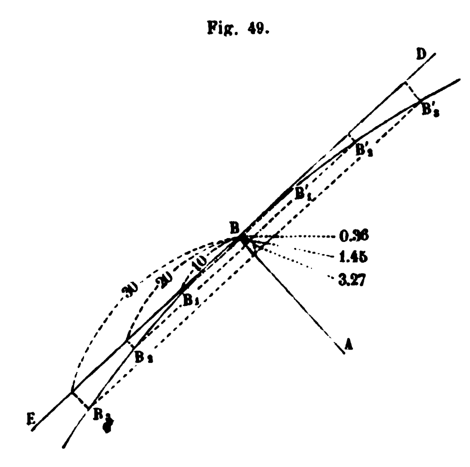
USAGE DU TABLEAU PRÉCÉDENT

POUR TRACER UNE COURBE DE HAUTEUR POINT PAR POINT, PAR LE PROCÉDÉ DE M. PERRIN. (VOIR N° 32 DU TEXTE.)

Une fois qu'on a obtenu le point déterminatif de la droite de hauteur, et qu'on a tracé cette droite par le procédé de la tangente (n° 10), il faut examiner si elle se confond pratiquement avec la courbe de hauteur. A cet effet, on prend, dans la *table I* des TABLES de M. Perrin, le rapport $\left(\frac{\operatorname{tg} P}{\sin Z}\right)$. On cherche alors dans le présent TABLEAU les flèches correspondant à des cordes de 10, 20, 30,..... 100 *minutes de l'équateur*, suivant l'écart que l'on peut avoir à craindre entre la position exacte du navire et le point déterminatif de la droite de hauteur.

Si ces flèches sont négligeables, on regarde la tangente comme la représentation exacte de la courbe de hauteur. Si, au contraire, ces projections atteignent une certaine valeur, on peut en tenir compte en traçant une portion du cercle osculateur de ladite courbe.

Fig. 49.



A cet effet, du point déterminatif B, *fig.* 49, de la droite de hauteur comme centre, on décrit, de part et d'autre de ce point, des arcs de cercle avec des cordes égales à 10, 20,..... 100 minutes de l'équateur. Puis sur chacun de ces arcs, on marque des points distants de la droite de hauteur ED de quantités respectivement égales aux flèches des cordes correspondantes. Ainsi, par exemple, le rapport $\left(\frac{\operatorname{tg} P}{\sin Z}\right) = \rho$ étant de 0,04 en fonction du rayon de la terre (soit de $0{,}04 \times 3438 = 137{,}5$ en minutes de l'équateur), on prendra sur les deux premiers arcs de cercle décrits avec 10 minutes de l'équateur pour rayon, deux points B_1 et B_1' distants de DE de la quantité 0,36 de minute de l'équateur trouvée dans le *tableau* en faisant cadrer $\rho = 0{,}04$ avec $c = 10$. De même sur les deux seconds arcs de cercle décrits avec 20 minutes pour rayon, on prendra des points B_2 et B_2' distants de DE de la quantité $1^{\text{min}},45$, et ainsi de suite. En faisant passer une courbe continue par B et par tous les points B_1, B'_1, B_2, B_2'..., marqués comme il vient d'être dit, on aura une partie du cercle osculateur tangent à la courbe de hauteur au point B.

Il ne peut y avoir indécision sur le sens dans lequel il faut porter les flèches; car on sait que :

Avec $P < 6^h$, la courbe de hauteur a sa *concavité* tournée vers l'astre;
Avec $P > 6^h$, elle a sa *convexité* tournée vers l'astre.

Pour le Soleil, comme P est en général plus petit que 6^h, on peut dire que les flèches doivent en principe être portées dans le sens de l'astre.

— Le tableau n'a pas été prolongé au delà de la valeur $\left(\frac{\operatorname{tg} P}{\sin Z}\right) = 3{,}00$, parce que toute correction sera alors inutile, à moins d'erreurs très-grandes sur l'écart entre la position exacte du navire et le point déterminatif de la droite de hauteur.

Lorsque ce rapport est $> 3{,}00$, on peut dire que la tangente se confond pratiquement avec la courbe de hauteur.

— Lorsque la hauteur observée est très-grande, et comprise entre 80° et 85° environ, la courbure de la courbe de hauteur devient très-prononcée. Néanmoins le rayon de courbure est encore trop long, eu égard au champ habituel qu'embrassent les cartes à grand point, pour qu'on puisse l'employer à tracer le cercle osculateur au moyen d'un compas. Mais alors le rapport $\left(\frac{\operatorname{tg} P}{\sin Z}\right) = \rho$ varie rapidement; et la *table* sus-mentionnée de M. Perrin ne le donne plus avec assez d'exactitude, pour s'en servir comme argument d'entrée dans le TABLEAU qui nous occupe.

Il est plus rigoureux, pour le cas dont il s'agit, de substituer à l'usage dudit TABLEAU le calcul direct de chaque flèche correspondant à une corde de longueur c en minutes de l'équateur. Or si on remarque que la corde est moyenne proportionnelle entre sa projection sur le diamètre du cercle osculateur aboutissant au point déterminatif et ce diamètre lui-même, on a d'abord :

$$\textit{Flèche en minutes de l'équateur} = \frac{c^2 \sin 1'}{2\rho}.$$

C'est cette relation, soit dit en passant, qui sert de base à la construction dudit tableau. Mais, pour le calcul direct en question, il faut la changer en la suivante :

$$\textit{Flèche en minutes de l'équateur} = \frac{c^2 \sin 1'}{2} \, \frac{\cos D \cos P}{\cos H},$$

en remplaçant ρ par une de ses formes (n° 31) qui ne contient que des quantités déjà employées dans le calcul du point *déterminatif* de la droite de hauteur.

Voici la valeur du logarithme du coefficient $\frac{c^2 \sin 1'}{2}$ pour diverses valeurs de c :

$c =$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
l. $\frac{c^2 \sin 1'}{2}$	$\bar{2},1627$	$\bar{2},7648$	$\bar{1},1169$	$\bar{1},3668$	$\bar{1},5606$	$\bar{1},7190$	$\bar{1},8529$	$\bar{1},9689$	0,0712	0,1627

Au moyen de ces valeurs du coefficient en question, le calcul sera très-rapide; car il suffira de prendre les logarithmes de cos D, cos P et cos H avec 3 ou 4 décimales au plus. — Par ailleurs, suivant que c'est le procédé Marcq Saint-Hilaire ou le procédé par la latitude estimée que l'on a employé pour trouver le point déterminatif de la droite de hauteur, on connaît déjà log cos P ou log cos D = log sin Δ.



TABLE II.

(Table de probabilité des erreurs accidentelles [N° 123 du texte].)

Valeurs de l'intégrale définie $P_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{t=0}^{t=\rho\frac{x}{r}} e^{-t^2} dt$ **correspondant à diverses valeurs de** $\frac{x}{r}$, ρ. **représentant le nombre 0,4769363.......**

Nota. **Cette Table fournit la probabilité P_2 que, dans une série d'observations, chaque erreur commise x est à l'erreur probable r dans le rapport $\frac{x}{r}$ inscrit dans la première colonne. — Il importe d'ailleurs de rappeler que t est une notation adoptée par tous les auteurs de calculs des probabilités, avec la signification spécifiée au n° 121. On doit bien se garder de confondre le présent usage de cette lettre avec l'emploi habituel qu'on en fait pour désigner le temps.**

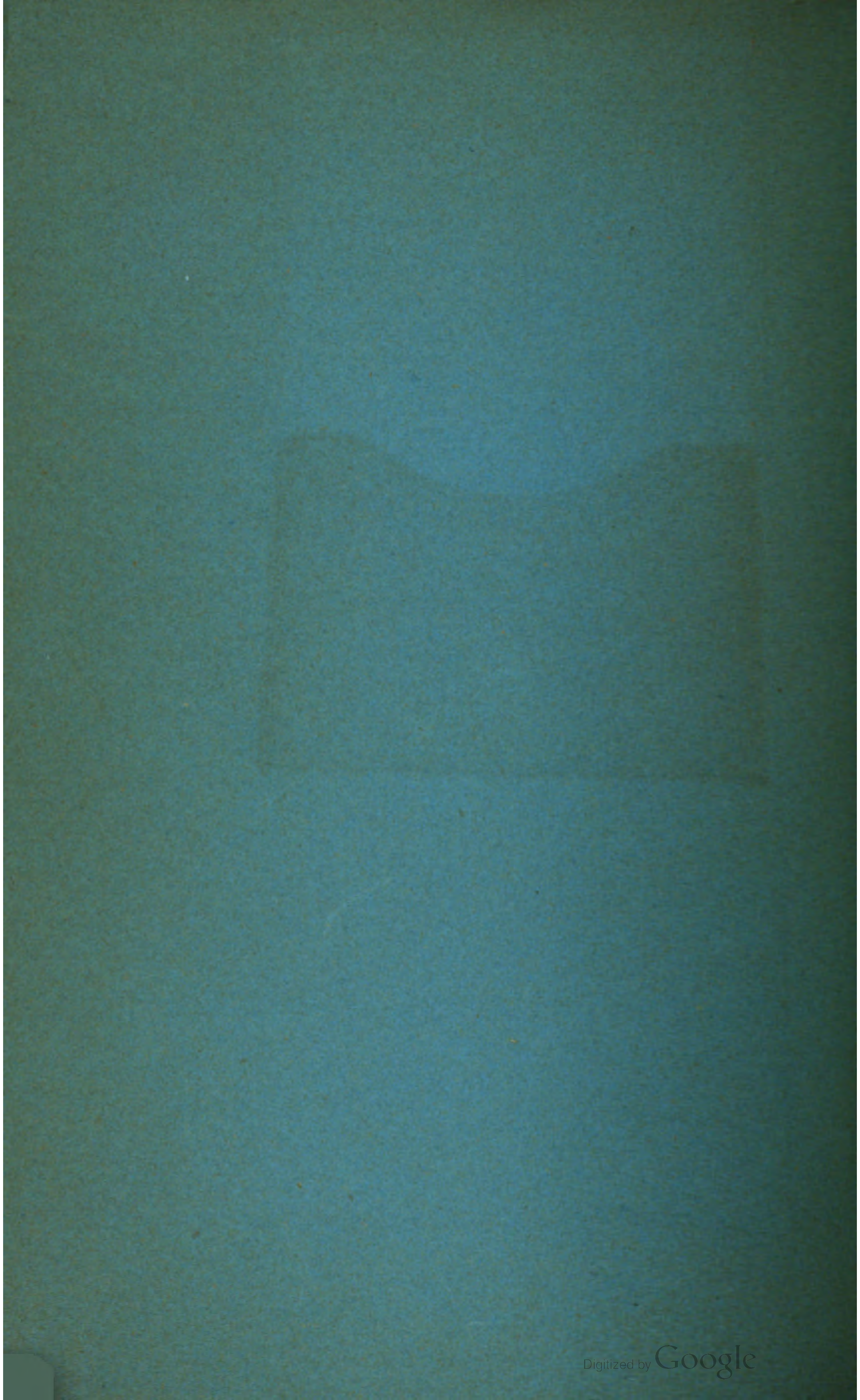
RAPPORT $\frac{x}{r}$	PROBABILITÉ P_2	RAPPORT $\frac{x}{r}$	PROBABILITÉ P_2	RAPPORT $\frac{x}{r}$	PROBABILITÉ P_2	RAPPORT $\frac{x}{r}$	PROBABILITÉ P_2	RAPPORT $\frac{x}{r}$	PROBABILITÉ P_2
0,00	0,000	0,55	0,289	1,10	0,542	1,65	0,734	2,40	0,895
0,01	0,005	0,56	0,294	1,11	0,546	1,66	0,737	2,42	0,897
0,02	0,011	0,57	0,299	1,12	0,550	1,67	0,740	2,44	0,900
0,03	0,016	0,58	0,304	1,13	0,554	1,68	0,743	2,46	0,903
0,04	0,022	0,59	0,309	1,14	0,558	1,69	0,746	2,48	0,906
0,05	0,027	0,60	0,314	1,15	0,562	1,70	0,748	2,50	0,908
0,06	0,032	0,61	0,319	1,16	0,566	1,71	0,751	2,52	0,911
0,07	0,038	0,62	0,324	1,17	0,570	1,72	0,754	2,54	0,913
0,08	0,043	0,63	0,329	1,18	0,574	1,73	0,757	2,56	0,916
0,09	0,048	0,64	0,334	1,19	0,578	1,74	0,759	2,58	0,918
0,10	0,054	0,65	0,339	1,20	0,582	1,75	0,762	2,60	0,921
0,11	0,059	0,66	0,344	1,21	0,586	1,76	0,765	2,62	0,923
0,12	0,065	0,67	0,349	1,22	0,589	1,77	0,767	2,64	0,925
0,13	0,070	0,68	0,354	1,23	0,593	1,78	0,770	2,66	0,927
0,14	0,075	0,69	0,358	1,24	0,597	1,79	0,773	2,68	0,929
0,15	0,081	0,70	0,363	1,25	0,601	1,80	0,775	2,70	0,931
0,16	0,086	0,71	0,368	1,26	0,605	1,81	0,778	2,72	0,932
0,17	0,091	0,72	0,373	1,27	0,608	1,82	0,780	2,74	0,935
0,18	0,097	0,73	0,378	1,28	0,612	1,83	0,783	2,76	0,937
0,19	0,102	0,74	0,382	1,29	0,616	1,84	0,785	2,78	0,939
0,20	0,107	0,75	0,387	1,30	0,619	1,85	0,788	2,80	0,941
0,21	0,113	0,76	0,392	1,31	0,623	1,86	0,790	2,82	0,943
0,22	0,118	0,77	0,396	1,32	0,627	1,87	0,793	2,84	0,945
0,23	0,123	0,78	0,401	1,33	0,630	1,88	0,795	2,86	0,946
0,24	0,129	0,79	0,406	1,34	0,634	1,89	0,798	2,88	0,948
0,25	0,134	0,80	0,411	1,35	0,637	1,90	0,800	2,90	0,950
0,26	0,139	0,81	0,415	1,36	0,641	1,91	0,802	2,92	0,951
0,27	0,145	0,82	0,420	1,37	0,645	1,92	0,805	2,94	0,953
0,28	0,150	0,83	0,424	1,38	0,648	1,93	0,807	2,96	0,954
0,29	0,155	0,84	0,429	1,39	0,652	1,94	0,809	2,98	0,956
0,30	0,160	0,85	0,434	1,40	0,655	1,95	0,812	3,00	0,957
0,31	0,166	0,86	0,438	1,41	0,658	1,96	0,814	3,05	0,960
0,32	0,171	0,87	0,443	1,42	0,662	1,97	0,816	3,10	0,963
0,33	0,176	0,88	0,447	1,43	0,665	1,98	0,818	3,15	0,966
0,34	0,181	0,89	0,452	1,44	0,669	1,99	0,820	3,20	0,969
0,35	0,187	0,90	0,456	1,45	0,672	2,00	0,823	3,25	0,972
0,36	0,192	0,91	0,461	1,46	0,675	2,02	0,827	3,30	0,974
0,37	0,197	0,92	0,465	1,47	0,679	2,04	0,831	3,35	0,976
0,38	0,202	0,93	0,470	1,48	0,682	2,06	0,835	3,40	0,978
0,39	0,207	0,94	0,474	1,49	0,685	2,08	0,839	3,50	0,982
0,40	0,213	0,95	0,478	1,50	0,688	2,10	0,843	3,60	0,985
0,41	0,218	0,96	0,483	1,51	0,692	2,12	0,847	3,70	0,987
0,42	0,223	0,97	0,487	1,52	0,695	2,14	0,851	3,80	0,990
0,43	0,228	0,98	0,491	1,53	0,698	2,16	0,855	3,90	0,991
0,44	0,233	0,99	0,496	1,54	0,701	2,18	0,859	4,00	0,993
0,45	0,239	1,00	0,500	1,55	0,704	2,20	0,862	4,10	0,9943
0,46	0,244	1,01	0,504	1,56	0,707	2,22	0,866	4,20	0,9954
0,47	0,249	1,02	0,509	1,57	0,710	2,24	0,869	4,30	0,9963
0,48	0,254	1,03	0,513	1,58	0,713	2,26	0,873	4,40	0,9970
0,49	0,259	1,04	0,517	1,59	0,716	2,28	0,876	4,50	0,9976
0,50	0,264	1,05	0,521	1,60	0,719	2,30	0,879	4,60	0,9981
0,51	0,269	1,06	0,525	1,61	0,722	2,32	0,882	4,70	0,9985
0,52	0,274	1,07	0,530	1,62	0,725	2,34	0,885	4,80	0,9988
0,53	0,279	1,08	0,534	1,63	0,728	2,36	0,889	4,90	0,9991
0,54	0,284	1,09	0,538	1,64	0,731	2,38	0,892	5,00	0,9993

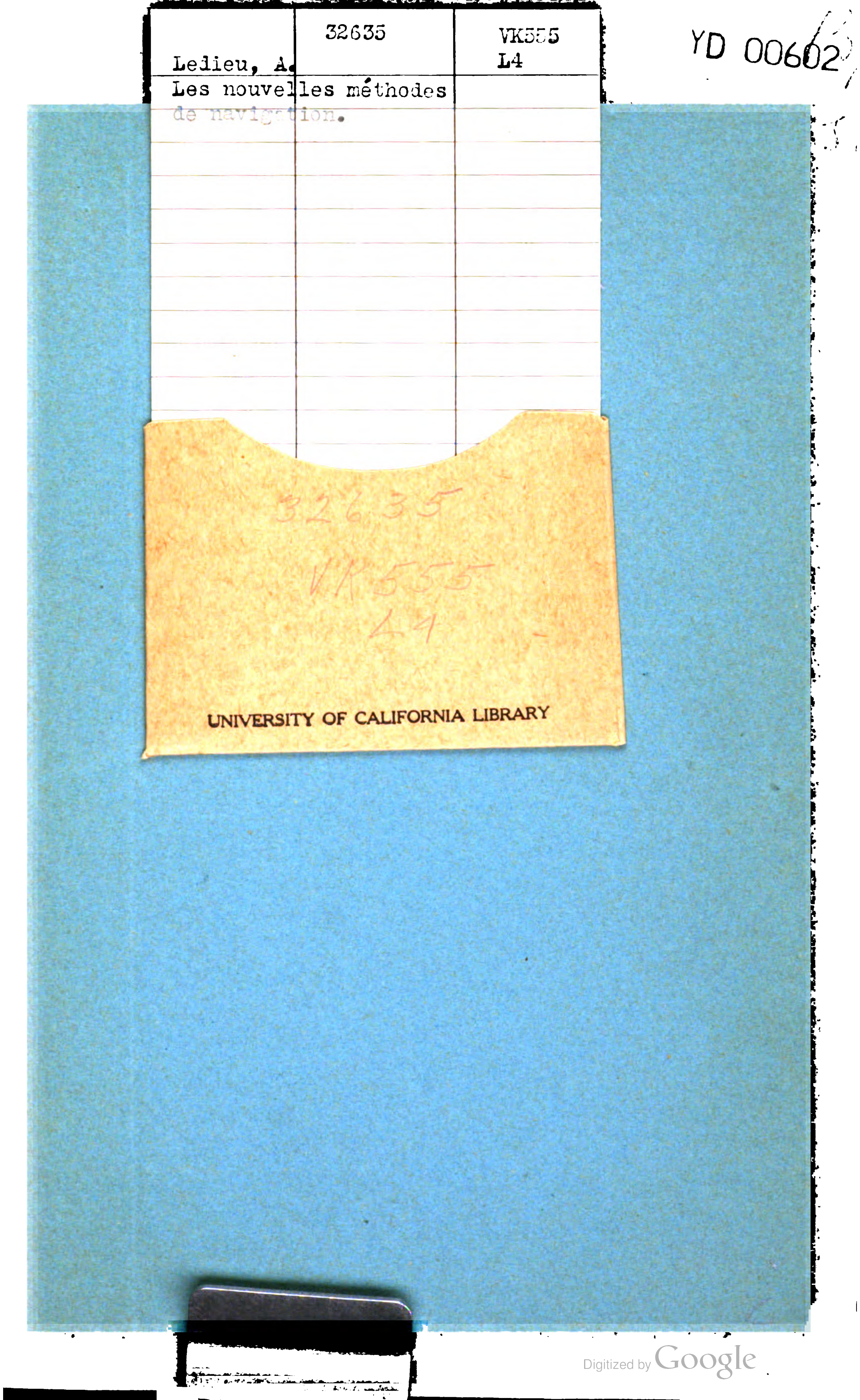
TABLE III.

Valeurs, toutes calculées, du rapport $\frac{2n-1}{2n}$, dont on a besoin dans l'application du *criterium* de Chauvenet (nº 124).

NOMBRE des observations n.	VALEUR du rapport $\frac{2n-1}{2n}$.	NOMBRE des observations n.	VALEUR du rapport $\frac{2n-1}{2n}$.	NOMBRE des observations n.	VALEUR du rapport $\frac{2n-1}{2n}$.
1	0,500	16	0,969	70	0,9929
2	0,750	17	0,971	80	0,9937
3	0,833	18	0,972	90	0,9944
4	0,875	19	0,974	100	0,9950
5	0,900	20	0,975	125	0,9960
6	0,917	22	0,977	150	0,9967
7	0,929	24	0,979	200	0,9975
8	0,937	26	0,981	250	0,9980
9	0,944	28	0,982	300	0,9983
10	0,950	30	0,983	400	0,9987
11	0,954	35	0,986	500	0,9990
12	0,958	40	0,988	600	0,9992
13	0,962	45	0,989	800	0,9994
14	0,964	50	0,9900	1000	0,9995
15	0,967	60	0,9917	2000	0,99975

FIN DES TABLES ET DE TOUT L'OUVRAGE.




YD 00602
Ledieu, A.
32635
VK555
L4
Les nouvelles méthodes de navigation.
32635
VK555
L4
UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY
Digitized by Google

